ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

С.П. Баутин, А. Г. Обухов

1972 год

Семинар по **а**налитическим **м**етодам в **га**зовой **д**инамике

Овсянников Л.В.: «В газовой динамике главное – аналитические исследования.»

Рождественский Б.Л.: «В газовой динамике главное – численные исследования.»

Представляемый результат: «Оба классика правы!»

Полная система уравнений Навье–Стокса

Система уравнений газовой динаки при учете вязкости и теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{V} = 0, \\ \rho\left[\dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right] + c_1^2\nabla\rho + b_1\nabla T = \mu\left[\dfrac{1}{3}\nabla\left(\mathrm{div}\mathbf{V}\right) + \Delta\mathbf{V}\right], \\ c_v\rho\left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla T\right) + b_1 T\,\mathrm{div}\mathbf{V} = \varkappa\Delta T + \Phi\left(\mu, \mathbf{V}\right), \end{cases}$$

уравнения состояния газа: $p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T),$

$$c_1^2 = \frac{\partial p(\rho,T)}{\partial \rho}, \quad b_1 = \frac{\partial p(\rho,T)}{\partial T}, \quad c_1^2\nabla\rho + b_1\nabla T = \nabla p,$$

$$c_v = \frac{\partial e(\rho,T)}{\partial T}, \quad b_1 T = p(\rho,T) - \rho^2\frac{\partial e(\rho,T)}{\partial \rho},$$

$$\Phi\left(\mu,\mathbf{V}\right) = \frac{2}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2\right] +$$

$$+\mu\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2\right].$$

– диссипативная функция

Начало аналитической работы

Полная система уравнений Навье-Стокса в безразмерных переменных и в случае политропного газа с неизвестными функциями $\delta = 1/\rho$, $\mathbf{V}$, p.

В этой системе имеют место только квадратичные нелинейности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \delta - \delta \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \dfrac{1}{\gamma}\delta \nabla p = \mu_0 \delta \left[\dfrac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \dfrac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{V} = \varkappa_0 \Delta T + \Phi(\mu_0, \gamma, \mathbf{V}), \end{cases}$$

уравнения состояния:

$$T = \delta p, \quad e = \delta p,$$

$$\mu_0 = \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho_{00} v_{00} x_{00}}, \quad \varkappa_0 = \frac{\varkappa}{c_{vo} \rho_{00} v_{00} x_{00}}.$$

Баутин С.П. «Прикладная математика и механика, 1987, т. 51, вып. 4.

Двуменые нестационарные течения определяются решениями такой системы:

$$
\begin{cases}
\delta_t + u\delta_x + v\delta_y - \delta(u_x + v_y) = 0, \\
u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\gamma}\delta p_x = \mu_0\delta\left(\frac{1}{4}v_{xy} + u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy}\right), \\
v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\gamma}\delta p_y = \mu_0\delta\left(\frac{1}{4}u_{xy} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{xx}\right), \\
p_t + up_x + vp_y + \gamma p(u_x + v_y) = \varkappa_0 p(\delta_{xx} + \delta_{yy}) + \\
\quad +2\varkappa_0(p_x\delta_x + p_y\delta_y) + \varkappa_0\delta(p_{xx} + p_{yy}) + \\
\quad +\mu_0\gamma(\gamma-1)\left[\left(u_x^2 - u_xv_y + v_y^2\right) + \frac{3}{4}(u_y + v_x)^2\right].
\end{cases}
\tag{1}
$$

Баутин С.П., Замыслов В.Е., Карелина О.А, Обухов А.Г. Решение нелинейных уравнений с частными производными тригонометрическими рядами. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2024. 153 с.

Решения представляются в виде

$$\delta(t,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\delta_{k,1}(t)\cos(kx) + \delta_{k,2}(t)\cos(ky) \right];$$

$$u(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{k,1}(t)\sin(kx) + u_{k,2}(t)\sin(ky) \right];$$

$$v(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[v_{k,1}(t)\sin(kx) + v_{k,2}(t)\sin(ky) \right]; \qquad (2)$$

$$p(t,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k,1}(t)\cos(kx) + p_{k,2}(t)\cos(ky) \right].$$

Ряды (2) подставляются в систему (1) и уравнения системы проецируются на соответствующие базисы:

1) уравнения для δ и p умножаются на $\cos(\ell x)$ и на $\cos(\ell y)$, $\ell = 1, 2, \ldots$ и интегрируются

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,x,y)\cos(\ell x)dxdy, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,x,y)\cos(\ell y)dxdy; \quad f : \delta, p;$$

2) уравнения для u и v умножаются на $\sin(\ell x)$ и на $\sin(\ell y)$, $\ell = 1, 2, \ldots$ и интегрируются

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t,x,y)\sin(\ell x)dxdy, \quad \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t,x,y)\sin(\ell y)dxdy; \quad g : u, v.$$

В результате для каждого коэффициента из рядов (2) получается свое обыкновенное дифференциальное уравнение, в правые части которых входит бесконечное число искомых коэффициентов.

Для построения приближенного решения в рядах (2) при выбранном значении константы K оставляется конечное число слагаемых:

$$\delta(t,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{K} \left[\delta_{k,1}(t)\cos(kx) + \delta_{k,2}(t)\cos(ky) \right];$$

$$u(t,x,y) = \sum_{k=1}^{K} \left[u_{k,1}(t)\sin(kx) + u_{k,2}(t)\sin(ky) \right];$$

$$v(t,x,y) = \sum_{k=1}^{K} \left[v_{k,1}(t)\sin(kx) + v_{k,2}(t)\sin(ky) \right];$$

$$p(t,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{K} \left[p_{k,1}(t)\cos(kx) + p_{k,2}(t)\cos(ky) \right]$$

и эти представления подставляются в систему (1).
Полученное уравнение проецируется на соответствующие базись, получается конечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\delta'_{1,1}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}(2j+1)\left[u_{j+1,1}(t)\delta_{j,1}(t) + u_{j,1}(t)\delta_{j+1,1}(t)\right] + u_{1,1}(t).$$

$$\delta'_{\ell,1}(t) = \sum_{j=1}^{K-\ell}(2j+\ell)\left[u_{j+\ell,1}(t)\delta_{j,1}(t) + u_{j,1}(t)\delta_{j+\ell,1}(t)\right] + \ell u_{\ell,1}(t) -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1}(2j-\ell)u_{\ell-j,1}(t)\delta_{j,1}(t).$$

$$\delta'_{K,1}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}(K-2j)u_{K-j,1}(t)\delta_{j,1}(t) + Ku_{K,1}(t).$$

Здесь и далее: $2 \le \ell \le K-1$

$$\delta'_{1,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}(2j+1)\Big[v_{j,2}(t)\delta_{j+1,2}(t) + v_{j+1,2}(t)\delta_{j,2}(t)\Big] + v_{1,2}(t).$$

$$\delta'_{\ell,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}(2j+\ell)\Big[v_{j,2}(t)\delta_{j+\ell,2}(t) + v_{j+\ell,2}(t)\delta_{j,2}(t)\Big] +$$
$$+\ell v_{\ell,2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1}(\ell-2j)v_{\ell-j,2}(t)\delta_{j,2}(t).$$

$$\delta'_{K,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}(K-2j)v_{K-j,2}(t)\delta_{j,2}(t) + Kv_{K,2}(t).$$

$$u'_{1,1}(t) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} u_{j+1,1}(t)u_{j,1}(t)+$$

$$+\tfrac{1}{\gamma}p_{1,1}(t) + \tfrac{1}{\gamma}\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j\delta_{j+1,1}(t)p_{j,1}(t) + (j+1)\delta_{j,1}(t)p_{j+1,1}(t)\Big]-$$

$$-\mu_0 u_{1,1}(t) - \mu_0\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j^2\delta_{j+1,1}(t)u_{j,1}(t) + (j+1)^2\delta_{j,1}(t)u_{j+1,1}(t)\Big],$$

$$u'_{\ell,1}(t) = \tfrac{1}{2}\ell\sum_{j=1}^{K-\ell} u_{j+\ell,1}(t)u_{j,1}(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j u_{\ell-j,1}(t)u_{j,1}(t)+$$

$$+\tfrac{1}{\gamma}\ell p_{\ell,1}(t) + \tfrac{1}{\gamma}\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j\delta_{j+\ell,1}(t)p_{j,1}(t) + (j+\ell)\delta_{j,1}(t)p_{j+\ell,1}(t)\Big]+$$

$$+\tfrac{1}{\gamma}\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j\delta_{\ell-j,1}(t)p_{j,1}(t) - \mu_0\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j^2\delta_{\ell-j,1}(t)u_{j,1}(t) -$$

$$-\mu_0\ell^2 u_{\ell,1}(t) - \mu_0\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j^2\delta_{j+\ell,1}(t)u_{j,1}(t) + (j+\ell)^2\delta_{j,1}(t)u_{j+\ell,1}(t)\Big],$$

$$u'_{K,1}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j u_{K-j,1}(t)u_{j,1}(t) + \frac{1}{\gamma}K p_{K,1}(t) +$$
$$+\frac{1}{\gamma}\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j\delta_{K-j,1}(t)p_{j,1}(t) - \mu_0 K^2 u_{K,1}(t) - \mu_0\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j^2\delta_{K-j,1}(t)u_{j,1}(t);$$

$$u'_{1,2}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[jv_{j+1,2}(t)u_{j,2}(t) - (j+1)v_{j,2}(t)u_{j+1,2}(t)\Big] -$$
$$-\frac{3}{4}\mu_0 u_{1,2}(t) - \frac{3}{8}\mu_0\sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j^2\delta_{j+1,2}(t)u_{j,2}(t) + (j+1)^2\delta_{j,2}(t)u_{j+1,2}(t)\Big],$$

$$u'_{\ell,2}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[jv_{j+\ell,2}(t)u_{j,2}(t) - (j+\ell)v_{j,2}(t)u_{j+\ell,2}(t)\Big] -$$
$$-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} jv_{\ell-j,2}(t)u_{j,2}(t) - \frac{3}{4}\mu_0\ell^2 u_{\ell,2} - \frac{3}{8}\mu_0\sum_{j=1}^{\ell-1} j^2\delta_{\ell-j,2}(t)u_{j,2}(t) -$$
$$-\frac{3}{8}\mu_0\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j^2\delta_{j+\ell,2}(t)u_{j,2}(t) + (j+\ell)^2\delta_{j,2}(t)u_{j+\ell,2}(t)\Big],$$

$$u'_{K,2}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j v_{K-j,2}(t)u_{j,2}(t) - \tfrac{3}{4}\mu_0 K^2 u_{K,2} -$$

$$-\tfrac{3}{8}\mu_0 \sum_{j=1}^{K-1} j^2 \delta_{K-j,2}(t)u_{j,2}(t),$$

$$v'_{1,1}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[ju_{j+1,1}(t)v_{j,1}(t) - (j+1)u_{j,1}(t)v_{j+1,1}(t)\Big] -$$

$$-\tfrac{3}{4}\mu_0 v_{1,1}(t) - \tfrac{3}{8}\mu_0 \sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j^2\delta_{j+1,1}(t)v_{j,1}(t) + (j+1)^2\delta_{j,1}(t)v_{j+1,1}(t)\Big],$$

$$v'_{\ell,1}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[ju_{j+\ell,1}(t)v_{j,1}(t) - (j+\ell)u_{j,1}(t)v_{j+\ell,1}(t)\Big] -$$

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j u_{\ell-j,1}(t)v_{j,1}(t) - \tfrac{3}{4}\mu_0 \ell^2 v_{\ell,1}(t) -$$

$$-\tfrac{3}{8}\mu_0 \sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j^2\delta_{j+\ell,1}(t)v_{j,1}(t) + (j+\ell)^2\delta_{j,1}(t)v_{j+\ell,1}(t)\Big] -$$

$$-\tfrac{3}{8}\mu_0 \sum_{j=1}^{\ell-1} j^2\delta_{\ell-j,1}(t)j^2\delta_{\ell-j}(t)v_{j,1}(t),$$

$$v'_{K,1}(t) = -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j u_{K-j,1}(t)v_{j,1}(t) - \tfrac{3}{4}\mu_0 K^2 v_{K,1}(t) - \tfrac{3}{8}\mu_0 \sum_{j=1}^{K-1} j^2\delta_{K-j,1}(t)v_{j,1}(t);$$

$$v'_{1,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} v_{j+1,2}(t)v_{j,2}(t) + \frac{1}{\gamma}p_{1,2}(t) +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j\delta_{j+1,2}(t)p_{j,2}(t) + (j+1)\delta_{j,2}(t)p_{j+1,2}(t)\Big] -$$

$$-\mu_0 v_{1,2} - \mu_0\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[-j^2\delta_{j+1,2}(t)v_{j,2}(t) + (j+1)^2\delta_{j,2}(t)v_{j+1,2}(t)\Big],$$

$$v'_{\ell,2}(t) = \frac{1}{2}\ell\sum_{j=1}^{K-\ell} v_{j+\ell,2}(t)v_{j,2}(t) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j v_{\ell-j,2}(t)v_{j,2}(t) + \frac{1}{\gamma}\ell p_{\ell,2}(t) +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j\delta_{j+\ell,2}(t)p_{j,2}(t) + (j+\ell)\delta_{j,2}(t)p_{j+\ell,2}(t)\Big] +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j\delta_{\ell-j}(t)p_{j,2}(t) - \mu_0\ell^2 v_{\ell,2}(t) - \mu_0\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell-1} j^2\delta_{\ell-j,2}(t)v_{j,2}(t) -$$

$$-\mu_0\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j^2\delta_{j+\ell,2}(t)v_{j,2}(t) + (j+\ell)^2\delta_{j,2}(t)v_{j+\ell,2}(t)\Big] -$$

$$-\mu_0\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[-j^2\delta_{j+\ell,2}(t)v_{j,2}(t) + (j+\ell)^2\delta_{j,2}(t)v_{j+\ell,2}(t)\Big],$$

$$v'_{K,2}(t) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j v_{K-j,2}(t) v_{j,2}(t) + \frac{1}{\gamma} K p_{K,2}(t) +$$

$$+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j \delta_{K-j,2}(t) p_{j,2}(t) - \mu_0 K^2 v_{K,2}(t) - \mu_0 \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1} j^2 \delta_{K-j}(t) v_{j,2}(t).$$

$$p'_{1,1}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big\{\Big[j-\gamma(j+1)\Big]u_{j+1,1}(t)p_{j,1}(t)+$$

$$+\Big[(j+1)-\gamma j\Big]u_{j,1}(t)p_{j+1,1}(t)\Big\}-\gamma u_{1,1}(t)-$$

$$-\varkappa_0\delta_{1,1}(t)-\varkappa_0 p_{1,1}(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-1}\Big[j(j-2)p_{j+1,1}(t)\delta_{j,1}(t)+(j^2-1)p_{j,1}(t)\delta_{j+1,1}(t)\Big]-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-1}\Big[j^2\delta_{j+1,1}(t)p_{j,1}(t)+(j+1)^2\delta_{j,1}(t)p_{j+1,1}(t)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}A\sum_{j=1}^{K-1}\Big[2(j+1)ju_{j+1,1}(t)u_{j,1}(t)\Big]+$$

$$+\frac{3}{8}A\sum_{j=1}^{K-1}\Big[2(j+1)jv_{j+1,1}(t)v_{j,1}(t)\Big];\quad A=\mu_0\gamma(\gamma-1).$$

$$
\begin{aligned}
p'_{\ell,1}(t) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big\{[j-\gamma(j+\ell)]u_{j+\ell,1}(t)p_{j,1}(t) + (j+\ell-\gamma j)u_{j,1}(t)p_{j+\ell,1}(t)\Big\} - \\
-\tfrac{1}{2}\ell\sum_{j=1}^{\ell-1}u_{\ell-j,1}(t)p_{j,1}(t) - \gamma\ell u_{\ell,1} - \varkappa_0\ell^2\delta_{\ell,1}(t) - \\
-\tfrac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big\{\Big[j^2-2j+(j+\ell)^2\Big]p_{j+\ell,1}(t)\delta_{j,1}(t) + \\
+\Big[(j+\ell)(j+\ell-2)+j^2\Big]p_{j,1}(t)\delta_{j+\ell,1}(t)\Big\} - \\
-\tfrac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{\ell-1}j\Big[j(j+2)+(\ell-j)^2\Big]p_{\ell-j,1}(t)\delta_{j,1}(t) - \\
-\varkappa_0\ell^2 p_{\ell,1}(t) + \tfrac{1}{2}A\sum_{j=1}^{\ell-1}(\ell-j)ju_{\ell-j,1}u_{j,1} + \\
+\tfrac{1}{2}A\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[(j+\ell)ju_{j+\ell,1}u_{j,1} + (j+\ell)ju_{j,1}u_{j+\ell,1}\Big] + \\
+\tfrac{3}{8}A\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[(j+\ell)jv_{j+\ell,1}v_{j,1} + (j+\ell)jv_{j,1}v_{j+\ell,1}\Big] + \\
+\tfrac{3}{8}A\sum_{j=1}^{\ell-1}(\ell-j)jv_{\ell-j,1}v_{j,1}.
\end{aligned}
$$

$$p'_{K,1}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}[j-\gamma(K-j)]u_{K-j,1}(t)p_{j,1}(t) - \gamma K u_{K,1}(t) -$$

$$-\varkappa_0 K^2 \delta_{K,1}(t) - \frac{1}{2}\varkappa_0 \sum_{j=1}^{K-1}[j^2+2j+(K-j)^2]p_{K-j,1}(t)\delta_{j,1}(t) -$$

$$-\varkappa_0 K^2 p_{K,1}(t) + A\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}(K-j)j u_{K-j,1}(t)u_{j,1}(t) +$$

$$+\frac{3}{8}A\sum_{j=1}^{K-1}(K-j)j v_{K-j,1}(t)v_{j,1}(t).$$

$$p'_{1,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big[j-\gamma(j+1)\Big]v_{j+1,2}(t)p_{j,2}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-1}\Big(j+1-\gamma j\Big)p_{j+1,2}(t)v_{j,2}(t)-\gamma v_{1,2}-$$

$$-\varkappa_0\delta_{1,2}(t)-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-1}\delta_{j,2}(t)p_{j+1,2}(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-1}(2j+1)^2\delta_{j+1,2}(t)p_{j,2}(t)-\varkappa_0 p_{1,2}(t)+$$

$$+A\sum_{j=1}^{K-1}j(j+1)v_{j+1,2}(t)v_{j,2}(t)+$$

$$+\frac{3}{4}A\sum_{j=1}^{K-1}j(j+1)u_{j+1,2}(t)u_{j,2}(t).$$

$$p'_{\ell,2}(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[j-\gamma(j+\ell)\Big]v_{j+\ell,2}(t)p_{j,2}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K-\ell}(j+\ell-\gamma j)v_{j,2}(t)p_{j+\ell,2}(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{\ell-1}\Big[j+\gamma(\ell-j\Big]p_{j,2}(t)v_{\ell-j,2}(t)-$$

$$-\varkappa_0\ell^2\delta_{\ell,2}(t)-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-\ell}\Big[j^2-2j(j+\ell)\Big]p_{j+\ell,2}(t)\delta_{j,2}(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-\ell}(j+\ell)(j-\ell)p_{j,2}(t)\delta_{j+\ell,2}(t)-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{\ell-1}\Big[j^2+(\ell-j)(\ell-3j)\Big]p_{\ell-j,2}(t)\delta_{j,2}(t)-\varkappa_0\ell^2p_{\ell,2}(t)+$$

$$+A\sum_{j=1}^{K-\ell}j(\ell+j)v_{\ell+j,2}(t)v_{j,2}(t)+\frac{1}{2}A\sum_{j=1}^{\ell-1}j(\ell-j)v_{\ell-j,2}(t)v_{j,2}(t)+$$

$$+\frac{3}{4}A\sum_{j=1}^{K-\ell}j(\ell+j)u_{\ell+j,2}(t)u_{j,2}(t)+\frac{3}{8}A\sum_{j=1}^{\ell-1}j(\ell-j)u_{\ell-j,2}(t)u_{j,2}(t).$$

$$p'_{K,2}(t) = -\frac{1}{2}K\sum_{j=1}^{K-1} v_{K-j,2}(t)p_{j,2}(t) - \gamma K v_{K,2}(t) - \varkappa_0 K^2\delta_{K,2}(t) -$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa_0\sum_{j=1}^{K-1}\Big[j^2 + (K-j)(K-3j)\Big]p_{K-j,2}(t)\delta_{j,2}(t) -$$

$$-\varkappa_0 K^2 p_{K,2}(t) + \frac{1}{2}A\sum_{j=1}^{K-1}(K-j)j v_{K-j,2}(t)v_{j,2}(t) +$$

$$+\frac{3}{8}A\sum_{j=1}^{K-1}(K-j)j u_{K-j,2}(t)u_{j,2}(t).$$

Конец аналитической работы

Выписанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений решаются при заданных начальных условиях

$$f_{k,j}|_{t=0} = f^o_{k,j}; \quad f \quad - \quad \delta, u, v, p; \quad j = 1, 2,$$

которые однозначно определяют начальные условия для системы (1):

$$\delta(0,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{K} \left[\delta^o_{k,1} \cos(kx) + \delta^o_{k,2} \cos(ky) \right];$$

$$u(0,x,y) = \sum_{k=1}^{K} \left[u^o_{k,1} \sin(kx) + u^o_{k,2} \sin(ky) \right]; \qquad (3)$$

$$v(0,x,y) = \sum_{k=1}^{K} \left[v^o_{k,1} \sin(kx) + v^o_{k,2} \sin(ky) \right];$$

$$p(0,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{K} \left[p^o_{k,1} \cos(kx) + p^o_{k,2} \cos(ky) \right].$$

Для системы (1) поставлена задача Коши.

Начало вычислительной работы

О сходимости рядов

Локальная по t сходимость пока не оформлена.

Для анализа «машинной» сходимости и оценки погрешности используется квадрат нормы функции в L_2:

$$\left(||f(x,y)||_{L_2} \right)^2 = \int_a^b \int_a^b f^2(x,y)dxdy.$$

Конечную сумму для краткости написания переобозначим

$$\delta(t,x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{K} [\delta_{k,1}(t)\cos kx + \delta_{k,2}(t)\cos ky] = \delta K.$$

После соответствующих вычислений квадрат нормы для δK задается следующей формулой

$$||\delta K||^2 = 4\pi^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} [\delta_{k,1}^2(t) + \delta_{k,2}^2(t)] \right].$$

Пусть получен конкретный расчет коэффициентов конечных тригонометрических сумм при заданном значении константы K и при заданных начальных условиях.
Далее для примера рассматривается функция $\delta(t, x, y)$.
Выбирается константа $K1$, такая, что

$$1 < K1 < K.$$

Строится сумма

$$\delta K1 = 1 + \sum_{k=1}^{K1} [\delta_{k,1}(t) \cos kx + \delta_{k,2}(t) \cos ky]$$

и суммма

$$\delta K - \ \delta K1 = \sum_{k=K1+1}^{K} [\delta_{k,1}(t) \cos kx + \delta_{k,2}(t) \cos ky],$$

задающая «хвост» конечной суммы δK.

Тогда величину

$$\varepsilon_1 = \frac{||\delta K - \delta K1||^2}{||\delta K||^2}$$

можно трактовать как относительную оценку «машинной сходимости», то есть относительную величину «хвоста» конечной суммы при заданных константах K, $K1$ в соответствующей норме.
А величина

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{||\delta K1||^2}{||\delta K||^2}$$

дает оценку величины погрешности при расчетах с разными значениями констант K и $K1$.
Для представленного далее первого расчета конкретного варианта составлена нижеследующая таблица

$K1$	K	ε_1	ε_2
30	60	0.136885	0.736584
60	90	0.036117	0.065127
90	120	0.006814	0.008144
120	150	0.000805	0.000812

Результаты расчетов

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений численно решались с заданной точностью 10^{-4}.

Время счета одного варианта с $K = 90$ составляло примерно три часа.

Сетка на всех анимациях связана с реализацией визулизации результатов расчетов.

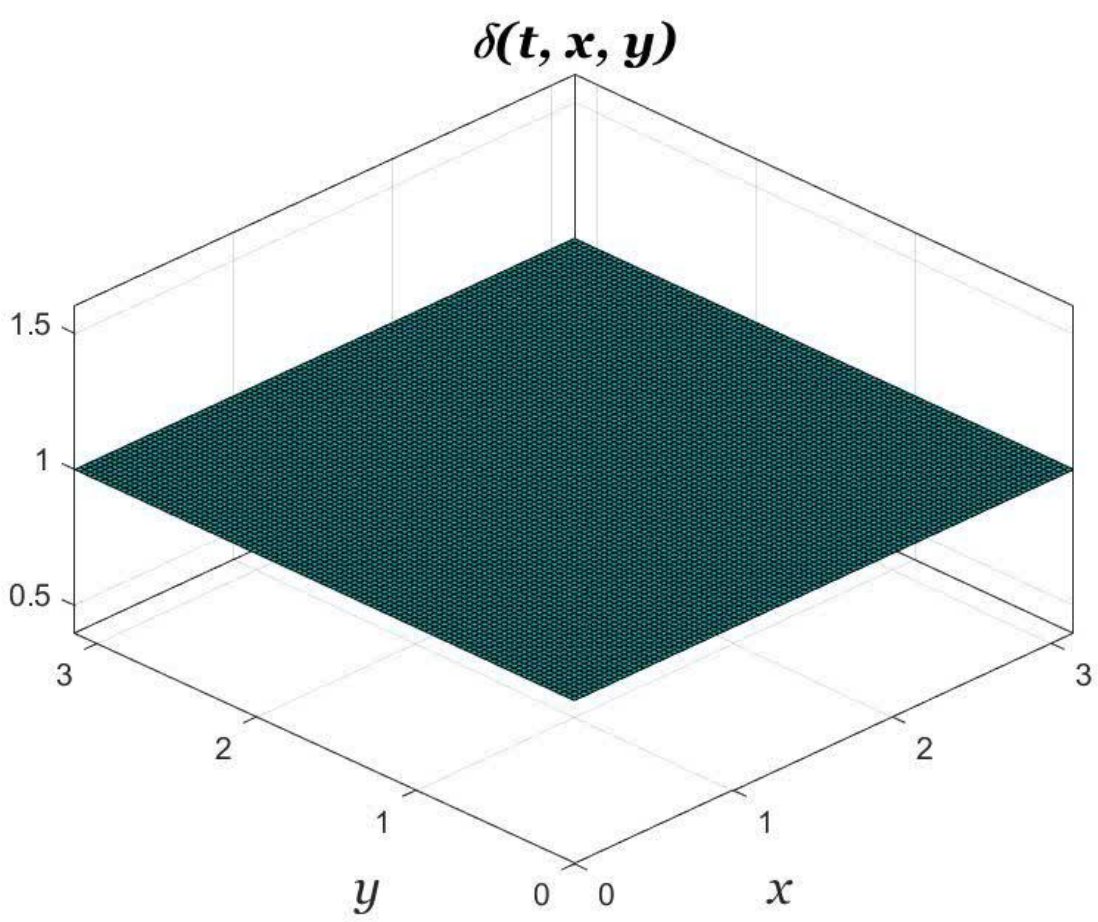
Программное изменение числа K и изменение параметров визуализационной сетки несложно.

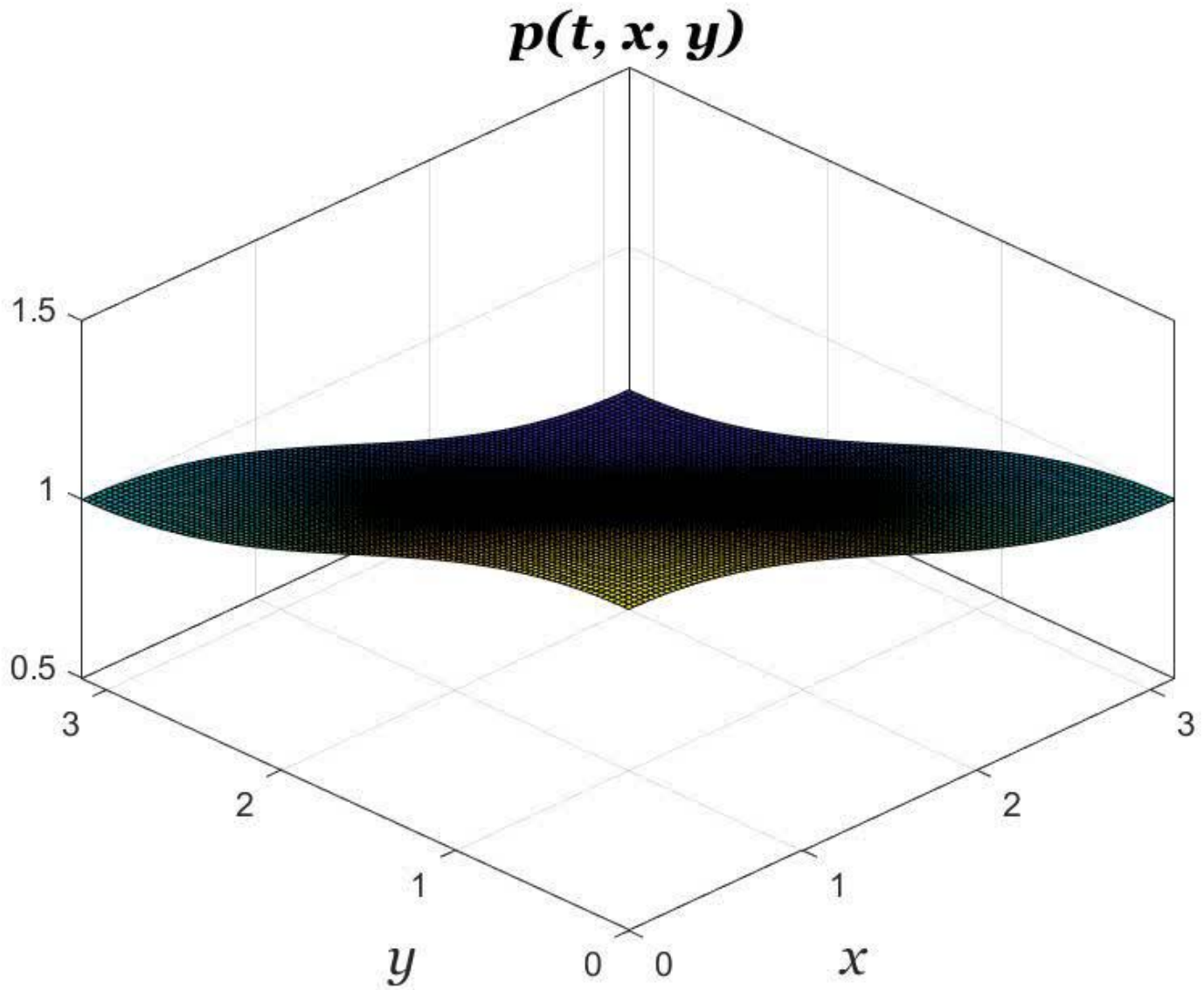
Пример 1.

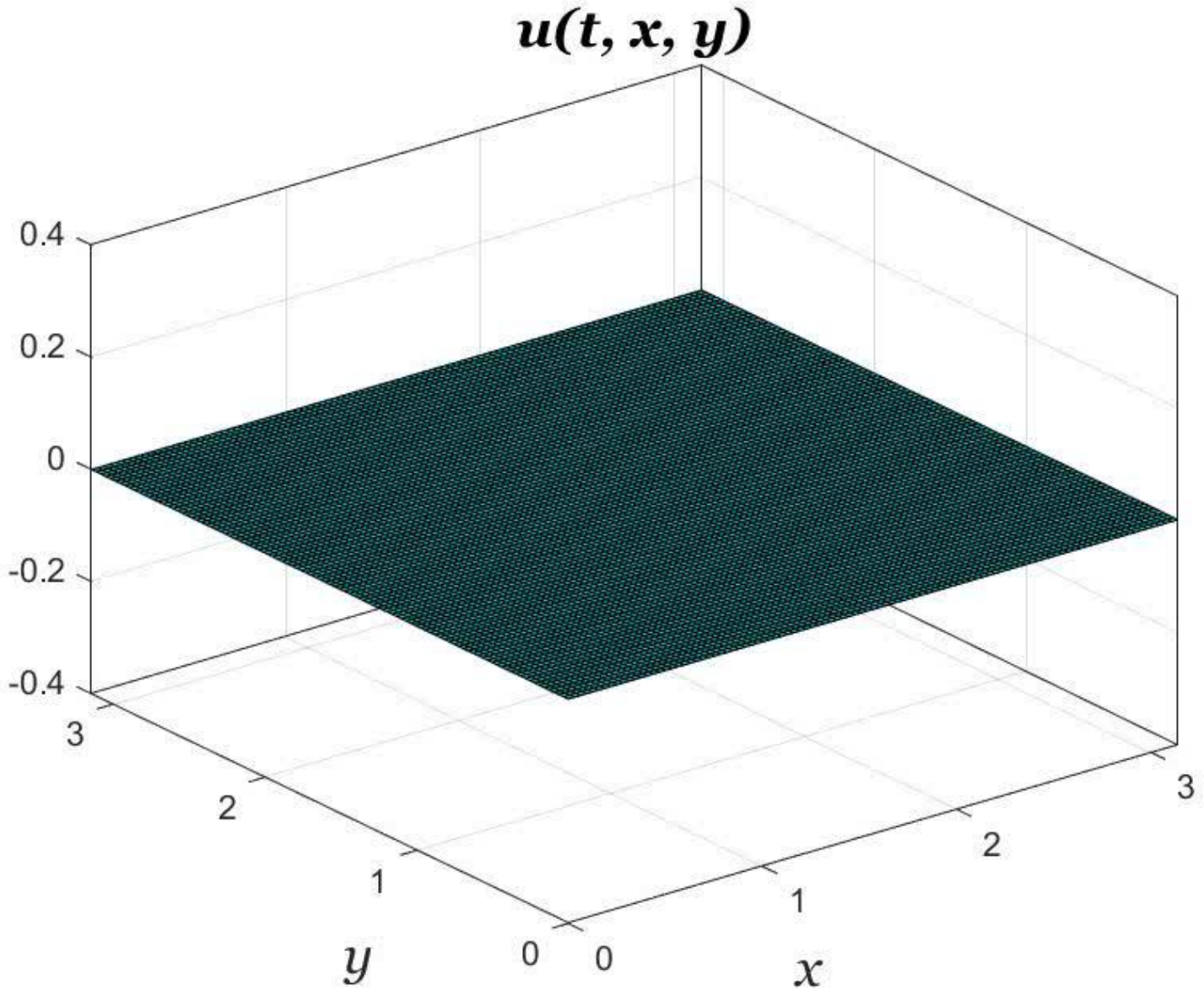
Начальные данные:

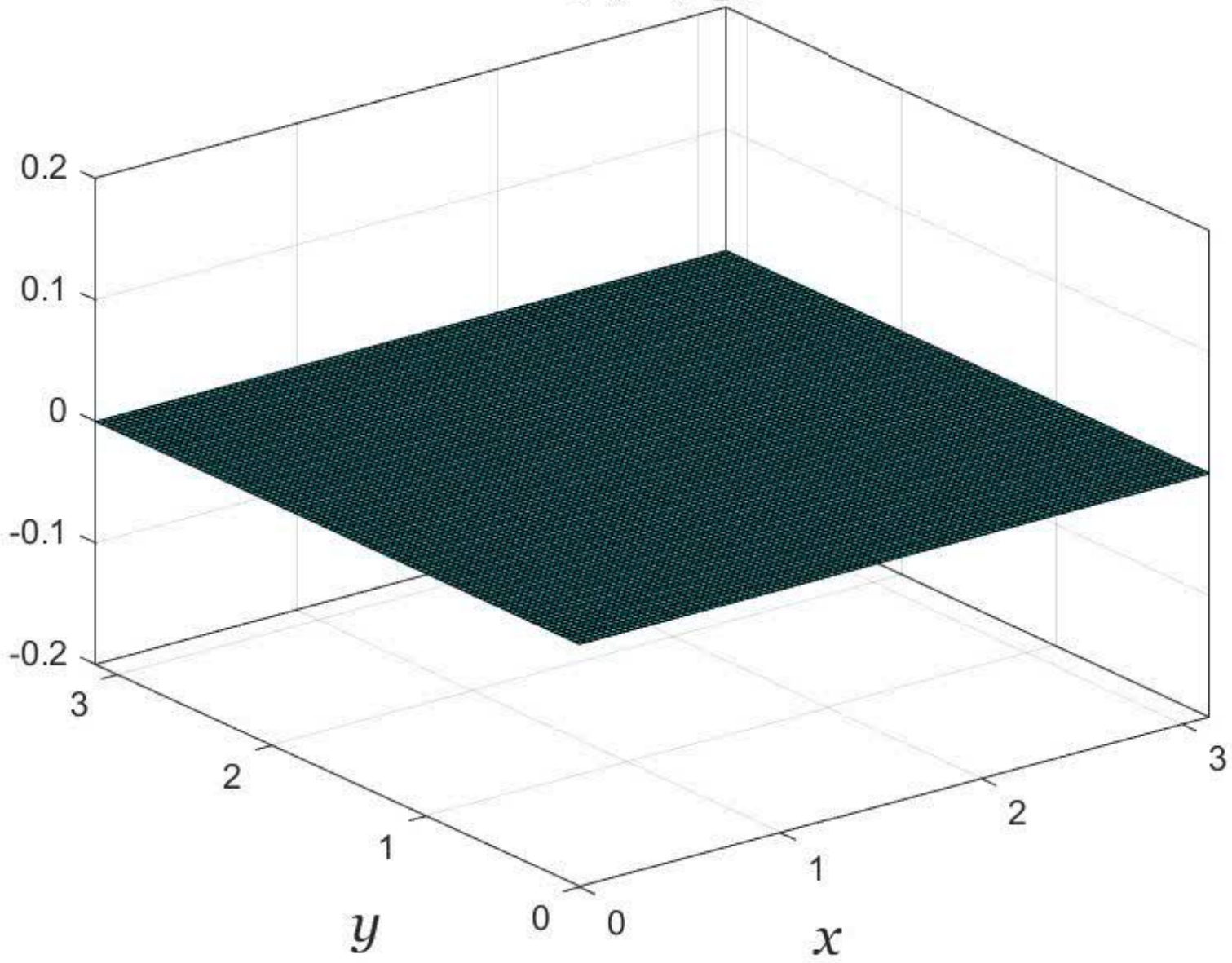
$$\delta|_{t=0} = 1; \quad p|_{t=0} = 1 + 0.2\cos x + 0.2\cos y;$$

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = 0.$$



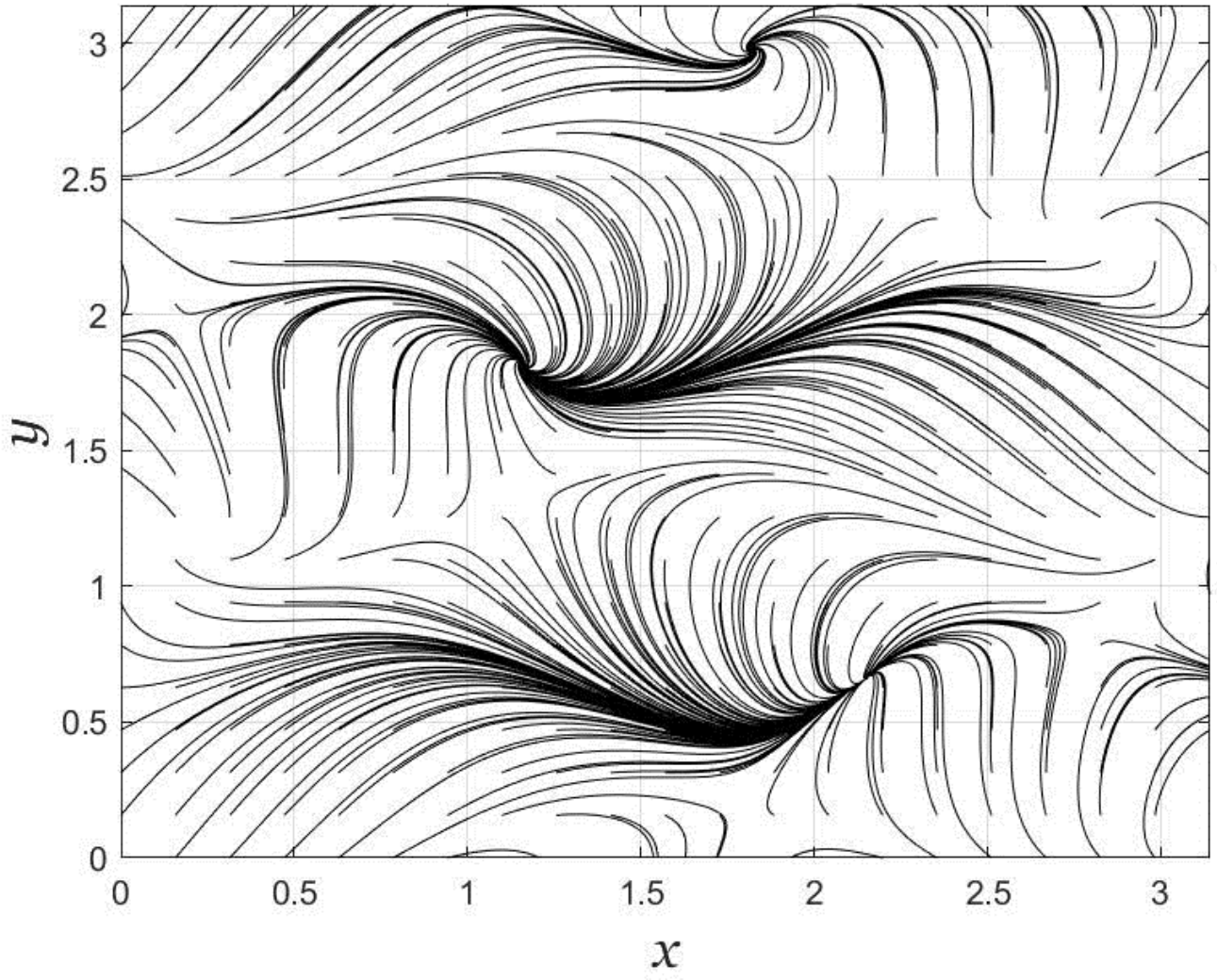

p(t, x, y)
1.5
1
0.5
3
2
1
0
y
0
1
2
3
x


u(t, x, y)
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
3
2
1
0
y
0
1
2
3
x


v(t, x, y)
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
3
2
1
0
y
0
1
2
3
x

А.Г. Обухов: «Кто-то хотел увидеть турбулентность?»

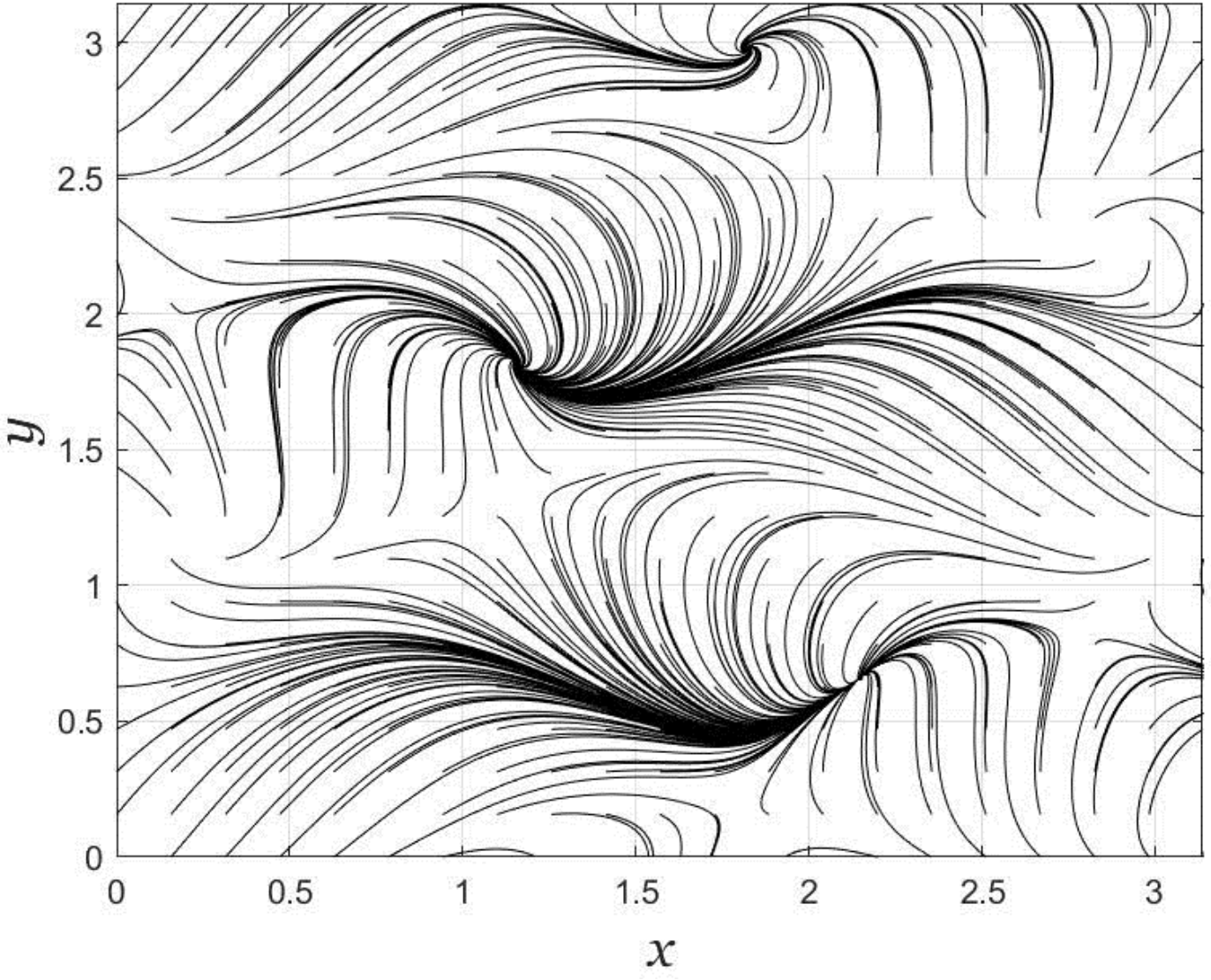
Мгновенные линии тока



Пример 2.

$$\delta(t,x,y)|_{t=0} = 1;\ p(t,x,y)|_{t=0} = 1 + 0.1\cos(x);$$

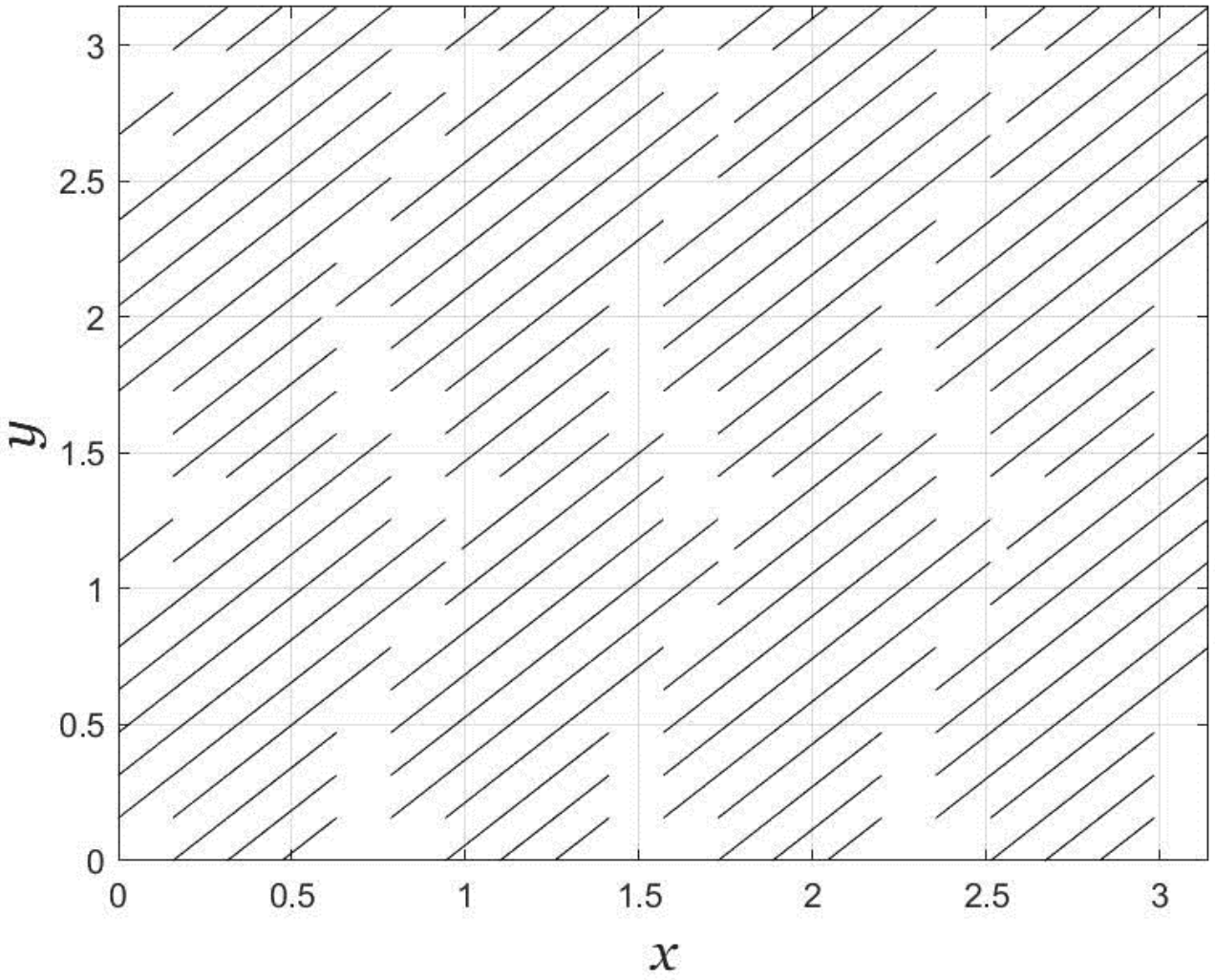
$$u(t,x,y)|_{t=0} = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(4y); v(t,x,y)|_{t=0} = 0.1\sin(5x) + 0.1\sin(4y).$$



Пример 3.

$$\delta(t,x,y)|_{t=0} = 1; \quad p(t,x,y)|_{t=0} = 1 + 0.1\cos(x);$$

$$u(t,x,y)|_{t=0} = 0.1\sin(8x) + 0.1\sin(4y); \; v(t,x,y)|_{t=0} = 0.1\sin(8x) + 0.1\sin(4y).$$



Заключение

1. Впервые нестационарные двумерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа смоделированы с использованием тригонометрических сумм с произвольным конечным числом слагаемых.

2. В предложенном виде решены конкретные задачи Коши с разными начальными данными.

3. В метрике функционального пространства L_2 установлена «машинная сходимость» построенных тригонометрических сумм и сделана оценка вычислительной погрешности в представленных расчетах.

4. Показано, что указанные в предыдущем пункте характеристики расчетов улучшаются с ростом числа слагаемых в тригонометрических суммах.

5. Результаты расчетов можно использовать для моделирования различных сложных течений газа, а также как тесты для решения подобных задач разностными методами.

Спасибо за внимание !

spbautin@mail.ru

agobukhov@inbox.ru