ОДНОСЛОЙНЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ В ЗАДАЧАХ АППРОКСИМАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. В. Орлов[1], *Е. И. Несмиянов*[1, 2]

[1]ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

[2]Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

Развитием теоремы Колмогорова [1] о разложении многомерных непрерывных функций в сумму суперпозиций одномерных функций стала теорема Цыбенко [2] о плотности в пространстве непрерывных функций множества функций, представимых однослойной нейронной сетью. Такие KAN-функции [3] являются суммой параметризованных сигмоидальных преобразований одномерных линейных функций. В рамках исключительного уровня программной поддержки нейронных сетей появилась возможность создания высокоэффективных программ аппроксимации многомерных функций и границ областей в виде конечной суммы простых бесконечно гладких функций, включая потенциалы уравнений состояния и решения задач математической физики.

Для решения таких задач разработаны высокоэффективные программы на языке Python, для тензорного модуля torch [4]. В этом модуле имеется ряд программ стохастического градиентного спуска [5] для поиска десятков, сотен и даже тысяч параметров минимума функционала невязки. Наличие в модуле автоматического дифференцирования этого функционала по поисковым параметрам и возможности тензорной алгебры позволяют записать задачу минимизации в виде нескольких коротких строк. Программы по заявке .cuda() выполняются на видеокарте RTX3070 фирмы Nvidia с CUDA практически за несколько минут.

В качестве примера решения задачи математической физики в виде многомерной KAN-функции не сеточными методами, без сеточного дифференциала рассмотрена первая задача Дирихле для эллиптического уравнения. Задача разбивается на сумму решений задачи Пуассона и задачи Лапласа с краевым условием в виде разности заданных краевых условий и краевых условий, остающихся от решения задачи Пуассона. Предлагаемая методика легко решает очень трудную для сеточных методов эллиптическую задачу с произвольной формой области.

Вычисление нормальных граничных производных KAN-поверхности промежуточного решения уравнения Лапласа в произвольной точке границы области задачи, аппроксимированной KAN-функцией, элементарно записывается в тензорном виде. Это дает возможность без обычных сложностей написать простую программу решения задачи Неймана для произвольной формы области. Полученное решение в виде бесконечно гладкой KAN-функции допускает удобную и эффективную дальнейшую обработку и использование.

Так, аналитическое решение задачи Лапласа в квадратной области с линейными краевыми условиями, порожденными плоским решением, описывается суммой бесконечных рядов Фурье и любые конечные суммы этих рядов имеют явление Гиббса на углах области, которое отсутствует у KAN-решения этой задачи, описывающей плоскость с очень высокой точностью.

Литература

1. **Колмогоров, А. Н.** О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного [Текст] // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114. – С. 953–956.
2. **Cybenko, G. V.** Approximation by Superpositions of Sigmoidal function [Text] // Mathematics of Control Signals and Systems. – 1989. – Vol. 2. – P. 303–314.
3. **Ziming, L.** KAN: Kolmogorov-Arnold Networks [Text] / L. Ziming et al. // Proceedings of the Thirteenth International Conference on Learning Representations, 2025.
4. https://github.com/torch/torch7/wiki/Cheatsheet, http://torch.ch/docs/package-docs.html.
5. Kingma Diederik, Jimmy Adam: A method for stochastic optimization // arXiv:1412.6980, 2014.