ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ И ДАВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ КВАДРАТНОГО И КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Е. А. Журавлев, Р. Н. Садыков, М. А. Захаров, К. Е. Бартош, Н. Р. Садыков

ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, Россия

E-mail: n.r.sadykov@rambler.ru

Исходя из условия зависимости вязкости от давления при гидродинамическом движении сыпучего материала (СМ) получена зависимость скорости υ_z от поперечной координаты в вертикальной трубе квадратного и круглого сечения. Для этого экспериментально определена величина массового расхода СМ в трубе. Показано, что для определения зависимости давления р от вертикальной координаты *z* необходимо рассмотреть задачу стационарного движения СМ по наклонной плоскости. Полученные экспериментальные результаты подтверждают расчетно-теоретические результаты. Задача движения СМ является актуальной. Закономерности такого движения проявляются при возникновении и движения снежных лавин; при погрузке строительных материалов фиксированной массы через конические бункеры [1]. В докладе [2, 3] предложено, что вязкость СМ зависит от гидростатического давления $\eta(z) = Kp(z)$ в СМ, где $K = \mathrm{const}$. В этом случае симметричный бесследовой тензор вязких напряжений второго ранга размерности три будет иметь вид [4]

$$\sigma_{ij} = \eta\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\upsilon_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k}\right), \quad \sigma_{ii} = 0 \leftrightarrow \sum\nolimits_{i=1}^{3}\sigma_{ii} = 0, \tag{1}$$

где δ_{ij} – дельта-Кронекера, e_{ijk} – антисимметричный тензор Леви-Чивита ранга три; тензор напряжений не содержит симметричный $\sigma_{ij}^{(1)}$ и антисимметричный $\sigma_{ij}^{(2)}$ тензоры второго ранга

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \eta_1\delta_{ij}\partial\upsilon_k/\partial x_k = \eta_1\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\upsilon = 0, \quad \sigma_{ij}^{(2)} = \eta_2\left(\partial\upsilon_i/\partial x_j - \upsilon_j/\partial x_i\right) = \eta_2 e_{ijk}\left(\mathrm{rot}\,\upsilon\right)_k = 0. \tag{2}$$

С учетом вязкой силы, несжимаемости СМ $\rho = \mathrm{const}$ $\left(\mathrm{div}\,\upsilon = \partial\upsilon_k/\partial x_k = 0\right)$, силы тяжести и перепада давления запишем в стационарном случае уравнение Навье-Стокса [4]

$$\rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_i}\right)\right\} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g\delta_{i3}, \tag{3}$$

где δ_{ik} – дельта-символ Кронекера, *i*, *k* = 1, 2, 3. Исходя из метода разделения переменных, в стационарном случае из уравнения (3) следуют уравнения для скорости $\upsilon_z(x, y)$ и давления $p(z)$ СМ при $\eta = Kp$ в длинной вертикальной трубе квадратного и круглого сечения

$$\Delta_\perp\upsilon_z = \left(\rho g + \mathrm{d}p/\mathrm{d}z\right)/\left(Kp\right) = \alpha, \quad p\left(z = H_0\right)\Big|_{t=0} = p_0, \tag{4}$$

z – вертикальная, а *x*, *y* (или *r*) – поперечные координаты, соответственно, H_0 – высота столба СМ при *t* = 0; $\alpha = \mathrm{const}$; $-h/2 \le x \le h/2$, $-h/2 \le y \le h/2$, $0 \le r \le R$; $\Delta_\perp$ – лапласиан в декартовой или цилиндрической система; $p_0 = \mathrm{const}$; уравнение $\Delta_\perp\upsilon_z = \alpha$ – это уравнение Лапласа; для вертикальной скорости выполняется на границе труб первое краевое условие. Из (4) следует, во-первых, решение для *p* в столбе СМ

$$p(z) = \rho g/(K\alpha) + \left[p_0 - \rho g/(K\alpha)\right]\exp\left\{K\alpha\left[z - H_0\right]\right\}, \quad 0 \le z \le H. \tag{5}$$

Решение для скорости в вертикальной трубе квадратного сечения в [5] представлено в виде суммы двух функций $\upsilon_z(x,y)=\upsilon_z^{(1)}(x,y)+\upsilon_z^{(2)}(x,y)$, где $\Delta_\perp\upsilon_z^{(1)}=\alpha$ (см. (4)), $\Delta_\perp\upsilon_z^{(2)}=0$. В результате получим решение

$$\upsilon_z\left(x=\pm\frac{h}{2}, y=\pm\frac{h}{2}\right)=0,\ \upsilon_z^{(1)}=\frac{\alpha}{4}\left(x^2+y^2\right)+\Lambda;\ \upsilon_z(r)=\alpha\left(r^2-R^2\right)\Big/4;\ \upsilon_z(r=R)=0,$$

$$\upsilon_z^{(2)}\left(x, y=\pm\frac{h}{2}\right)=-\upsilon_z^{(1)}\left(x, y=\pm\frac{h}{2}\right)\text{ или }\upsilon_z^{(2)}\left(x=\pm\frac{h}{2}, y\right)=-\upsilon_z^{(1)}\left(x=\pm\frac{h}{2}, y\right),\qquad (6)$$

где $\Lambda=\text{const}$. Решение для $\upsilon_z^{(2)}$ будем искать в виде суммы ряда произведения функции косинуса на гиперболический синус, в результате чего удовлетворим условиям для $\upsilon_z^{(2)}$ из (4).

На рис. 2 приведена расчетная зависимость продольной компоненты скорости $\upsilon_z(x,y)$ сыпучего материала в трубе квадратного сечения от x, y. Для определения двух неизвестных коэффициентов α и K в (4) необходимо два условия. Первое условие – сравнить экспериментальную величину массового расхода $\mathcal{M}_{\text{экс}}^{(1)}$ с расчетной $\mathcal{M}_{\text{рас}}^{(1)}$ и вычислить α из (4)

$$\mathcal{M}_{\text{рас}}^{(1)}=\rho\iint\upsilon_z(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\qquad (7)$$

Второе условие можно получить, если при стационарном движении СМ по наклонной плоскости рассчитать скорость СМ и вычислить величина массового расхода

$$\upsilon_1(x_3)=(x/K)\tan\theta,\quad \mathcal{M}_{\text{рас}}^{(2)}=\rho\frac{H^2\tan\theta}{2K}.\qquad (8)$$

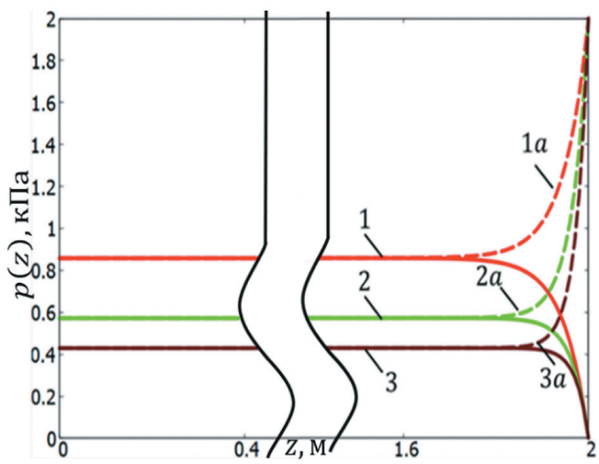

Рис. 1. Зависимость давления от глубины слоя z СМ при $H = 2$ м

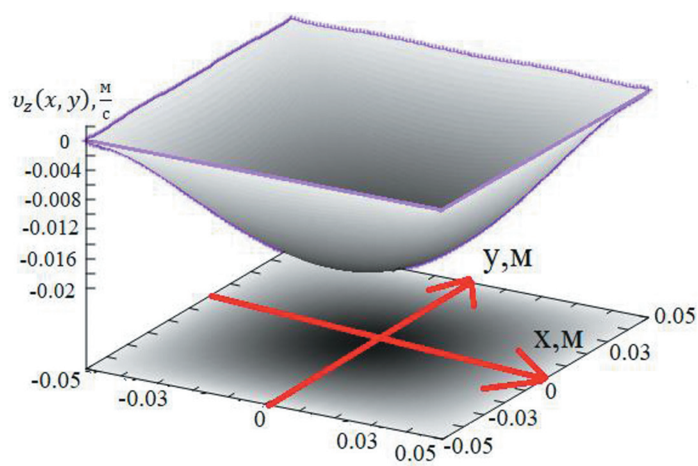

Рис. 2. Распределение продольной компоненты скорости сыпучего материала в трубе квадратного сечения

Пусть угол наклона плоскости θ. Пусть оси координат OX и OY лежат в плоскость движения СМ, а ось OZ – перпендикулярно плоскости движения.

Теперь если определить массовый расход экспериментально при движении СМ по наклонной плоскости, то мы с учетом (8) можем вычислить величину K.

Зная величины K и α, мы можем рассчитать в соответствии с (5) распределение давления.

Литература

1. **Шваб, А. В.** Моделирование гидродинамики высококонцентрированной гранулированной среды в смесительном бункере [Текст] / А. В. Шваб, А. А. Марценко, М. С. Марценко // Вестник Томс. Гос. Университета: Математика и механика. – 2013. – № 4(24). – С. 127–132.
2. **Садыков, Н. Р.**, Бартош К. Е., Журавлев Е. А., Захаров М. А., Садыков Р. Н. // Сборник тезисов V Молодежной научно-технической конференции «Исследования. Технологии. Развитие». – Снежинск, 2024. – С. 13.
3. **Бартош, К. Е.**, Садыков Н. Р., Журавлев Е. А., Захаров М. А., Садыков Р. Н. // Сборник тезисов V Молодежной научно-технической конференции «Исследования. Технологии. Развитие». – Снежинск, 2024. – С. 36.
4. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика : учеб. пособие. Т. VI. Гидродинамика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 736 с.
5. **Будак, Б. М.** Сборник задач по математической физике [Текст] : учеб. пособие / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М. : Наука, 1980. – 688 с.
6. **Вахрамеев, Ю. С.** Некоторые соотношения подобия для движения сыпучей уплотняющейся среды [Текст] // Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34. – Вып. 5.