ЗАБАБАХИНСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ 2019

Точные решения нелинейного уравнения фильтрации и теплопроводности

Баутин С.П., Коваленко А.И

В работе рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$\rho_t = \alpha \operatorname{div} \left(\rho^\sigma \nabla \rho \right), \tag{1}$$

решения которого описывают процесс фильтрации газа в пористом грунте [1]. Здесь ρ – плотность газа, $\sigma = \mathrm{const} > 1$ – показатель политропы газа, давление в газе есть $p = \rho^\sigma$, $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Следующие значения σ соответствуют таким сплошным средам: $\sigma = 1.407$ – воздух; $\sigma = 3$ – продукты взрыва; $\sigma = 7.02$ – вода [2, 3].

Такой же вид

$$T_t = \alpha \operatorname{div} (T^\sigma \nabla T) \tag{2}$$

имеет и нелинейное уравнение теплопроводности при степенной зависимости коэффициента теплопроводности $K(T) = \alpha T^\sigma$ от температуры T [4]. Здесь по физическому смыслу процесса теплопроводности $\sigma = \text{const} > 0$. В случае

$\sigma = 0$ уравнение (2) переходит в линейное уравнение теплопроводности и здесь не рассматривается. Для процесса теплопроводности берут следующие значения σ: $\sigma = 1/2$ – для высоко- и $\sigma = 1$ – для низко-температурных процессов [5]; $\sigma = 3$ при учете лучистой теплопроводности [6].

Замена $u = \rho^\sigma$ для уравнения (1) и аналогичная замена $u = T^\sigma$ для уравнения (2), а также изменение масштаба времени оба эти уравнения приводят к следующему виду [7]:

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 \ , \tag{3}$$

которое в подробной записи имеет вид

$$u_t = u\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}(u_{x_i})^2, \quad n \geq 1.$$

Исходя из физического смысла уравнения (3) здесь рассматриваются решения этого уравнения, соответствующие условию: $u > 0$.

Представим искомую функцию в виде:

$$u(t,\mathbf{x}) = T(t)\cdot X(\mathbf{x});\quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n);\quad n \geq 1 \tag{4}$$

Подстановка соотношения (4) в уравнение (3) приводит к равенству

$$T'(t)\cdot X(\mathbf{x}) = T^2(t)\cdot X(\mathbf{x})\Delta X(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sigma}T^2(t)\cdot\left[\nabla X(\mathbf{x})\right]^2$$

и переменные разделяются

$$\frac{T'(t)}{T^2(t)} = \frac{X(\mathbf{x})\Delta X(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sigma}\left[\nabla X(\mathbf{x})\right]^2}{X(\mathbf{x})} = \lambda, \tag{5}$$

где

$$\lambda = \mathrm{const}.$$

Нестационарный случай

В случае $\lambda = 1$ вместо (5) имеем два уравнения

$$T'(t) = T^2(t) \tag{8}$$

и

$$X(\mathbf{x})\Delta X(\mathbf{x}) + \frac{1}{\sigma}\left[\nabla X(\mathbf{x})\right]^2 = X(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Не нарушая общности рассмотрения для уравнения (8) можно положить следующее начальное условие

$$T(t)|_{t=0} = 1 \tag{10}$$

и тогда получается решение

$$T(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{11}$$

В случае $n \geq 1$ уравнение (9) имеет следующее точное решение

$$X(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{12}$$

что проверяется непосредственной подстановкой функции (12) в уравнение (9).

Следовательно, в многомерном случае имеется следующее точное решение уравнения (3)

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2(n\sigma + 2)} \frac{1}{(1 - t)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \tag{13}$$

которое при $n = 1$ имеет вид:

$$u(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2(\sigma + 2)} \frac{1}{(1 - t)} x^2 \tag{14}$$

Точное решение интересно тем, что в случае уравнения теплопроводности оно описывает тепловую волну со стоящим на месте ее фронтом, хотя при $t \to 1-0$ имеем: $u \to +\infty$. При этом тепловой поток

$$q = -\alpha T^{\sigma} \nabla T = -\frac{\alpha}{\sigma} u^{1/\sigma} \nabla u \qquad (15)$$

на фронте волны равен нулю с обеих сторон. В случае уравнения фильтрации решение описывает стоящий на месте фронт фильтрации, хотя давление в пласте по одну сторону от него растет неограниченно.

В случае $n = 1$ для уравнения (9), имеющего вид (индекс у независимой переменной для простоты написания опущен)

$$X(x)X''(x) + \frac{1}{\sigma}\left[X'(x)\right]^2 = X(x), \tag{16}$$

выписывается общее решение.

$$\frac{dX}{dx} = \pm X^{-1/\sigma}\sqrt{\frac{2\sigma}{\sigma+2}X^{(\sigma+2)/\sigma} + C_1}. \tag{17}$$

Если произвольная постоянная равна нулю: $C_1 = 0$, то уравнение (17) интегрируется в явном виде

$$\frac{dX}{X^{1/2}} = \pm\sqrt{\frac{2\sigma}{\sigma+2}}\,dx;\;\; 2X^{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2\sigma}{\sigma+2}}\,(x{+}C_2);\;\; X = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)}(x{+}C_2)^2.$$

Соответствующий сдвиг начала координат и умножение на $T(t)$ приводит к решению (14).

При $C_1 \neq 0$ сначала полагается $C_1 > 0$ и тогда решение уравнения (17) записывается в квадратурах:

$$\int \frac{X^{1/\sigma}}{\sqrt{1+Y}} dX = \sqrt{C_1}(C_2 \pm x),$$

где введено промежуточное обозначение

$$Y = \frac{2\sigma}{C_1(\sigma+2)} X^{1+2/\sigma}.$$

Применяя сжатие или растяжение вдоль оси x и сдвиг вдоль этой оси можно положить: $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Выбор знака перед x определяет полуось, на которой определено решение и также не нарушая общности далее выбирается знак плюс, то есть

$$\int \frac{X^{1/\sigma}}{\sqrt{1+Y}} dX = x.$$

Интеграл в левой части последнего равенства является неберущимся [9], но с использованием сходящегося при $|Y| < 1$ биномиального степенного ряда от Y

$$\frac{1}{\sqrt{1+Y}} = 1 - \frac{1}{2}Y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}Y^2 + ... + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}Y^n + ...$$

$$\int \left[X^{1/\sigma} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\sigma}{\sigma+2}\right)X^{1+3/\sigma} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{2\sigma}{\sigma+2}\right)^2 X^{2+5/\sigma} + ... + \right.$$

$$\left. +(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2\sigma}{\sigma+2}\right)^n X^{n+(2n+1)/\sigma} + ...\right] dX$$

получается неявное представление решения уравнения (17):

$$x = \frac{X^{1+1/\sigma}}{(1+1/\sigma)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2\sigma}{\sigma+2}\right)^n \frac{X^{n+1+(2n+1)/\sigma}}{[n+1+(2n+1)/\sigma]} \quad (18)$$

При положительных x, близких к нулю, получается следующее приближенное решение уравнения (17) при $C_1 > 0$

$$X \approx \left[\frac{(1+\sigma)}{\sigma}x\right]^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}}. \qquad (19)$$

Следовательно, в случае $n = 1$ и $C_1 = 1 > 0$ решение уравнения (3) имеет следующее представление

$$u(t,x) = \frac{1}{(1-t)}\left\{\left[\frac{(\sigma+1)}{\sigma}x\right]^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}} + \ldots\right\} \qquad (20)$$

в виде бесконечного сходящегося в окрестности точки $x = 0$ ряда с нулевой температурой в начале координат.

$$X(x) := \left[\frac{(1+\sigma)}{\sigma}\cdot x\right]^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}}$$

$$x := 0 \,..\, 50$$

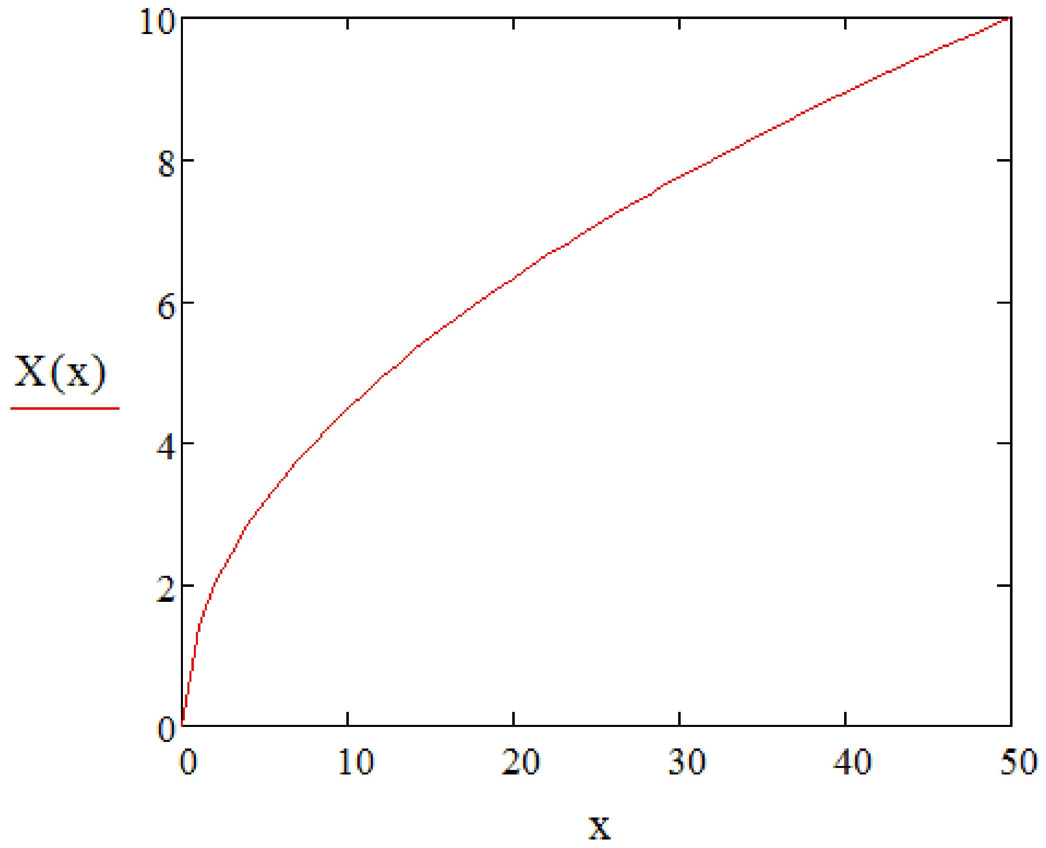

Рисунок 1. График функции X(x) в нестационарном случае при n = 1

Поскольку

$$0 < \frac{\sigma}{(\sigma + 1)} < 1$$

то при $x = 0$ производная $X'(x)$ равна минус бесконечности, а тепловой поток со стороны ненулевого решения имеет отличное от нуля значение

$$q = -\frac{\alpha}{\sigma}\frac{1}{(1-t)^{(1+\sigma)/\sigma}}.$$

Поэтому в случае уравнения теплопроводности для применения решения (20) необходимо будет в точке $x = 0$ вводить сток тепла.

Поскольку в физике обычно не определяют поток давления, то в случае уравнения нестационарной фильтрации для решения (20) значение величины q роли не играет.

Пусть в уравнении (17) произвольная постоянная $C_1 < 0$ – строго отрицательна. В этом случае при решении уравнения (17) от значения начального условия для этого уравнения, заданного в точке $x = 0$, необходимо требовать выполнения неравенства

$$X(0) = X^o = \text{const} \geq \left[|C_1| \frac{(\sigma + 2)}{2\sigma} \right]^{\sigma/(\sigma+2)} > 0,$$

чтобы подкоренное выражение, стоящее в правой части уравнения (17) было неотрицательным

$$\frac{2\sigma}{\sigma + 2} (X^o)^{(\sigma+2)/\sigma} - |C_1| > 0.$$

И тогда решение данной задачи Коши будет определено в некоторой окрестности точки $x = 0$, оно будет строго положительным и его проще также строить численно, поскольку аналитическое представление сходящимся рядом достаточно громоздко

№ п/п	n	Вид функции $X(\mathbf{x})$	$u\vert_{\mathbf{x}=0}$	$q\vert_{\mathbf{x}=0}$
1	$n \geq 1$	$X(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{2(n\sigma+2)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$	0	0
2	$n = 1$	$X(x_1) = \frac{\sigma}{2(\sigma+2)} x_1^2$ – решение, известное ранее	0	0
3	$n = 1$	$\frac{dX}{dx_1} = X^{-1/\sigma} \sqrt{\frac{2\sigma}{(\sigma+2)} X^{(\sigma+2)/\sigma} + 1}$, $X(0) = 0$; $X(x_1) = \left[\frac{(1+\sigma)}{\sigma} x_1\right]^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}} + \ldots$	0	$\neq 0$
4	$n = 1$	$\frac{dX}{dx_1} = \pm X^{-1/\sigma} \sqrt{\frac{2\sigma}{(\sigma+2)} X^{(\sigma+2)/\sigma} + C_1}$, $X(0) = X^o > \left[\vert C_1\vert \frac{(\sigma+2)}{2\sigma}\right]^{\sigma/(\sigma+2)} > 0$; C_1 – произвольная отрицательная константа.	$\neq 0$	$\neq 0$

Таблица 1. Точные решения $u(t, \mathbf{x}) = \frac{X(\mathbf{x})}{(1-t)}$ в нестационарном случае

4. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.

Стационарный случай

В случае $\lambda = 0$ уравнение (3) и уравнение для $X(\mathbf{x})$ переходят в следующее уравнение:

$$u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2 = 0;$$

или в подробном виде

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \frac{1}{\sigma}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right] = 0. \qquad (21)$$

Применим процедуру разделения переменных, тогда решение уравнения (21) будем искать в виде

$$u(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i). \qquad (22)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1, j\neq i}^{n} X_j(x_j)\right]^2 \cdot \left\{X_i''(x_i)X_i(x_i) + \frac{1}{\sigma}\left[X_i'(x_i)\right]^2\right\} = 0 \qquad (23)$$

Первое точное решение уравнения (23) получится, если приравнять нулю все n выражений, стоящих в фигурных скобках:

$$X_i''(x_i)X_i(x_i) + \frac{1}{\sigma}\left[X_i'(x_i)\right]^2 = 0; \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (24)$$

$$X_i(x_i) = \frac{\sigma+1}{\sigma}\, x_i^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}; \quad i = 1, 2, ..., n,$$

Следовательно, найдено одно точное стационарное решение многомерного нелинейного уравнения нестационарной фильтрации

$$u = \left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{\sigma}{\sigma+1}}. \qquad (25)$$

Второе точное решение уравнения (23) получится, если при $n \geq 2$ положить

$$X_i''(x_i)X_i(x_i) + \frac{1}{\sigma}\left[X_i'(x_i)\right]^2 = A_i X_i^2(x_i); \quad A_i = \mathrm{const} \tag{26}$$

и потребовать выполнения нижеследующего равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 0. \tag{27}$$

В частном случае можно, например, положить

$$A_i = 1 \ \text{ при } \ i = 1, 2, ..., (n-1); \quad A_n = -(n-1).$$

$$\frac{dX}{dx} = \pm\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\, X^{-1/\sigma}\sqrt{AX^{2(\sigma+1)/\sigma} - C_1}. \qquad (28)$$

При решении уравнения (28) возможны три случая: $C_1 = 0$, $C_1 > 0$, $C_1 < 0$.

В случае, когда произвольная постоянная C_1 равна нулю, получается такое уравнение для X:

$$\frac{dX}{dx} = \pm\sqrt{\frac{A\sigma}{\sigma+1}}\, X; \quad A > 0,$$

что дает следующие точные решения уравнений (26) при соответствующих сдвигах начала координат и выбора конкретных полуосей независимых переменных

$$X_i(x_i) = \exp\left(\sqrt{\frac{A_i\sigma}{\sigma+1}}\, x_i\right); \quad A_i > 0; \quad i = 1, \ldots, n-1 \qquad (29)$$

Далее для уравнения (28) рассматривается второй случай значения константы C_1: $C_1 > 0$ и уравнение (28) записывается в виде

$$\frac{dX}{dx} = \pm\sqrt{C_1}\,\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\,[X(x)]^{-1/\sigma}\sqrt{\frac{AX(x)^{2(\sigma+1)/\sigma}}{C_1} - 1}; \qquad (30)$$

В этом случае и константа A в уравнении (30) заведомо должна быть строго положительной, и начальное условие, заданное в точке $x = 0$

$$X(0) = X^o > 0, \qquad (31)$$

для дифференциального уравнения (30), заведомо должно быть строго больше нуля и требуется выполнения неравенства

$$X^o > \left(\frac{C_1}{A}\right)^{\frac{\sigma}{2(\sigma+1)}} > 0$$

В третьем случае значения константы C_1: $C_1 < 0$ – уравнение (28) записывается в виде:

$$\frac{dX}{dx} = \pm\sqrt{|C_1|}\,\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\,X^{-1/\sigma}\sqrt{\frac{AX^{2(\sigma+1)/\sigma}}{|C_1|}+1}. \qquad (32)$$

После разделения переменных имеет место такое равенство:

$$\frac{X^{1/\sigma}}{\sqrt{\frac{AX^{2(\sigma+1)/\sigma}}{|C_1|}+1}}\,dX = \pm\sqrt{|C_1|}\,\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\,dx,$$

интегрирование которого дает следующее представление решения уравнения (30):

$$\int \frac{X^{1/\sigma}}{\sqrt{\frac{AX^{2(\sigma+1)/\sigma}}{|C_1|}+1}}\,dX = \pm\sqrt{\frac{|C_1|\sigma}{\sigma+1}}(x+C_2)$$

$$\frac{dX}{dx} = \sqrt{|C_1|}\,\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\,X^{-1/\sigma}\sqrt{\frac{AX^{2(\sigma+1)/\sigma}}{|C_1|}+1}. \qquad (34)$$

В решении уравнения (30), записанном в виде (34), значения константы A может быть как положительным, так и отрицательным.

Это связано с тем, что в случае нулевого начального условия для дифференциального уравнения (34) решение в окрестности начала координат существует при любом значении этой константы. Следовательно, в случае $C_1 < 0$, $X(0) = 0$ возможен такой подбор констант A_i, чтобы выполнялось равенство (27).

Как и выше с использованием биномиального ряда для следующей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+Y_1}}; \quad Y_1 = \frac{A}{|C_1|} X^{2(1+\sigma)/\sigma}$$

в качестве решения уравнения (34) вместо представления (33) получается следующее представление:

$$\int X^{1/\sigma} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{A}{|C_1|} X^{2+2/\sigma} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{A^2}{|C_1|^2} X^{4+4/\sigma} + ... + \right.$$

$$\left. +(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{A^n}{|C_1|^n} X^{2n+2n/\sigma} + ... \right] dX = \sqrt{\frac{|C_1|\sigma}{\sigma+1}} \cdot x.$$

В результате для сомножителей, входящих в решение (22) в случае (26) помимо представлений (29) имеют место и представления

$$X_i(x_i) = \left[\sqrt{\frac{|C_{1i}|(\sigma+1)}{\sigma}}\, x_i \right]^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}} + \ldots \tag{35}$$

в которых C_{1i} – произвольные отрицательные постоянные и индекс i может принимать значения из диапазона $1 \le i \le n$, $n \ge 2$

Искомые функции равны нулю в начале координат

$$X_i(0) = 0,$$

но тепловой поток для них в начале координат отличен от нуля.

Если в случае $C_1 < 0$ для дифференциального уравнения (34) поставлено ненулевое начальное условие: $X(0) = X^o > 0$ – то в случае положительного значения A оно может браться любым конечным.

Если в случае

$$X(0) = X^o > 0 \tag{36}$$

необходимо для выполнения равенства (27) брать отрицательное значение A: $A < 0$ – то надо требовать справедливость неравенств

$$0 < X^o < \left(\frac{|C_1|}{|A|}\right)^{\sigma/[2(\sigma+1)]}, \tag{37}$$

чтобы в начале координат подкоренные выражения в уравнении (34) было положительным:

$$\frac{A}{|C_1|}[X^o]^{2(\sigma+1)/\sigma} + 1 > 0$$

№ п/п	n	Вид функций $X_i(x_i)$	$u\|_{\mathbf{x}=0}$	$q\|_{\mathbf{x}=0}$
1	$n \geq 1$	$X_i(x_i) = \frac{(\sigma+1)}{\sigma} x_i^{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}};\ \ i = 1, ..., n$	0	$\neq 0$
	$n \geq 2$	Необходимое условие: $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = 0$		
2	$n \geq 2$	$X_i(x_i) = \exp\left(\sqrt{\frac{A_i\sigma}{(\sigma+1)}}\ x_i\right);$ $A_i > 0;\ \ i \in \{1, 2, ..., n\}.$	$\neq 0$	$\neq 0$
3	$n \geq 2$	$\frac{dX_j}{dx_j} = \pm\sqrt{C_{1j}}\ \sqrt{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}}\ X_j^{-1/\sigma}(x_j)\sqrt{\frac{A_j X_j^{2(\sigma+1)/\sigma}(x_j)}{C_{1j}} - 1};$ $X_j(0) = X_j^o > \left(\frac{C_{1j}}{A_j}\right)^{\sigma/[2(\sigma+1)]} > 0;$ C_{1j} – произвольная положительная константа; $A_j > 0;\ \ j \in \{1, 2, ..., n\}$	$\neq 0$	$\neq 0$

4	$n \geq 2$	$\frac{dX_k}{dx_\ell} = \sqrt{\lvert C_{1k}\rvert}\ \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma+1}}\ X_k^{-1/\sigma}(x_k)\sqrt{\frac{A_k X_\ell^{2(\sigma+1)/\sigma}(x_k)}{\lvert C_{1k}\rvert}+1}$; $X_k(0) = 0$; $X_k(x_k) = \left[\sqrt{\frac{\lvert C_{1k}\rvert(\sigma+1)}{\sigma}}x_k\right]^{\frac{\sigma}{(1+\sigma)}} + \ldots$; C_{1k} – произвольная отрицательная константа; в этом решении можно брать как $A_k > 0$, так и $A_k < 0$; $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.	0	$\neq 0$
5	$n \geq 2$	$\frac{dX_\ell}{dx_\ell} = \sqrt{\lvert C_{1\ell}\rvert}\ \sqrt{\frac{\sigma}{(\sigma+1)}}\ X_\ell^{-1/\sigma}(x_\ell)\sqrt{\frac{A_\ell X_\ell^{2(\sigma+1)/\sigma}(x_\ell)}{\lvert C_{1\ell}\rvert}+1}$; если взято $A_\ell > 0$, то $X_\ell(0) = X_\ell^o$; X_ℓ^o – любое положительное число; если взято $A_\ell < 0$, то $X_\ell(0) = X_\ell^o$; $0 < X_\ell^o < \left(\frac{\lvert C_{1\ell}\rvert}{\lvert A_\ell\rvert}\right)^{\sigma/[2(\sigma+1)]}$; $C_{1\ell}$ – произвольная отрицательная константа; $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$	$\neq 0$	$\neq 0$

Таблица 2. Точные решения $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} X_i(x_i)$ в стационарном случае

Литература

1. Лейбензон Л.С. Собрание трудов. Т.2. Подземная гидрогазодинамика. М.: изд-во АН СССР, 1953. 544 с.

2. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 2. С. 206–218.

3. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Результаты расчетов // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 3. С. 362–373.

4. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.

5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.

6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 632 с.

7. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 88 с.

Литература

8. Титов С.С., Устинов В.А. Исследование многочленных решений уравнения фильтрации газа с целым показателем адиабаты // Приближенные методы исследования краевых задач механики сплошной среды. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 64–70.

9. Зайцев В.Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1995. 560 стр.

10. Титов С.С. Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств. Екатеринбург: УралГАХА, 1999. 264 с.

11. Vazques J. L. The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford: Calendon Press, 2007.

Спасибо за внимание!