

ВОЛНОВАЯ ТОМОГРАФИЯ В МЕДИЦИНЕ: ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

М. А. Шишленин, Н. С. Новиков, С. И. Кабанихин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Томография интенсивно развивается последние два десятилетия. Развитие методов ультразвуковой ранней диагностики злокачественных образований в мягких тканях является одной из ключевых проблем в медицине, а отсутствие воздействия ионизированного излучения стало актуальной тенденцией в медицине, что делает ультразвуковую томографию весьма востребованной.

В настоящее время различными исследовательскими группами в мире разрабатываются ультразвуковые томографы [1–5]. Данная работа, которая продолжается уже более 10 лет, достигла стадии опытного производства. При этом до сих пор нет промышленно изготовленного ультразвукового томографа.

Одной из серьезных проблем ультразвуковой томографии является разработка эффективных и устойчивых методов решения нелинейных коэффициентных обратных задач.

Наиболее адекватной моделью является трехмерная обратная задача, в которой скорость распространения волн, плотность среды и другие акустические параметры необходимо восстановить по данным, записанным детекторами, расположенными на границе области.

Рассмотрим следующую двумерную прямую задачу для гиперболической системы уравнений [6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \Theta_{\Omega}(x, y) I(t)$$

с нулевыми начальными данными и неотражающими граничными условиями.

Здесь $u(x, y, t)$ – скорость по направлению x , $v(x, y, t)$ – скорость по направлению y , $p(x, y, t)$ – давление, $c(x, y)$ – скорость распространения волн в среде, $\rho(x, y)$ – плотность, область $\Omega = (x, y) \in [0: L] \times [0: L]$, $I(t)$ зондирующий импульс, $\Theta_{\Omega}(x, y)$ локализация источников.

Обратная задача заключается в определении коэффициентов $c(x, y)$ и $\rho(x, y)$ по следующей дополнительной информации [7]

$$f_i(t) = p(x_i, y_i, t), \quad i = 1 \dots N.$$

Здесь N – число приемников.

Решение обратной задачи сводится к задаче минимизации целевого функционала ускоренным градиентным методом [4]. Получены формулы градиента функционала с использованием решения соответствующих сопряженных задач. Представлены результаты численных расчетов и сравнительный анализ численных алгоритмов, включая нейросетевые подходы [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 24-41-04004 «Идентификация и исследование математических моделей в науке и индустрии – регуляризация и машинное обучение».

Литература

1. **Natterer, F.** Acoustic mammography in the time domain [Text] : technical report preprints // Institute for Numeric and Applied Mathematics, University of Munster. – 2008. – P. 7.
2. **Zhao, W.** Simulation-to-real generalization for deep-learning-based refraction-corrected ultrasound tomography image reconstruction [Text] / W. Zhao, Y. Fan, H. Wang et al. // Physics in Medicine and Biology. – 2023. – Vol. 68, No. 3. – P. 035016.
3. **Natterer, F.** Possibilities and limitations of time domain wave equation imaging [Text] // Contemporary Mathematics. – 2011. – Vol. 559 (Providence, RI: American Mathematical Society). – P. 151–162.
4. **Duric, N.** Breast ultrasound tomography: bridging the gap to clinical practice [Text] / N. Duric, P. Littrup, C. Li et al. // Proc. SPIE. - 2012. – P. 8320.

5. **Wiskin, J.** Quantitative assessment of breast density using transmission ultrasound tomography [Text] / J. Wiskin, B. Malik, R. Natesan, M. Lenox // *Medical Physics*. – 2019b. – Vol. 46, No. 6. – P. 2610–2620.
 6. **Kabanikhin, S. I.** Numerics of acoustical 2D tomography based on the conservation laws [Text] / S. I. Kabanikhin, D. V. Klyuchinskiy, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. – 2020. – Vol. 8, No. 2. – P. 287–297.
 7. **Klyuchinskiy, D. V.** CPU-time and RAM memory optimization for solving dynamic inverse problems using gradient-based approach [Text] / D. V. Klyuchinskiy, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // *Journal of Computational Physics*. – 2021. Vol. 439, No. 110374.
 8. **Prihodko, A.** Encoder neural network in 2D acoustic tomography [Text] / A. Prihodko, M. A. Shishlenin, N. S. Novikov, D. V. Klyuchinskiy // *Applied and Computational Mathematics*. – 2024. – Vol. 23, No. 1. – P. 83–98.
-