



РОСАТОМ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ КОРПОРАЦИЯ ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ «РОСАТОМ»

Настройка параметров k-ε модели турбулентности для описания эксперимента по взаимодействию ударной волны с турбулизированным слоем

М.И. Болдырев, И.В.Глазырин, Н.А.Михайлов

Российский Федеральный Ядерный Центр - ВНИИ Технической Физики
им. акад. Е.И. Забабахина, Россия, Снежинск





Цели работы

При прохождении ударной волны в газовой фазе через границу двух веществ разной плотности развивается неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, которая приводит к интенсивному перемешиванию этих веществ.

Данный процесс можно моделировать с помощью специальных моделей турбулентности, которые учитывают гравитационный генерационный член, например в уравнениях k-ε модели:

$$G_b = \overline{u'' \cdot \vec{\nabla} p}$$

В ходе работы решались следующие задачи:

1. Добавление в модель многофазной газодинамики k-ε модели турбулентности
2. Расчёт экспериментов, наблюдавших неустойчивость Рихтмайера-Мешкова с целью воспроизвести ширину зоны перемешивания.



Модель газовой динамики

Дополненная система уравнений для многофазной системы, реализованная в программе Фокус*:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_m \cdot \alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_m \cdot \alpha_i \cdot \vec{u}_m) = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \vec{J}_i$$

$$\frac{\partial(\alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \cdot \vec{u}_m) = \alpha_i \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_m \cdot \vec{u}_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_m \cdot \vec{u}_m \otimes \vec{u}_m) + \vec{\nabla} \overline{P}_m = -\vec{\nabla} \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{\rho}_m \cdot k \right) + \nabla \cdot \tau_d + \nabla \cdot \vec{\Omega}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}_m \cdot \{E_m\})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho}_m \cdot \{E_m\} \cdot \vec{u}_m) + \nabla \cdot (P_m \cdot \vec{u}_m) = -\nabla \cdot (\overline{p} \cdot \vec{u}''_m - \vec{\Omega} \cdot \vec{u}''_m) + \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{u}_m)$$

$$+ \nabla \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{u}_m) + \nabla \cdot \left((\overline{\lambda} + \lambda_i) \cdot \vec{\nabla} \overline{T} + \frac{\mu_i}{\sigma} \cdot \vec{\nabla} e \right) + \nabla \cdot ((\overline{\mu} + \mu_i) \cdot \vec{\nabla} k) + \nabla \cdot \overline{H}$$

*Н. А. Михайлов, И. В. Глазырин, Метод укручения контактных границ для моделирования трёхмерных многофазных сжимаемых течений в эйлеровых переменных. Забобахинские научные чтения: Сборник тезисов XIII Международной конференции 20-24 марта 2017, Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, с. 326, 2017



Модель турбулентности

k-ε модель, предложенная в работах J. T. Moran-Lopez и O. Schilling* для ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМ:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \cdot k \cdot \vec{u}_m) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \cdot \vec{\nabla} k \right) = \tau_d : \vec{\nabla} \vec{u}_m - \vec{u}_m'' \cdot \vec{\nabla} \bar{p} + \vec{u}_m'' \cdot \nabla \cdot \bar{\Omega} - \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot k \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m - (1 + M_t^2) \cdot \bar{\rho} \cdot \varepsilon + \Pi_k$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \vec{u}_m) - \nabla \cdot \left(\left(\bar{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \cdot \vec{\nabla} \varepsilon \right) = C_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \tau_d : \vec{\nabla} \vec{u}_m - C_{0\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \vec{u}_m'' \cdot \vec{\nabla} \bar{p} + C_{0\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \vec{u}_m'' \cdot \nabla \cdot \bar{\Omega} - C_{3\varepsilon} \cdot \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \varepsilon \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m - C_{2\varepsilon} \cdot \bar{\rho} \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{4\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \Pi_k$$

*J. T. Moran-Lopez, O. Schilling, Multi-component Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations of Richtmyer-Meshkov instability and mixing induced by reshock at different times, Shock Waves, 2014, Vol. 24(3), pp. 325-343

Разделение на физические процессы





Уравнения Эйлера

Сначала решается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m} \cdot \alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot \alpha_i \cdot \vec{u}_m) = 0$$

$$\frac{\partial(\alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \cdot \vec{u}_m) = 0$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m} \cdot \vec{u}_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot \vec{u}_m \otimes \vec{u}_m) + \nabla \overline{P}_m = -\nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{\rho_m} \cdot k \right)$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m} \cdot E_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot E_m \cdot \vec{u}_m) + \nabla \cdot (\overline{P}_m \cdot \vec{u}_m) = -\nabla \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \overline{\rho_m} \cdot k \cdot \vec{u}_m \right)$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m} \cdot k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot k \cdot \vec{u}_m) = 0$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m} \cdot \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot \varepsilon \cdot \vec{u}_m) = 0$$

При допущении о
равносжимаемости фаз:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i^*}{\sum_j \alpha_j^*}$$

α_i^* - объёмная доля,
полученная при
решении системы
уравнений Эйлера.

ОДУ источников k и ε



Далее решаются уравнения для k и ε , в которых учитываются только источники:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot k)}{\partial t} = \tau_d : \vec{\nabla} \vec{u}_m - \vec{u}_m'' \cdot \vec{\nabla} \bar{\rho} + \vec{u}_m'' \cdot \nabla \cdot \bar{\Omega} -$$
$$-\frac{2}{3} \cdot \rho \cdot k \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m - (1 + M_t^2) \cdot \rho \cdot \varepsilon + \Pi_k$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \cdot \varepsilon)}{\partial t} = C_{1\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \tau_d : \vec{\nabla} \vec{u}_m - C_{0\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \vec{u}_m'' \cdot \vec{\nabla} \bar{\rho} + C_{0\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \vec{u}_m'' \cdot \nabla \cdot \bar{\Omega} -$$
$$-C_{3\varepsilon} \cdot \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m - C_{2\varepsilon} \cdot \rho \cdot \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{4\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \Pi_k$$



Прочие потоки

Остаются уравнения диффузии:

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot k})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\left(\overline{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \cdot \vec{\nabla} k \right)$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \varepsilon})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\left(\overline{\mu} + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \cdot \vec{\nabla} \varepsilon \right)$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \vec{u}_m})}{\partial t} = \nabla \cdot (\tau_d + \overline{\Omega})$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \{E_m\}})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\overline{p \cdot \vec{u}_m} - \overline{\Omega \cdot \vec{u}_m}) + \nabla \cdot (\tau_d \cdot \vec{u}_m) + \nabla \cdot (\overline{\Omega \cdot \vec{u}_m}) + \nabla \cdot \overline{H}$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \tilde{e}_m})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_t}{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \tilde{e} \right)$$

$$\frac{\partial \tilde{e}_m}{\partial T} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = \nabla \cdot ((\overline{\lambda} + \lambda_t) \cdot \vec{\nabla} \overline{T})$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \omega_i})}{\partial t} = \nabla \cdot (\overline{J} + \vec{J}_t)$$



Замыкание модели

$$\mu_t = C_\mu \cdot \overline{\rho_m} \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad \lambda_t = C_p \cdot \frac{\mu_t}{\sigma}$$

$$\tau = -\frac{2}{3} \cdot \overline{\rho_m} \cdot k + \tau_d$$

$$\tau_d = \mu_t \cdot \left(\overline{\nabla \tilde{u}} + \overline{\nabla \tilde{u}^T} - \frac{2}{3} \cdot \nabla \cdot \tilde{u} \cdot I \right)$$

$$M_t^2 = \frac{2 \cdot k}{a^2}$$

$$\overline{J}_i + J_t^i = \left(\overline{\rho_m} \cdot \frac{6}{5} \cdot \overline{v}_i + \frac{\mu_t}{\sigma} \right) \cdot \overline{\nabla} \omega_i$$

$$\overline{H} = \sum_i \overline{h}_i \cdot (\overline{J}_i + J_t^i)$$

$$\overline{h}_i \approx \overline{e}_i^\alpha + \frac{\{\alpha_i\} \cdot \overline{p}}{\{\omega\}_i \cdot \{\rho\}}$$



Замыкание модели

Аппроксимация флуктуации скорости:

$$\overline{u''} = \frac{\mu_t}{\rho \cdot \sigma_\rho} \cdot \left(\frac{\nabla \overline{\rho}}{\overline{\rho}} - \frac{\nabla \overline{p}}{\overline{p}} \right)$$

Корреляция флуктуаций давления и растяжения:

$$\Pi_k = \overline{p' \cdot \nabla \cdot \vec{u}'} = M_t^2 \cdot \left(-\alpha_2 \cdot \left(\tau : \vec{\nabla} \vec{u} - \frac{2}{3} \cdot \overline{\rho} \cdot k \cdot \nabla \vec{u} \right) + \alpha_3 \cdot \overline{\rho} \cdot \varepsilon \right)$$

Константы:

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma = 0.5; \quad \sigma_\rho = 0.76; \quad C_{0\varepsilon} = 0.84;$$

$$C_{1\varepsilon} = 1.44; \quad C_{2\varepsilon} = 1.92; \quad C_{3\varepsilon} = 2.; \quad C_{4\varepsilon} = 1.1$$

$$\alpha_2 = 0.4; \quad \alpha_3 = 0.2.$$

Связь объёмной и массовой доли



Уравнение адвекции решается относительно объёмных долей:

$$\frac{\partial(\rho_m \cdot \alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \cdot \alpha_i \cdot \vec{u}_m) = 0; \quad \frac{\partial(\alpha_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_i \cdot \vec{u}_m) = \alpha_i \cdot \nabla \cdot \vec{u}_m$$

Уравнение диффузии – относительно массовых:

$$\frac{\partial(\overline{\rho_m \cdot \omega_i})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\overline{\rho_m} \cdot \frac{6}{5} \cdot \vec{v}_i + \frac{\mu_i}{\sigma} \right) \cdot \vec{\nabla} \omega_i$$

После решения уравнений третьего этапа известны лишь усреднённые температура и давление смеси:

$$\rho_i^\alpha = f(p_m^*, T_m^*)$$

Тогда объёмные доли веществ на новом временном слое будут определены:

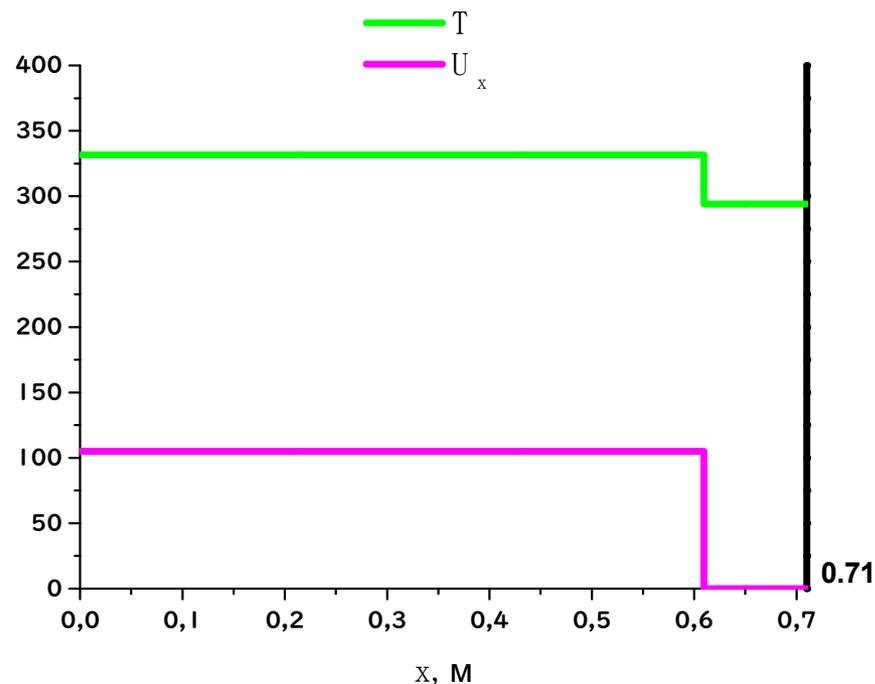
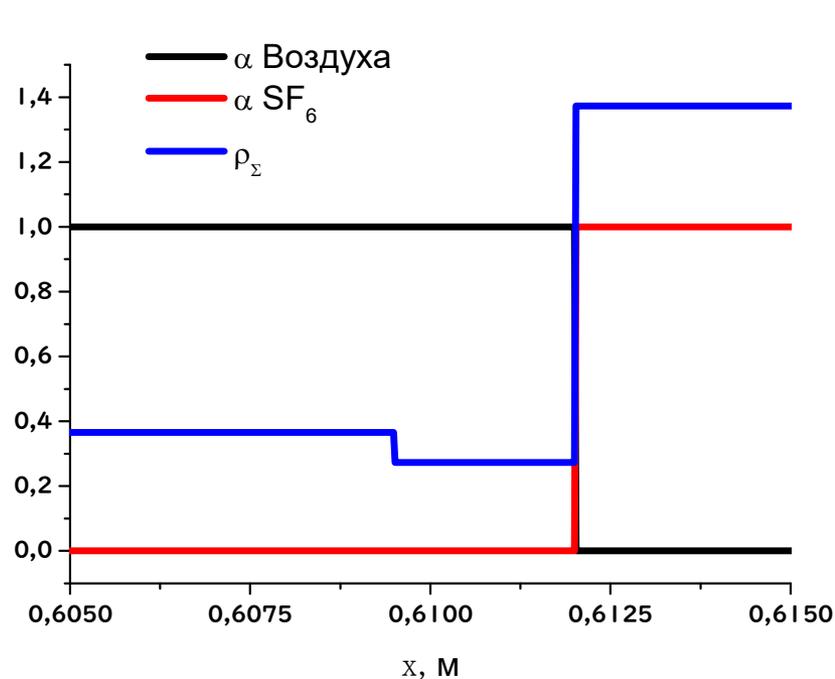
$$\alpha_i = \frac{\rho_i^\alpha}{\rho_m \cdot \omega_i}$$

После этого переопределяются давление смеси и температуры фаз.

Сравнение с экспериментом



Сравнение проводилось с экспериментом E. Leinov* и др.



*E. Leinov, G. Malamud, Y. Elbaz, L. A. Levin, G. Ben-Dor, D. Shvarts, O. Sadot, Experimental and numerical investigation of the Richtmeyer-Meshkov instability under re-shock conditions, J. Fluid Mech., 2009, Vol. 626, pp. 449-475

Сравнение с экспериментом



Были проведены одномерные расчёты для четырёх вариантов эксперимента. Начальные распределения задавались следующим образом:

- Давление в системе – 23 кПа.
- Температура в системе – 294 К.
- Плотности воздуха и гексафторида серы при этих условиях – 0.2729 кг/м³ и 1.3738 кг/м³ соответственно.
- Расстояние до стенки бралось равным 9.8, 13.2, 17.7 и 19.9 см.
- Газы рассматривались как идеальные с изохорными теплоёмкостями:

$$C_V^{air} = 717.1 \text{ Дж/кг}$$

$$C_V^{SF_6} = 605.6 \text{ Дж/кг}$$

- Свойства за ударной волной соответствуют числу Маха 1.2:

$$\bar{\rho}_0 = 0.366 \text{ кг/м}^3$$

$$\bar{p}_0 = 34806 \text{ Па}$$

$$\vec{u}_0 = (104.96; 0; 0) \text{ м/с}$$

Сравнение с экспериментом



Начальные распределения k и ε задавались постоянными по всей системе по следующим выражениям:

$$k_0 = K^0 \cdot (\tilde{u}_0 \cdot At)^2 = 495 \text{ м}^2/\text{с}^2$$

$$\varepsilon_0 = k_0 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda_{rms}} \cdot |At| \cdot \tilde{\Delta u} = 5.83 \cdot 10^7 \text{ м}^2/\text{с}^3$$

$$At = \frac{\rho_{SF_6} - \rho_a}{\rho_{SF_6} + \rho_a} = 0.67; \quad \tilde{\Delta u} = (69.5; 0; 0)$$

$$\lambda_{rms} = 0.0025 \text{ м}; \quad K^0 = 0.1$$

λ_{rms} – параметр порядка средней длины волны возмущений на контактном разрыве, Δu – скачок скорости при прохождении ударной волны, определяется из предварительного расчёта.

$$\tau_d = 0$$

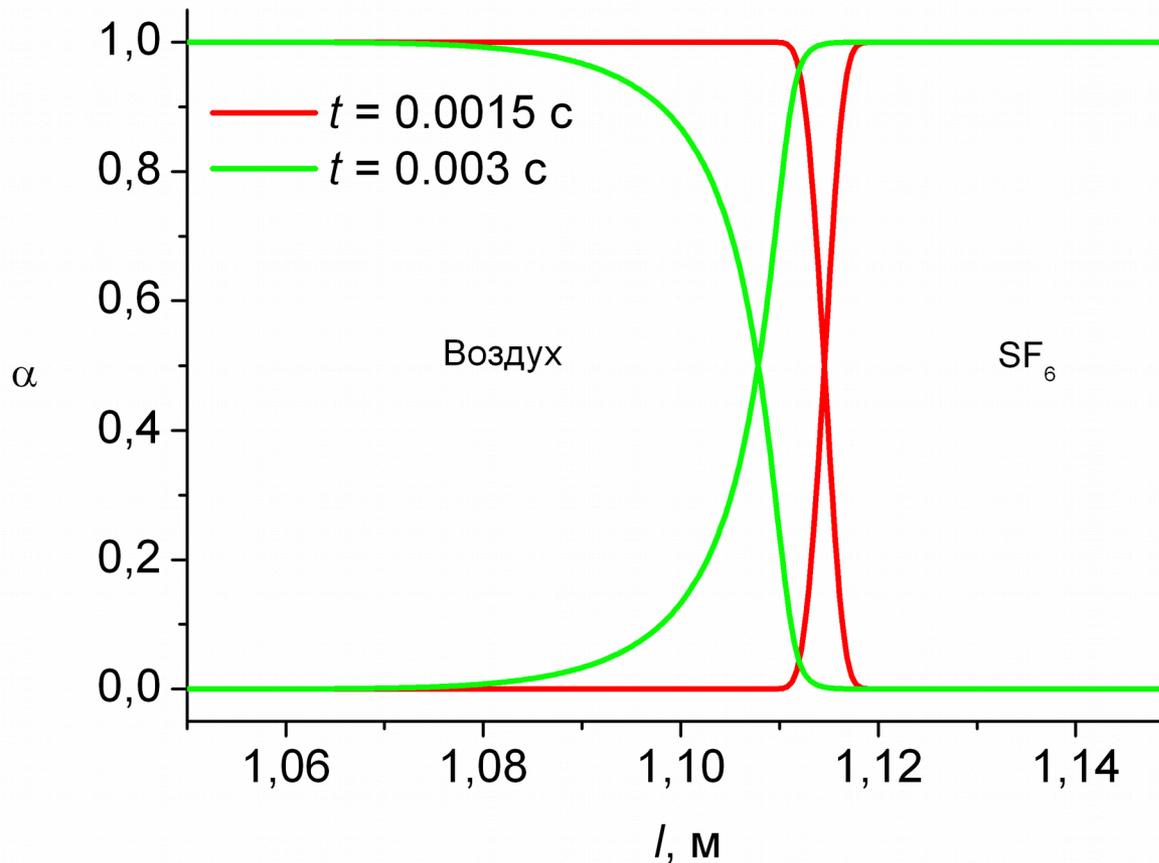
$$\delta = l_{x=0.01}^a - l_{x=0.99}^a$$

Ширина зоны перемешивания определялась как расстояние между точками с объёмной (мольной) долей воздуха 1% и 99%.

Сравнение с экспериментом



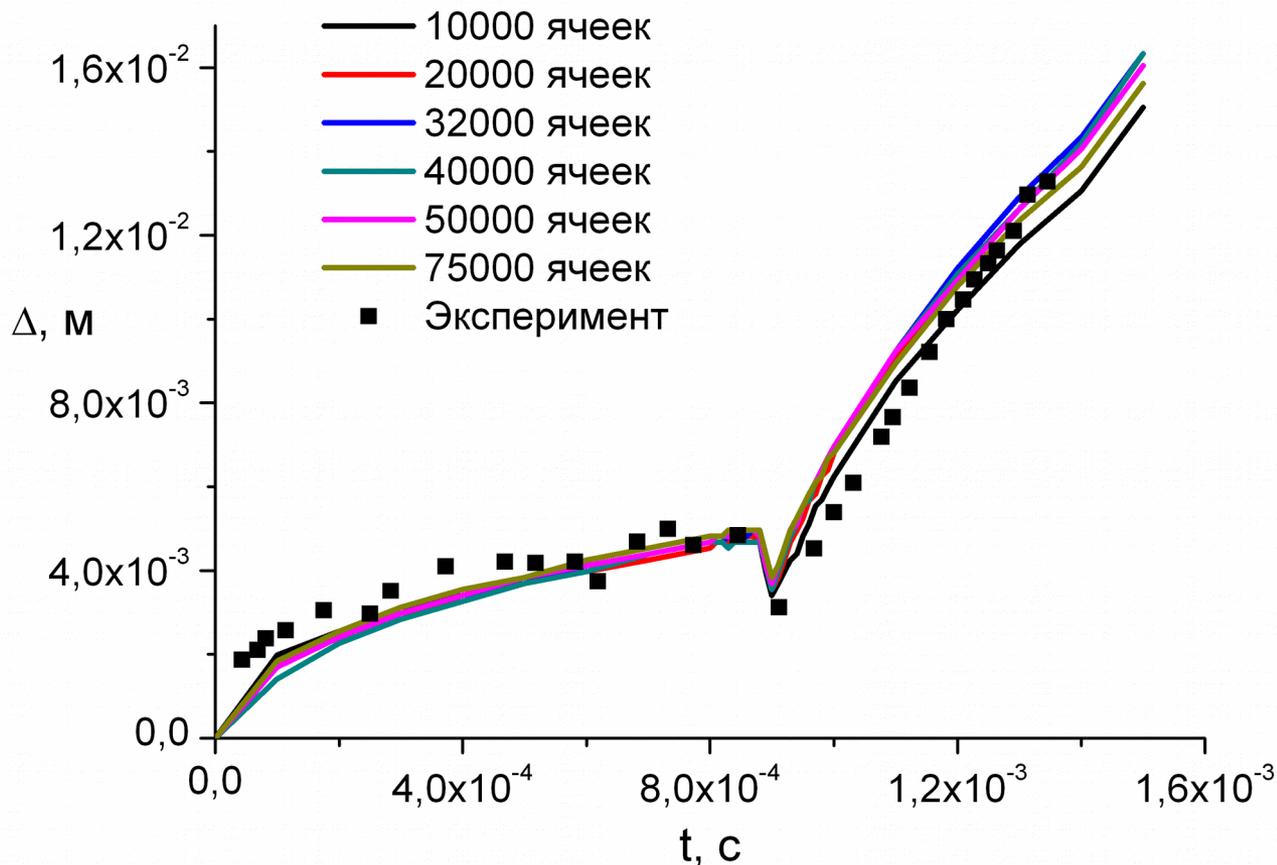
Пример профилей объёмных долей:



Сравнение с экспериментом



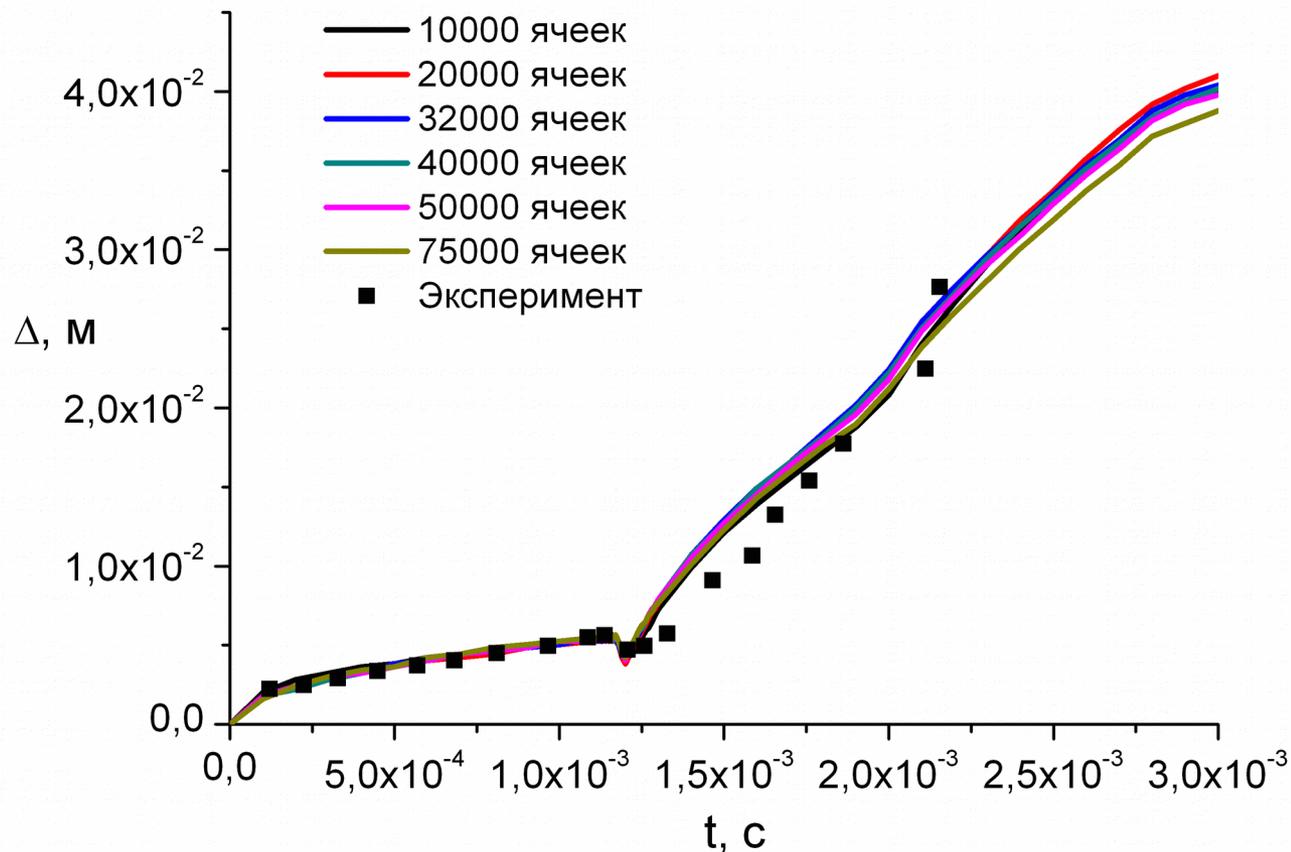
Эксперимент с расстоянием до стенки 9.8 см:



Сравнение с экспериментом



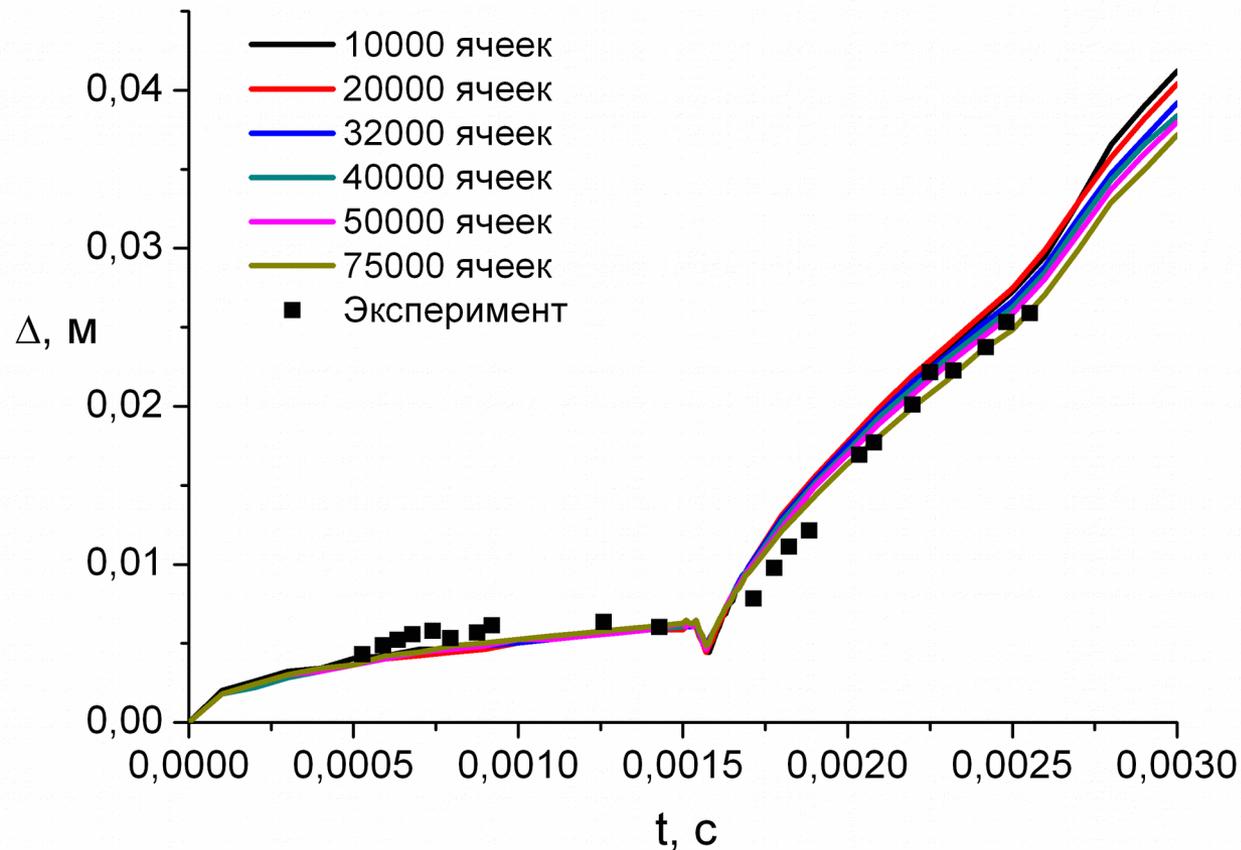
Эксперимент с расстоянием до стенки 13.2 см:



Сравнение с экспериментом



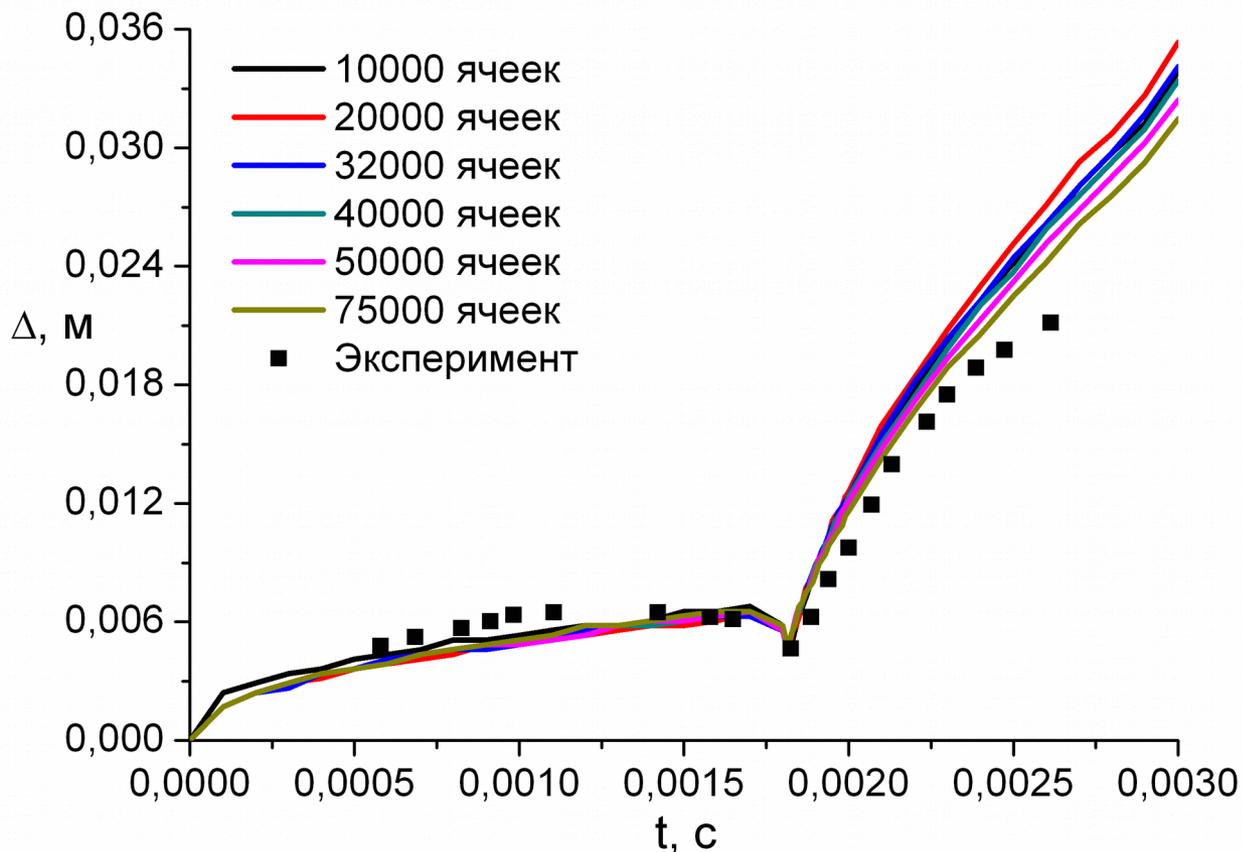
Эксперимент с расстоянием до стенки 17.7 см:



Сравнение с экспериментом



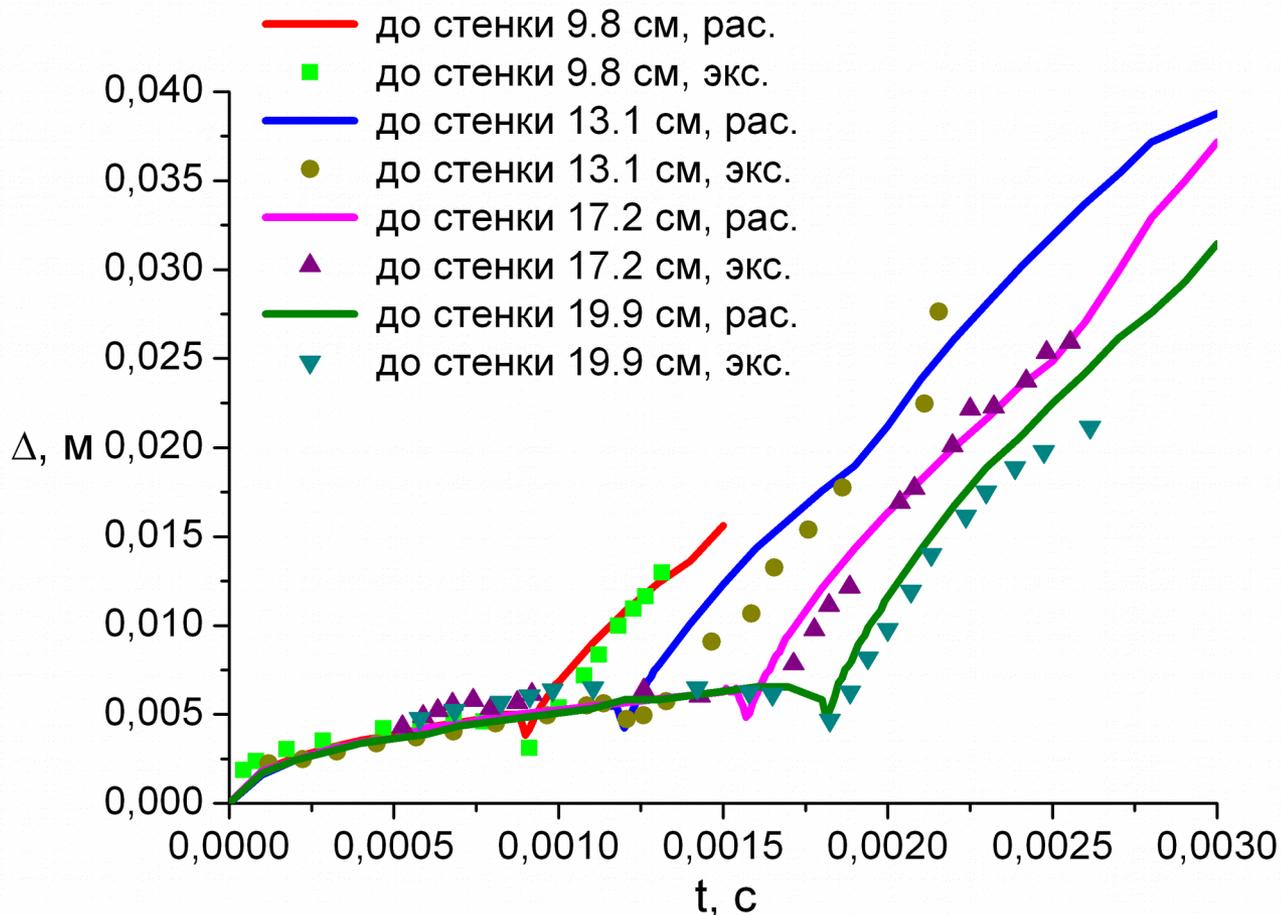
Эксперимент с расстоянием до стенки 19.9 см:



Сравнение с экспериментом



Сравнение с экспериментом для всех случаев, 75000 ячеек:



Заключение



- Была реализована k - ϵ модель турбулентности и предложена её параметризация.
- С помощью модели проведены одномерные расчёты развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова при 1.2 Маха.
- Достигнуто хорошее согласие с экспериментом по ширине зоны перемешивания на этапе до прихода отражённой ударной волны. Ширина зоны перемешивания после отражённой ударной волны описывается удовлетворительно.



Спасибо за внимание!



Численная схема

Аппроксимация производной по времени – схема Эйлера:

$$\frac{\bar{\rho}^j \cdot y^{j+1} - \bar{\rho}^j \cdot y^j}{\Delta t}$$

Аппроксимация дивергенций и градиентов – теорема Гаусса-Остроградского:

$$\nabla \varphi_i = \frac{1}{V_i} \cdot \int_s \varphi \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{V} \cdot \sum_j \int_s \varphi \cdot \vec{n}_j \cdot dS_j = \frac{1}{V} \cdot \sum_j \varphi_j^e \cdot S_j \cdot \vec{n}_j$$

Аппроксимация значений в центрах граней – линейная:

$$\varphi_j^e = \sigma_j \cdot \varphi_P + (1 - \sigma_j) \cdot \varphi_N$$

$$\sigma_j = \frac{\vec{n}_j \cdot \vec{d}_P}{\vec{n}_j \cdot (\vec{d}_P + \vec{d}_N)}$$