

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА АДАПТИВНО-ВСТРАИВАЕМЫХ СЕТКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Н. Н. Веселова, С. Н. Лебедев

ФГУП «РФЯЦ – ВНИИТФ им. академ. Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В результате неявной разностной аппроксимации уравнения теплопроводности на нерегулярную сетку получается система линейных алгебраических уравнений [1], которую решают обычно одним из итерационных методов. Поскольку итерационные методы достаточно дорогие и занимают существенную долю времени решения задачи, в последнее время идет поиск более экономичных методов.

При решении уравнения теплопроводности на адаптивно-встраиваемых сетках удалось построить экономичную разностную схему, в которой для решения разностной системы уравнений применен метод прогонки.

Двумерное уравнение лучистой теплопроводности аппроксимируется в соответствии с идеологией схемы «Ромб» [2]. Полученная разностная схема аппроксимирует исходные уравнения в пределах одной сеточной ячейки адаптивно-встраиваемой сетки. Двумерные разностные уравнения решаются с использованием метода расщепления, сводя двумерную задачу к ряду более простых одномерных задач, но на нерегулярной сетке. Пример сеточной структуры, для которой необходимо решать системы одномерных разностных уравнений, приведен на рис. 1. Для решения полученных СЛАУ на адаптивно-встраиваемых сетках был разработан метод с использованием потоковой прогонки [3].

Приведены сравнительные результаты расчетов модельных задач на адаптивно-встраиваемых дробных сетках. Одна из задач – плоская задача о прогреве среды потоком тепла, поступающим через левую границу. Начальные и граничные условия:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_0 \cdot T^\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right]; \quad T(0, t) = \left(\alpha D^2 \frac{t}{k_0} \right)^{1/\alpha}; \quad T(x, 0) = 0.$$

Данная задача имеет аналитическое решение в виде бегущей тепловой волны [4]

$$T(x, t) = \begin{cases} \left(\alpha D \frac{Dt - x}{k_0} \right)^{1/\alpha}, & 0 \leq x \leq Dt; \\ 0, & x > Dt, \end{cases}$$

где D – скорость тепловой волны. Для расчетов были выбраны параметры $\alpha = 3$; $k_0 = 6$; $D = 5$. Расчетная область – $[0; 10] \times [0; 10]$, время счета – до момента $t = 1$. Шаг по времени составлял $\tau = 10^{-3}$. Расчетная сетка для данной задачи намеренно задавалась неравномерной (рис. 2) с целью проверки «чувствительности» метода к неравномерности.

На рис. 2 представлено пространственное распределение температуры в системе на моменты времени $t = 0,6$ и 1 . По положению фронта тепловой волны на соответствующие моменты видно, что значение скорости распространения $D = 5$ сохраняется. Также можно заметить, что различия в поле температуры в направлении, перпендикулярном движению волны, за счет неравномерности сетки незначительны.

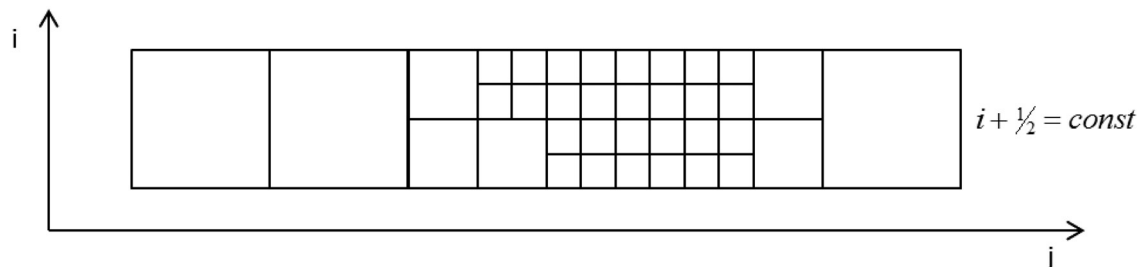


Рис.1. Пример нерегулярной структуры основной сетки линии

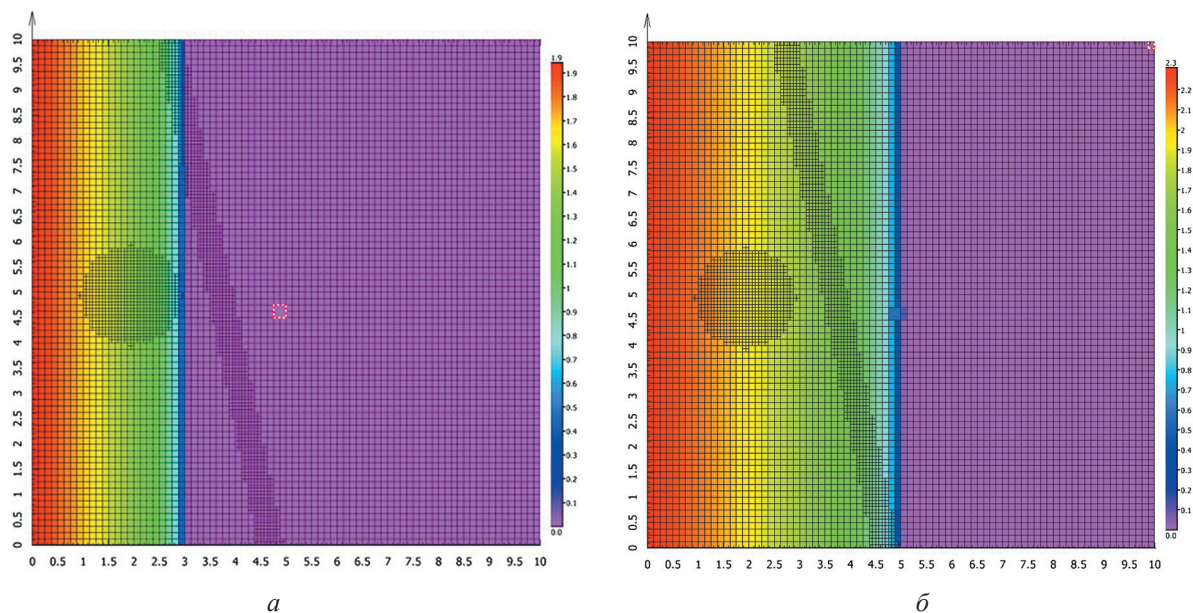


Рис. 2. Поле температуры на момент времени:
 $a - t = 0,6$; $b - t = 1$

Литература

1. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978.
2. Писарев, В. Н. Параметрическое семейство схем «Ромб» для двумерного уравнения теплопроводности [Текст] // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Методики и программы численного решения задач математической физики». – 1992. – Вып. 3. – С. 42–48.
3. Веселова, Н. Н. Схема «Ромб» для решения уравнения теплопроводности на квадратных адаптивно-встраиваемых сетках [Текст] / Н. Н. Веселова, С. Н. Лебедев // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Методики и программы численного решения задач математической физики». – 2024. – Вып. 2. – С. 3–18.
4. Самарский, А. А. Примеры численного расчета температурных волн [Текст] / А. А. Самарский, И. М. Соболев // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1963. – Т. 3. – Вып. 4. – С. 702–719.