

РАСЧЁТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ТОРНАДО

И. Ю. Крутова¹, О. В. Опрышко^{1,2}

¹ Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ

² ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск

В работе представлен расчет газодинамических параметров для восходящих закрученных потоков воздуха, типа торнадо и тропического циклона по данным натурных наблюдений из шкалы Фудзиты. Для системы уравнений газовой динамики рассматривается одна конкретная характеристическая задача Коши с начальными данными на горизонтальной плоскости $z = 0$, являющейся контактной характеристикой кратности два. Газодинамические параметры находятся численно с использованием метода Рунге-Кутты. Представлен расчет кинетической энергии торнадо.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, характеристическая задача Коши, восходящие закрученные потоки воздуха, тропический циклон.

Введение

Исследованиями торнадо занимались и продолжают заниматься многие ученые. В работах [1 – 3], объясняются причины формирования, существования и естественного разрушения течения вихрей, а также присутствует обоснованный ответ на вопрос: откуда идет постоянный приток энергии. Баутиным С. П. была предложена [1] и обоснована (см. например [2, 3]) ранее не встречающаяся схема возникновения природных вихрей, для существования которых необходим постоянный приток энергии – сила

инерции, вызванная вращением Земли вокруг своей оси – сила Кориолиса [1–3].

Целью данной работы является представление газодинамических параметров восходящего закрученного потока воздуха (ВЗП) на примере тропического циклона, возникающего и функционирующего в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, и расчет кинетической энергии торнадо.

1. Постановка характеристической задачи Коши

Для системы уравнений газовой динамики (1.1) рассматривается одна задача Коши с начальными данными на горизонтальной плоскости $z = 0$.

Система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса и силы тяжести в цилиндрической системе координат имеет следующий вид [1 – 3]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{u_\varphi}{r} + w_z\right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)r}c c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{u}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (1.1)$$

где r – полярный радиус, φ – полярный угол в плоскости xOy ;
 $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; ρ – плотность; u, v, w – радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно; $a = 2\Omega \sin(\psi)$; $b = 2\Omega \cos(\psi)$; $g = \text{const} > 0$ ускорение свободного падения; γ – показатель адиабаты газа;

Ω – модуль вектора скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ – широта точки, в которой находится центр полярной системы координат. Для системы (1.1) ставятся следующие начальные данные (1.2), последнее из начальных условий (1.2) обеспечивает условие непротекания газа через плоскость $z = 0$ [3,4].

$$\begin{aligned} c(t, r, \varphi, z) \Big|_{z=0} &= c_0(t, r, \varphi), \\ u(t, r, \varphi, z) \Big|_{z=0} &= u_0(t, r, \varphi), \\ v(t, r, \varphi, z) \Big|_{z=0} &= v_0(t, r, \varphi), \\ w(t, r, \varphi, z) \Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Расчеты основных газодинамических параметров

Решение характеристической задачи Коши представлено, в виде бесконечного сходящегося ряда [2 – 3]:

$$U(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t, r, \varphi) \frac{z^k}{k!}, \quad U_k(t, r, \varphi) = \frac{\partial^k U(t, r, \varphi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}, \quad (2.1)$$

где вектор U имеет в качестве координат функции c, u, v, w . В настоящей работе рассматривается стационарное течение, когда $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, и зависящее от пространственных координат r, φ, z . Из бесконечного ряда учитывается конечное число слагаемых:

$$\begin{cases} c = c_0 + c_1 z + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 \frac{z^3}{6} + c_4 \frac{z^4}{24}, \\ v = v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2} + v_3 \frac{z^3}{6}, \\ u = u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2} + u_3 \frac{z^3}{6}, \\ w = w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2} + w_3 \frac{z^3}{6} + w_4 \frac{z^4}{24}. \end{cases} \quad (2.2)$$

при этом, $w_0 = 0$ и дополнительно полагается, что $w_1 = 0$.

Для нахождения газодинамических параметров: c – скорости звука газа, v – окружной и u – радиальной скорости ветра восходящего потока будем учитывать первые два слагаемых для нахождения каждого параметра из (2.2), с учетом нулевого и первого индекса.

С помощью метода Рунге-Кутты численно определяются значения параметров: c_0, u_0, v_0 при решении задачи Коши (2.3) [1 – 3].

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_0 = -\frac{(\gamma-1)}{2} c_0 \frac{\left[u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ u'_0 = u_0 \frac{\left[u_0^2 + \frac{a^2(r_{in}^4 - r^4)}{4r^2} \right]}{r(u_0^2 - c_0^2)}, \\ c_0(r) \Big|_{r=r_{in}} = 1, \\ u_0(r) \Big|_{r=r_{in}} = u_{in}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$v_0 = \frac{a(r_{in}^2 - r^2)}{2r}, \quad v_0(r_{in}) = 0, \quad a = 2\Omega \sin \psi$$

Параметры с первыми индексами можно определить из (2.4) они более подробно описаны [1 – 3].

$$\begin{aligned} c_1(r, \varphi) &= c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos(\varphi) + c_{12}(r) \sin(\varphi), \\ u_1(r, \varphi) &= u_{10}(r) + u_{11}(r) \cos(\varphi) + u_{12}(r) \sin(\varphi), \\ v_1(r, \varphi) &= v_{10}(r) + v_{11}(r) \cos(\varphi) + v_{12}(r) \sin(\varphi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для нахождения w – вертикальной скорости ветра будем учитывать только третье слагаемое из 4-го равенства (2.2), которое в свою очередь выражается по следующей формуле:

$$w_2(r, \varphi) = w_{20}(r) + w_{21}(r) \cos(\varphi) + w_{22}(r) \sin(\varphi). \quad (2.5)$$

Способ определения параметров со вторыми индексами подробно представлен в [2 – 3].

3. Результаты расчетов газодинамических параметров

В данном пункте будут представлены результаты расчета основных газодинамических параметров: $c = c_0 + c_1 z$, $u = u_0 + u_1 z$, $v = v_0 + v_1 z$ и $w = w_2 z^2 / 2$ для тропического циклона (ТЦ) при значении высоты $z = 10, 50$ и 100 м. Основные характеристики тропического циклона средней интенсивности взяты из шкалы Фудзиты [5] и приведены в таблице 1.

Таблица 1 Данные из шкалы Фудзиты

Класс торнадо	радиус стока r_0 , м	$ \vec{V} $ скорость ветра, м/с
ТЦ	3650	53.49

В таблице 1: r_0 – радиус стока торнадо и $|\vec{V}|$ – вектор скорости ветра, который состоит из двух компонент: окружной и радиальной $|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Расчет газодинамических параметров реализован с помощью численного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для расчетов использовалась пространственная сетка, в области $r \in [r_0, r_{in}]$, где: r_{in} – внешний радиус торнадо, с шагом $h = (r_{in} - r_0) / n$, где $n = 10^6$ – число интервалов.

На рисунках 1 – 4 представлены поверхности газодинамических параметров c , u , v , w в декартовых координатах xOy с траекторией движения частиц, их безразмерные значения.

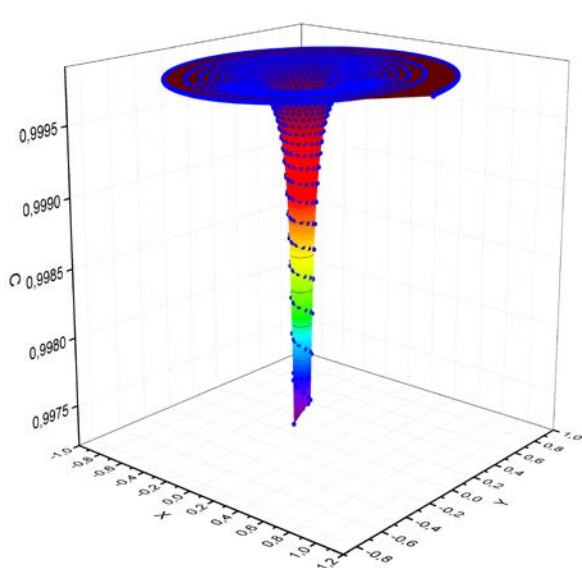


Рисунок 1 Скорость звука газа, тропический циклон

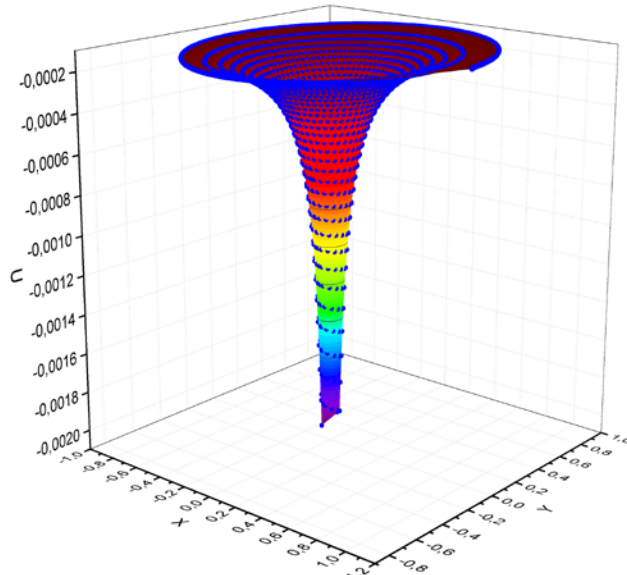


Рисунок 3 Радиальная скорость ветра, тропический циклон

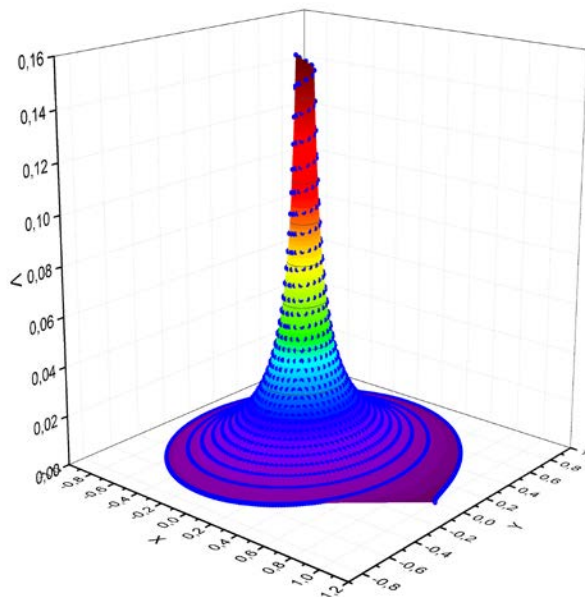


Рисунок 2 Окружная скорость ветра, тропический циклон

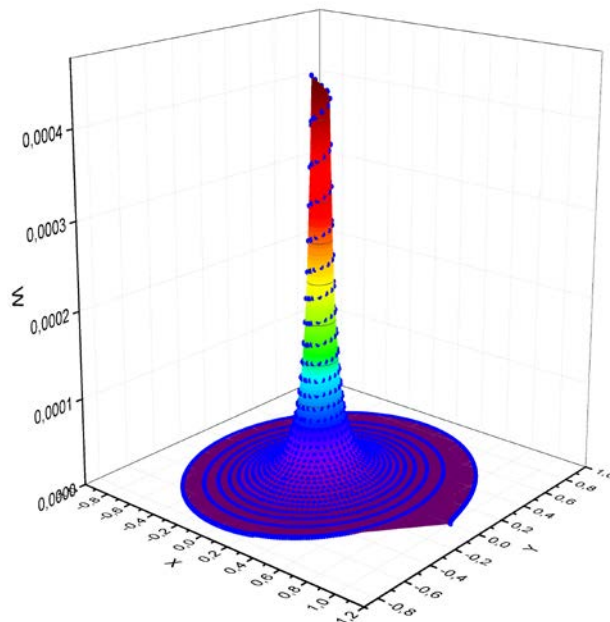


Рисунок 4 Вертикальная скорость ветра, тропический циклон

Значение **скорости звука газа** c (рис 1.) при $z=10$ м меняется от размерного значения 333 до 332.1 м/с при приближении к радиусу r_0 , что соответствует изменению на 0.3%, также меняется значение плотности на 1.3% и понижается давления на 1.8%. При значении высоты $z=50$ м: $c=331.86$ м/с, при $z=100$ м: $c=331.57$ м/с. Таким образом, в центре ВЗП находится область пониженного давления газа.

Радиальная составляющая вектора скорости ветра u (рис. 2) имеет отрицательный знак, т.е. газ движется к центру стока. Основные изменения радиальной компоненты происходят вблизи радиуса стока r_0 . Радиальная скорость ветра возрастает от 0.033 до 0.67 м/с. При значении $z=50$ м: $u=0.68$ м/с, при $z=100$ м: $u=0.67$ м/с. Наличие области пониженного давления ускоряет стремление (падение) газа в центр ВЗП.

Окружная составляющая вектора скорости ветра v (рис. 3) возрастает до безразмерного значения 0.16, что соответствует величине 52.94 м/с. Положительное значение окружной компоненты говорит о том, что закрутка газа направлена против часовой стрелки. Частица газа при движении к центру успевает совершить около 35 полных оборотов вокруг стока торнадо. При значении $z=50$ м: $v=52.94$ м/с, при $z=100$ м: $v=52.93$ м/с.

На рис. 4 представлена поверхность **вертикальной скорости ветра** w . Она возрастает до безразмерного значения 0.0004, что соответствует размерной величине 0,15 м/с. Воздушная масса в придонной части тропического циклона средней интенсивности до высоты 50 – 100 м движется практически горизонтально. При значении $z=50$ м: $w=3.76$ м/с, при $z=100$ м: $w=15.06$ м/с. С увеличением высоты, увеличивается вертикальная составляющая вектора скорости торнадо при том, что окружная и радиальная компоненты остаются практически неизменны.

4. Расчет кинетической энергии торнадо

Полная кинетическая энергия состоит из трех составляющих: окружной, радиальной и вертикальной: $W = W_v + W_u + W_w$. Кинетическая энергия газа, движущегося в области $(D): \{r_0 \leq r \leq r_{in}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq z \leq z_0\}$ задается тройным интегралом [6] где \vec{V} – вектор скорости газа.

$$W = \frac{1}{2} \iiint_D r(x, y, z) \vec{V}^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{z_0} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_{r_0}^{r_{in}} c^{\frac{2}{\gamma-1}}(r, \varphi, z) (u^2(r, \varphi, z) + v^2(r, \varphi, z) + w^2(r, \varphi, z)) r dr \right] d\varphi \right\} dz, \quad (3.1)$$

Поскольку рассматриваются изоэнтропические течения политропного газа, то $c^2 = \rho^{(\gamma-1)}$, $\rho = c^{\frac{2}{\gamma-1}}$. В случае воздуха $\gamma = 1.4$, $\rho = c^5(r, \varphi, z)$. Далее, применяется аналитический способ расчета, чтобы облегчить численное вычисление интегралов. Подробный вывод формул [6] связан с аналитическими преобразованиями. Для простоты изложения используем пример с представлением двух слагаемых из (2.2) для нахождения радиальной и окружной составляющих кинетической энергии: $c = c_0 + c_1 z$, $v = v_0 + v_1 z$, $u = u_0 + u_1 z$. Для расчета кинетической энергии вертикальной части потока будем учитывать только третий коэффициент $w = w_2 \frac{z^2}{2}$.

После применения соответствующих аналитических преобразований для построения трехмерного стационарного течения, получаем выражение, которое необходимо численно проинтегрировать по переменной r .

Ниже представлены результаты расчетов кинетической энергии: базовый расчет (с учетом только первых коэффициентов) – таблица 2, с учетом вторых коэффициентов при $z = 10$ м – таблица 3, при $z = 50$ м – таблица 4.

На рис. 5 представлено распределение кинетической энергии радиальной, окружной и вертикальной частей потока соответственно. Вертикальная часть потока кинетической энергии начинает формироваться только на радиусе стока ТЦ.

Таблица 2 Кинетическая энергия торнадо, базовый расчет

Класс торнадо	W_U МДж	W_V МДж	W МДж	W_V/W	W кВт
F00	2.560E-01	2.540E-01	5.100E-01	4.980E-01	1.219E-07
F01	8.220E-01	2.658E+00	3.480E+00	7.638E-01	8.315E-07
F10	1.787E+00	1.268E+01	1.447E+01	8.765E-01	3.457E-06
F11	4.615E+00	8.746E+01	9.207E+01	9.499E-01	2.200E-05
F20	8.690E+00	3.150E+02	3.237E+02	9.732E-01	7.735E-05
F21	2.040E+01	1.809E+03	1.830E+03	9.889E-01	4.372E-04
F30	3.572E+01	5.655E+03	5.690E+03	9.937E-01	1.360E-03
F31	8.049E+01	3.008E+04	3.016E+04	9.973E-01	7.208E-03
F40	1.447E+02	9.988E+04	1.000E+05	9.986E-01	2.390E-02
F41	2.811E+02	3.919E+05	3.922E+05	9.993E-01	9.372E-02
F50	4.873E+02	1.211E+06	1.212E+06	9.996E-01	2.896E-01
ТЦ	7.205E+02	3.417E+06	3.418E+06	9.998E-01	8.167E-01
F51	1.026E+03	5.658E+06	5.659E+06	9.998E-01	1.352E+00
F52	1.636E+03	1.472E+07	1.472E+07	9.999E-01	3.518E+00

Таблица 3 Кинетическая энергия торнадо, $z = 10\text{м}$

Класс торнадо	W_U МДж	W_V МДж	W_V/W	W_W МДж	W_W/W	W МДж	W кВт
F00	2.558E-01	2.536E-01	4.979E-01	5.491E-05	1.078E-04	5.094E-01	1.218E-07
F01	8.218E-01	2.654E+00	7.635E-01	2.167E-04	6.235E-05	3.476E+00	8.307E-07
F10	1.788E+00	1.266E+01	8.762E-01	6.984E-04	4.833E-05	1.445E+01	3.454E-06
F11	4.630E+00	8.734E+01	9.496E-01	2.718E-03	2.955E-05	9.198E+01	2.198E-05
F20	8.755E+00	3.146E+02	9.729E-01	7.520E-03	2.325E-05	3.234E+02	7.729E-05
F21	2.080E+01	1.807E+03	9.886E-01	2.461E-02	1.346E-05	1.828E+03	4.369E-04
F30	3.698E+01	5.649E+03	9.935E-01	5.716E-02	1.005E-05	5.686E+03	1.359E-03
F31	8.707E+01	3.006E+04	9.971E-01	1.612E-01	5.348E-06	3.014E+04	7.205E-03
F40	1.658E+02	9.979E+04	9.983E-01	3.421E-01	3.423E-06	9.996E+04	2.389E-02
F41	3.588E+02	3.916E+05	9.991E-01	7.169E-01	1.829E-06	3.920E+05	9.369E-02
F50	7.090E+02	1.211E+06	9.994E-01	1.245E+00	1.028E-06	1.211E+06	2.895E-01
ТЦ	1.396E+03	3.415E+06	9.996E-01	7.929E-01	2.321E-07	3.417E+06	8.166E-01
F51	1.922E+03	5.654E+06	9.997E-01	2.186E+00	3.864E-07	5.656E+06	1.352E+00
F52	3.689E+03	1.471E+07	9.997E-01	2.849E+00	1.936E-07	1.472E+07	3.517E+00

Таблица 4 Кинетическая энергия торнадо, $z = 50\text{м}$

Класс торнадо	W_U МДж	W_V МДж	W_V/W	W_W МДж	W_W/W	W МДж	W кВт
F00	1.283E+00	1.272E+00	4.666E-01	1.711E-01	6.275E-02	2.726E+00	6.516E-07
F01	4.174E+00	1.327E+01	7.323E-01	6.752E-01	3.727E-02	1.811E+01	4.330E-06
F10	9.273E+00	6.325E+01	8.467E-01	2.176E+00	2.913E-02	7.470E+01	1.785E-05
F11	2.555E+01	4.361E+02	9.276E-01	8.468E+00	1.801E-02	4.701E+02	1.124E-04
F20	5.249E+01	1.571E+03	9.539E-01	2.343E+01	1.423E-02	1.646E+03	3.935E-04
F21	1.539E+02	9.021E+03	9.751E-01	7.666E+01	8.286E-03	9.252E+03	2.211E-03
F30	3.388E+02	2.820E+04	9.820E-01	1.781E+02	6.203E-03	2.871E+04	6.862E-03
F31	1.230E+03	1.500E+05	9.886E-01	5.023E+02	3.310E-03	1.518E+05	3.627E-02
F40	3.364E+03	4.981E+05	9.912E-01	1.066E+03	2.121E-03	5.025E+05	1.201E-01
F41	1.112E+04	1.955E+06	9.932E-01	2.234E+03	1.135E-03	1.968E+06	4.704E-01
F50	3.012E+04	6.042E+06	9.944E-01	3.881E+03	6.387E-04	6.076E+06	1.452E+00
ТЦ	8.784E+04	1.705E+07	9.947E-01	2.471E+03	1.442E-04	1.714E+07	4.096E+00
F51	1.168E+05	2.822E+07	9.956E-01	6.810E+03	2.403E-04	2.834E+07	6.774E+00
F52	2.642E+05	7.343E+07	9.963E-01	8.876E+03	1.204E-04	7.371E+07	1.762E+01

Кинетическая энергия окружной части торнадо для базового расчета совпадает с расчетом при $z = 10$ м. Кинетическая энергия радиальной части потока от класса F00 до F30 для базового и расчета при $z = 10$ м – совпадают, от F31 до F52 заметна разница результатов, достигающая двукратного увеличения, при этом, общая кинетическая энергия для всех классов торнадо практически не меняется. Значения кинетической энергии (табл. 4) в 5 раз больше чем в (табл. 3). С увеличением значения z , увеличивается кинетическая энергия (табл. 4) пропорционально высоте.

Список литературы

1. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
2. *Баутин С. П., Обухов А. Г.* Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
3. *Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. Екатеринбург: УрГУПС, 2017. 355 с.
4. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
5. *Tatom F.B., Witton S.J.* The transfer of energy from tornado into the ground Seismological // Research Letter. 2001. V.~72. №.~1. Pp.~12.
6. *Крутова И.Ю., Опрышко О.В.* Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона. //Препринт. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ. 2018. 45 с.