

О двух подходах эффективного понижения размерности для задач переноса теплового излучения в многомерной геометрии

Вершинская А.С., Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А.

Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский НИИ технической физики
им.академ.Е.И.Забабахина

Аннотация

В связи с вычислительной трудоемкостью моделирования задач переноса теплового излучения в кинетической постановке актуальным является вопрос о применении более простых моделей. В 1964 году В.Я.Гольдиным был предложен метод квазидиффузии. За прошедшее время метод развивался и хорошо зарекомендовал себя на практике. В 2010 году М.Ю.Козмановым и Н.Г. Карлыхановым был применен другой подход учета кинетических эффектов. В обоих подходах происходит понижение размерности решаемой задачи за счет снятия зависимости от направлений полета частиц, что в общем случае уменьшает временные затраты. В докладе конспективно рассматриваются оба подхода в многомерном случае. Отмечается, что система уравнений квазидиффузии имеет более сложный вид и создание численных методик с положительными качествами представляет значительные трудности. Изложенные подходы реализованы на основе неявных конечно-разностных схем и итерационных методов, разработанных в РФЯЦ-ВНИИТФ. Приводятся результаты численных расчетов двух тестовых задач для нестационарной системы уравнений переноса теплового излучения в двумерной осесимметричной геометрии.

Ключевые слова: перенос излучения, конечно-разностная схема.

Введение

Математическое моделирование нестационарного переноса теплового излучения в многогрупповой кинетической постановке является весьма трудоемкой вычислительной задачей, поэтому часто желательно использовать более простые приближения. Их можно получить делая некоторые предположения о поведении решения. В свою очередь в каждом конкретном случае возникает вопрос о корректности применения модели. Компромиссом является подход, когда периодически решается кинетическое уравнение и полученные данные используются для уточнения более простой модели. Например, классическим считается метод квазидиффузии (КД) [1], использующий коэффициенты Эддингтона. В работе [2] сотрудниками РФЯЦ-ВНИИТФ предложен несколько другой подход для учета кинетических эффектов в уравнении диффузии, именуемый в дальнейшем квазипереносом (КП). Далее приводится краткий обзор этих подходов и результаты численных расчетов двух тестовых задач.

1. Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение теплового излучения, состоит из спектрального кинетического уравнения переноса, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии среды, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания фотонов веществом [3]. В многогрупповом приближении без учета движения среды для изотропного рассеяния она выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_g}{c \partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Omega} I_g + \alpha_g I_g &= \frac{\alpha_{cg}}{4\pi} B_g + \frac{\alpha_{sg}}{4\pi} U_g, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_g \alpha_{cg} (U_g - B_g) \Delta \varepsilon_g + \rho Q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь g – индекс энергетической группы ($g = 1, \dots, \hat{g}$), ε_g – энергия фотонов группы g , $\Delta \varepsilon_g = \varepsilon_{g+1/2} - \varepsilon_{g-1/2}$, $I_g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ – спектральная интенсивность излучения, $T(\mathbf{r}, t)$ – температура среды, $\alpha_g(T, \rho) = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$ – коэффициент ослабления, $\alpha_{cg}(T, \rho)$ – коэффициент поглощения, $\alpha_{sg}(\rho)$ – коэффициент рассеяния, $E(T, \rho)$ – удельная внутренняя энергия вещества, $B_g(T)$ – интенсивность равновесного излучения (функция Планка), $U_g(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} I_g d\mathbf{\Omega}$ – спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света c , \mathbf{r} – радиус-вектор, $\mathbf{\Omega}$ – единичный вектор в направлении полета фотона, t – время, $\rho(\mathbf{r}, t)$ – плотность вещества, $Q(\mathbf{r}, t)$ – внешний источник.

Для системы уравнений (1.1) в области Γ с замкнутой границей $\bar{\Gamma}$ решается смешанная задача со следующими начальными и граничными условиями

$$I_g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t = 0) = I_g^0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}), \quad I_g(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0, t) = I_g^-(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{\Omega}, t), \quad T(\mathbf{r}, t = 0) = T^0(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к $\bar{\Gamma}$.

Обозначим $\mathbf{S}_g = \int_{\Omega} \mathbf{\Omega} I_g d\mathbf{\Omega}$ – спектральный поток энергии излучения. Проинтегрировав

(1) по $\mathbf{\Omega}$ с весами $1, \mathbf{\Omega}$ получим систему уравнений квазидиффузии

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{c \partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_g + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g, \\ \frac{\partial \mathbf{S}_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{D}_g U_g) + \alpha_g \mathbf{S}_g &= 0, \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_g \alpha_{cg} (U_g - B_g) \Delta \varepsilon_g + \rho Q, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{D}_g = (D_{*,g})$ – тензор квазидиффузионных коэффициентов и в двумерном случае

$$D_{11,g} = U_g^{-1} \int_{\Omega} \Omega_1^2 I_g d\Omega, \quad D_{22,g} = U_g^{-1} \int_{\Omega} \Omega_2^2 I_g d\Omega, \quad D_{12,g} = D_{21,g} = U_g^{-1} \int_{\Omega} \Omega_1 \Omega_2 I_g d\Omega.$$

Соответствующие начальные и граничные условия для $\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}$ имеют вид

$$U_g(\mathbf{r}, t=0) = U_g^0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{S}_g(\mathbf{r}, t=0) = \mathbf{S}_g^0(\mathbf{r}), \quad T(\mathbf{r}, t=0) = T^0(\mathbf{r}), \quad \tilde{\alpha}_g U_g - \tilde{\beta}_g (\mathbf{nS}_g) = \tilde{\varphi}_g.$$

Здесь $\tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_g, \tilde{\varphi}_g$ – параметры граничных условий, причем $\tilde{\alpha}_g \geq 0, \tilde{\beta}_g \geq 0, \tilde{\alpha}_g + \tilde{\beta}_g > 0$.

Положив $D_{12,g} = D_{21,g} = \frac{1}{3}, D_{11,g} = D_{22,g} = \frac{\partial \mathbf{S}_g}{\partial t} = 0$ мы получим хорошо известное

диффузионное приближение. В работе [2] в это уравнение были введены коэффициенты, равные отношению кинетического потока к диффузионному. Таким образом, также используется модифицированный закон Фика

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{c \partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}_g + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g, \\ \mathbf{S}_g &= -(3\alpha_g)^{-1} \mathbf{D}_g \nabla U_g, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$D_{11,g} = -\left(\frac{1}{3\alpha_g} \frac{\partial U_g}{\partial r_1} \right)^{-1} \int_{\Omega} \Omega_1 I_g d\Omega, \quad D_{22,g} = -\left(\frac{1}{3\alpha_g} \frac{\partial U_g}{\partial r_2} \right)^{-1} \int_{\Omega} \Omega_2 I_g d\Omega, \quad D_{12,g} = D_{21,g} = 0.$$

Очевидно, что мы существенно снижаем размерность исходной задачи, что позволяет в общем случае решить ее с меньшими вычислительными затратами.

2. Решение системы разностных уравнений

Для решения (1-3) используются нелинейные неявные конечно-разностные схемы. Кратко рассмотрим их особенности на примере одномерной плоской геометрии в приближении «серой материи». Обозначим $\Delta_{i+1/2}(\bullet) = \bullet_{i+1} - \bullet_i, h, \tau$ – шаги разностной сетки по пространству (индекс i) и времени (индекс n). На кинетическом этапе применяется схема TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction) с ограничителем с предыдущего шага [4,5]. Соотношения связи в рамках ячейки выглядят так

$$I_{* \pm 1/2}^{n+1} = \left(1 \pm \frac{\text{Limiter}(\Delta_{*+1/2} I^n, \Delta_{*-1/2} I^n)}{2I_*^n} \right) I_*^{n+1}.$$

В схеме ГРОМ(Гибридный РОМб) [6,7] применяются соотношения, связывающие S, U в центрах ячеек с их значениями на гранях

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1}}{c\tau} + \Delta_{i+1/2} S^{n+1} + \alpha_c U^{n+1} &= \frac{U^n}{c\tau} + \alpha_c B^{n+1}, \\ \frac{S^{n+1}}{c\tau} + \frac{D_{i+1/2}}{h} \Delta_{i+1/2} U^{n+1} + \alpha S^{n+1} + \Delta_{i+1/2} \frac{D_{i+1/2}}{h} U_h^{n+1} &= \frac{S^n}{c\tau}, \\ U_{i+1/2} &= p_U U_i + (1 - p_U) U_{i+1} + \delta_U \Delta_{i+1/2} S, \\ S_{i+1/2} &= p_S S_i + (1 - p_S) S_{i+1} + \delta_S \Delta_{i+1/2} U, \\ U_{h,i+1/2} &= p_{U_h} U_i + (1 - p_{U_h}) U_{i+1} + \delta_{U_h} \Delta_{i+1/2} S. \end{aligned}$$

Здесь $0 \leq p_* \leq 1$, δ_* – параметры схемы. Для системы КД уравнений нелинейный алгоритм выбора параметров для шестипараметрической схемы ГРОМ обеспечивает выполнение условий устойчивости, положительности и монотонности, по крайней мере, в плоской и сферически-симметричной геометриях [6]. Ранее использовалась двухпараметрическая схема РОМБ [8], которую можно получить положив $p_* = 0.5$, $\delta_{U_h} = 0$. В работе [6] показано, что она может быть неустойчива для квазидиффузии, в P₁-приближении – устойчива, но неположительна и немонотонна, и только для диффузии – всегда устойчива, положительна и монотонна.

Для итерационного решения нелинейных систем КД и КП уравнений применяется адаптированный метод ВДЭПФ [9].

3. Численные расчеты

Рассмотрим два теста в двумерной осесимметричной геометрии. В задачах полагалось $T^0 = 0.001$, $E = 0.81T$, $\rho = 1$, $Q = \alpha_{sg} = 0$. Итерации сводились с точностью до величины 10^{-5} . Кинетическое уравнение решалось на каждом временном шаге один раз методом дискретных ординат по схеме TVDR повышенного порядка аппроксимации с ограничителем Ван Альбада и квадратурой ES_{16} . Цвета на графиках соответствуют: сиреневый – диффузия, зеленый – P₁, черный – кинетическая модель, синий – КД, красный – КП, жирный красный – эталон (решение полученное на подробной сетке).

Задача 1. Для численного моделирования второй задачи из [10] плоский слой заменен на сферу ($100 \leq \mathbf{r} \leq 104$). На нижней границе задано излучение планковского источника единичной температуры, на верхней – условие свободной поверхности, на левой и правой – условия отражения. Коэффициент поглощения

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} 27\varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 100 \leq \mathbf{r} < 102, 102.4 < \mathbf{r} \leq 104, \\ 10000\varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 102 \leq \mathbf{r} \leq 102.4. \end{cases}$$

По энергии бралось 15 групп со следующими значениями в центрах сетки: $\varepsilon_g = 0.15, 0.45, 0.7, 1, 1.35, 1.65, 2.1, 2.55, 2.85, 3.5, 4.5, 6, 8, 10, 13$. Сетка по радиусу неравномерная из 236 ячеек. Расчеты велись до момента времени $t = 0.003$.

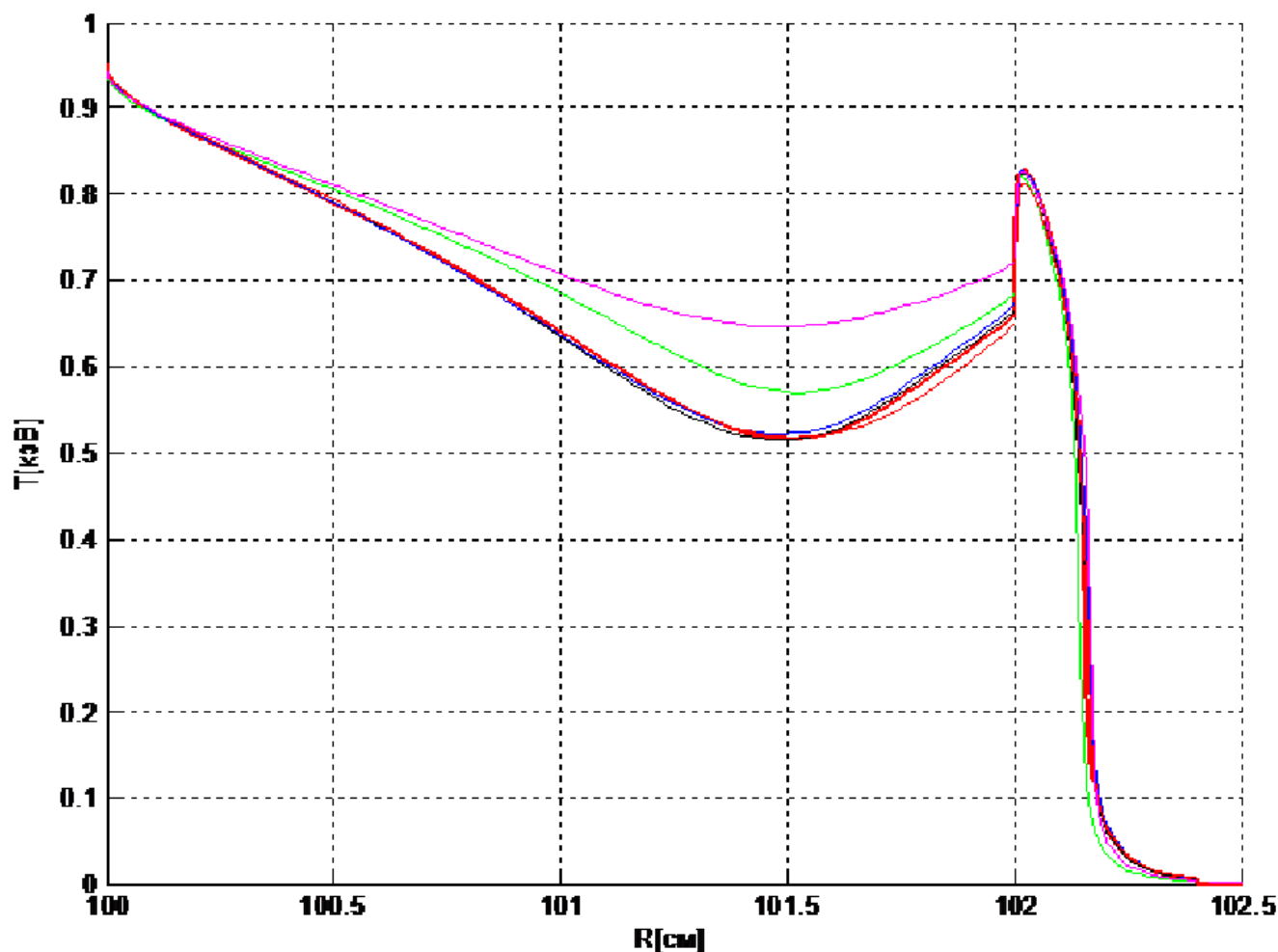


Рис.1. Профили температуры вещества.

На рисунке 1 приведено распределение температуры вещества вдоль центрального канала. В оптически прозрачной области на этапе прогрева наблюдается хорошее согласие кинетической, квазидиффузионной моделей и модели квазипереноса с «точным» решением. Несколько хуже P_1 -приближение. Диффузионная модель показывает плохой результат.

Задача 2. Распространение излучения вдоль оптически прозрачного сферического слоя толщиной ($10 \leq r \leq 12$). Равномерная сетка 50×50 ячеек. Слева на внешней поверхности через щель шириной 3.7 задан входящий поток 1027.5 при $t = [0, 1.8)$, и нулевой поток при $t = (2, 2.2]$. В промежутке $t = [1.8, 2]$ – линейная интерполяция. На остальной части поверхностей сфер задан фоновый поток 0.00001. На оси симметрии – нулевой поток, в

кинетическом уравнении – условие зеркального отражения. Коэффициент поглощения $a = 0.137T^{-3}$.

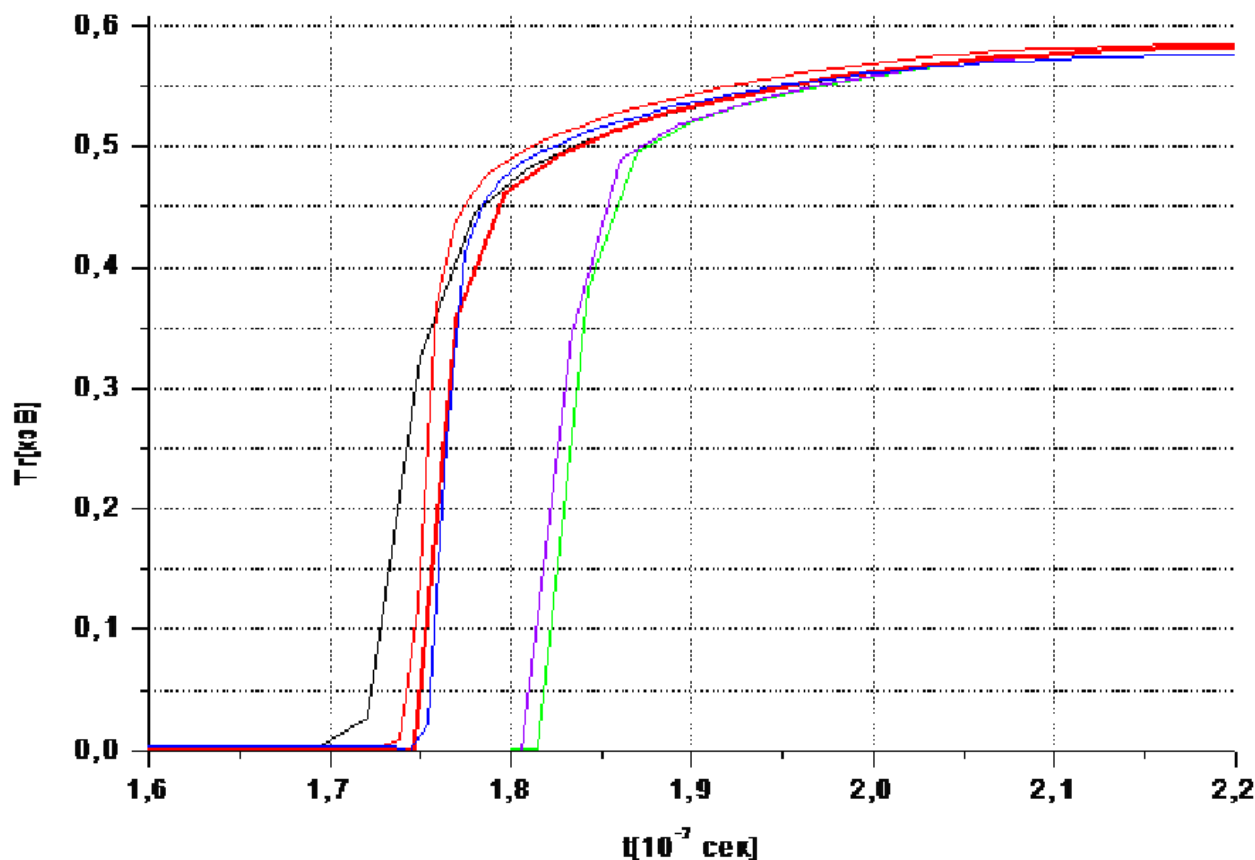


Рис.2. Профили радиационной температуры.

В данной задаче сравнивались температуры и времена прихода тепловой волны в крайней точке у внутренней поверхности сферы. Присутствует удовлетворительное согласие результатов за исключением P_1 -приближения и диффузии. Более того, на данной сетке кинетическая модель выглядит несколько хуже.

Заключение

Для численного решения системы уравнений теплового переноса рассматривается два подхода с близкой идеологией, основанной на эффективном понижении размерности решаемой системы. На первом этапе система решается в кинетической постановке, и насчитываются матрицы безразмерных коэффициентов, характеризующих поведение решения. На втором этапе решается модель значительно меньшей размерности,

скорректированная с учетом предыдущего этапа. Такой подход позволяет не только существенно сократить время расчета, но иногда получать более качественное решение за счет того, что моделирование кинетического уравнения оказывается более требовательным к разностной сетке. В многомерном случае может также уменьшаться лучевой эффект [3]. Однако, в результате, фактически необходима совместная реализация двух моделей, что приводит к заметному усложнению алгоритма и увеличению требуемой памяти. Отметим, что в КД модели коэффициенты ограничены, в частности диагональные по модулю находятся в пределах от 0 до 1, остальные – положительны и меньше или равны 1. Для КП схемы это не так, поэтому нужна некоторая процедура корректировки. Несмотря на это для КД модели построение положительной монотонной схемы представляется более сложной задачей, нежели для КП модели.

Список использованных источников

1. Гольдин В.Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения. ЖВМ и МФ, 1964, т.4, №6, С.1078-1087.
2. Карлыханов Н.Г., Козманов М.Ю. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения, ВАНТ, Серия «Математическое моделирование физических процессов», 2010, вып.4, С.3-9.
3. Четверушкин Б.Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985.
4. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS_n методу решения уравнения переноса теплового излучения, ВАНТ, Серия «Математическое моделирование физических процессов», 2009, вып.2, С.37-48.
5. Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS_n методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ геометрии, Там же, 2010, вып.2, С.30-39.
6. Грабовенская С.А., Шестаков А.А. Анализ некоторых схем для решения уравнения переноса излучения квазидиффузионным методом. Там же, 2011, вып.4, С.3-15.
7. Грабовенская С.А., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Конечно-разностная схема ГРОМ для решения двумерной квазидиффузионной системы переноса теплового излучения, Там же, 2014, вып.3, С.47-58.
8. Гаджиев А.Д., Селезнев В.Н., Романова Е.М., Шестаков А.А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении, Там же, 2001, вып.4, С.48-59.

9. Гаджиев А.Д., Шестаков А.А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме РОМБ, Там же, 2006, вып.1, С.3-13.
10. Fleck J.A., Cummings J.D. An Implicit Monte-Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport, J.C.P., 1971, Vol.8(3), P.313-342.