



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Разностная схема для уравнения теплопроводности на адаптивно-встраиваемых сетках с использованием прогонки для решения СЛАУ

Веселова Н. Н., Лебедев С. Н.

2025

Введение



В результате неявной разностной аппроксимации уравнения теплопроводности на нерегулярную сетку получается система линейных алгебраических уравнений, которую решают обычно одним из итерационных методов. Поскольку итерационные методы достаточно дорогие и занимают существенную долю времени решения задачи, в последнее время идет поиск более экономичных методов.

При решении уравнения теплопроводности на адаптивно-встраиваемых сетках удалось построить экономичную разностную схему, в которой для решения разностной системы уравнений применен метод прогонки.

Двумерное уравнение лучистой теплопроводности аппроксимируется в соответствии с идеологией схемы «Ромб»¹.

Полученная разностная схема аппроксимирует исходные уравнения в пределах одной сеточной ячейки адаптивно-встраиваемой сетки.

Двумерные разностные уравнения решаются с использованием метода расщепления, сводя двумерную задачу к ряду более простых одномерных задач, но на нерегулярной сетке. Для решения полученных СЛАУ на адаптивно-встраиваемых сетках был адаптирован метод потоковой прогонки. Приведены сравнительные результаты расчётов модельных задач на адаптивно-встраиваемых дробных сетках.

¹ В.Н.Писарев. Параметрическое семейство схем «Ромб» для двумерного уравнения теплопроводности. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, 1992, вып. 3, стр.

Уравнение теплопроводности



В области двумерного пространства $D = \{a_r \leq r \leq b_r, a_z \leq z \leq b_z\}$ рассматривается дифференциальное уравнение переноса энергии в приближении лучистой теплопроводности², записанное в потоковой форме

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{W} + f, \\ \vec{W} = -\chi \cdot \vec{\nabla} T. \end{cases} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{W} = \frac{1}{r^d} \left(\frac{\partial r^d W}{\partial r} + \frac{\partial r^d W}{\partial z} \right),$$

$\varepsilon(\rho, T)$ - удельная внутренняя энергия,

$T(r, z, t)$ - температура,

$\rho(r, z, t)$ - плотность,

$\chi(\rho, T)$ - коэффициент теплопроводности,

$f(r, z, t)$ - источник.

$d = 0$ - декартовы координаты,
 $d = 1$ - цилиндрические координаты,
 z – ось симметрии

² Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966.

Краевая задача



Решаем краевую задачу

$$\begin{cases} T(r, z, 0) = T_0(r, z), & (r, z) \in D, \\ \alpha T + \beta(\vec{W} \cdot \vec{n}) = \varphi(r, z, t), & (r, z) \in G, \quad t \in [0, t_{\max}], \end{cases}$$

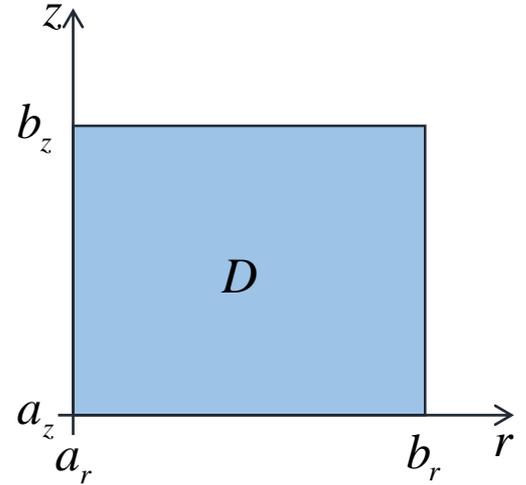
где

$T_0(r, z)$ - заданное начальное распределение температуры,

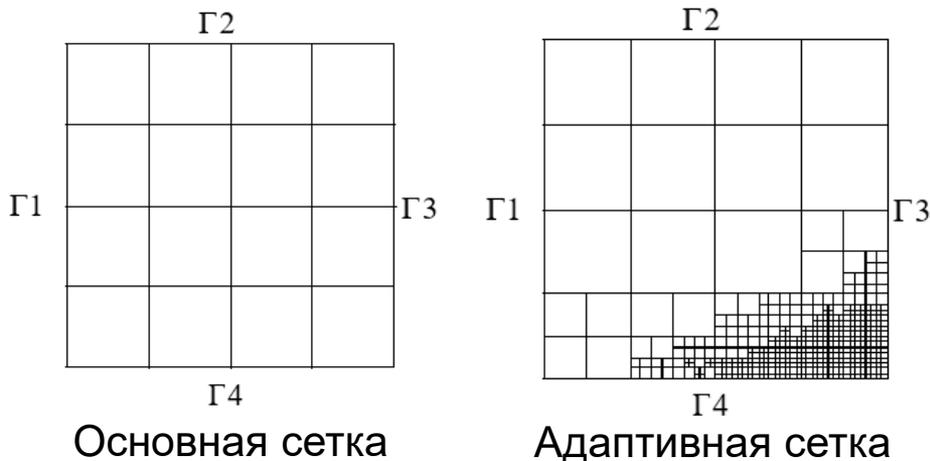
$\varphi(r, z, t)$ - заданные функции на внешней границе области D ,

α, β - заданные параметры,

G - внешняя граница прямоугольной области D .



Адаптация сетки



- Процесс построения сетки производится на каждом временном шаге
- За основу берется регулярная равномерная сетка
- Построение сетки осуществляется дроблением имеющихся ячеек сетки на четыре части

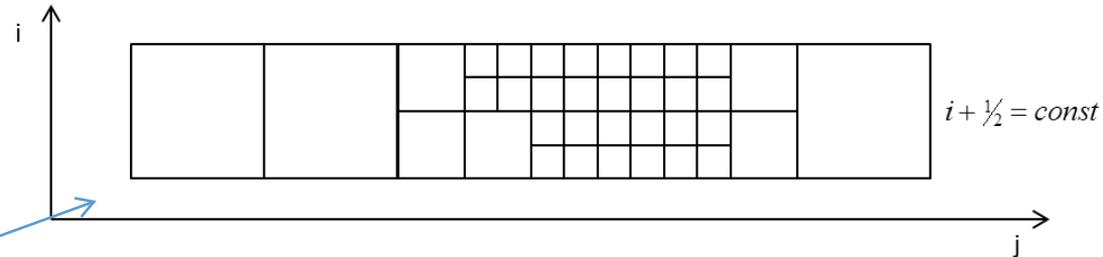
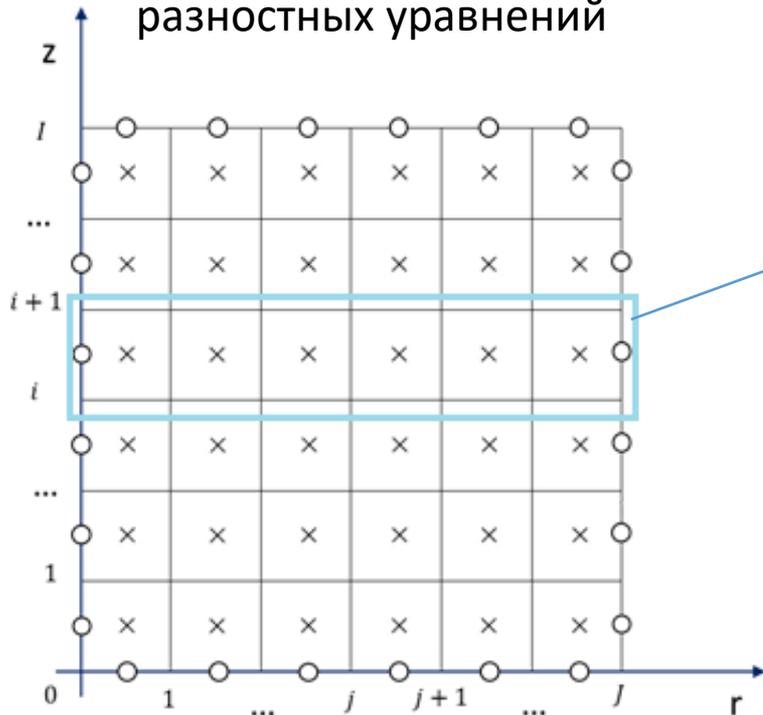
Введем обозначения для новой сетки:

- K - общее число ячеек,
- $(\tilde{h})_k = h/2^{L_k}$ - размеры каждой ячейки,
 h - пространственный шаг регулярной сетки,
- $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ - номер ячейки,
- L_k - уровень адаптации k -ой ячейки.

Разностная схема на адаптивной сетке



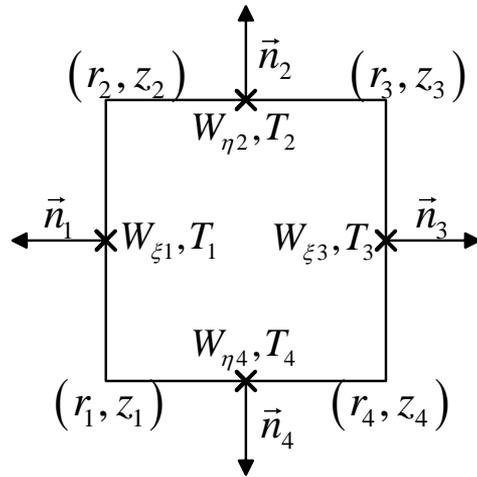
Пример сеточной структуры, для которой необходимо решать системы разностных уравнений



Интегрируем уравнение теплопроводности по ячейке адаптивной сетки и применяем неявную аппроксимацию по времени. Получаем конечно-разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\tau} = -\frac{1}{\Delta m} \text{DIV}_{(h)} \vec{W}^{n+1} \\ \vec{W}^{n+1} = -\chi^{n+1} \text{GRAD}_{(h)} T^{n+1} \end{cases} \quad (2)$$

Разностная схема на адаптивной сетке



Вводя простые итерации по нелинейному коэффициенту теплопроводности, получаем систему разностных уравнений, μ – итерационный индекс.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^{\mu+1} - \varepsilon^n}{\tau} + \frac{1}{\Delta m} \left[(RW_\eta)_2 - (RW_\eta)_4 \right]^{\mu+1} + \frac{1}{\Delta m} \left[(RW_\xi)_3 - (RW_\xi)_1 \right]^{\mu+1} = f^{n+1} \\ R_k = (r_k + r_{k+1})/2, \\ W_\xi^{\mu+1} + \frac{\kappa^\mu}{\Delta S} \alpha_1 (T_3 - T_1)^{\mu+1} = 0, \quad \alpha_1 = (z_3 - z_1)^2, \\ W_\eta^{\mu+1} + \frac{\kappa^\mu}{\Delta S} \alpha_2 (T_2 - T_4)^{\mu+1} = 0, \quad \alpha_2 = (r_2 - r_1)^2. \end{array} \right. \quad (3)$$

С помощью метода стабилизирующей поправки³, систему (3) сводим к двум одномерным системам. Счет на одной μ – итерации разбивается на два этапа.

³ Douglas J., Rachford H., On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables. // Trans.Amer.Math.Soc. – 1956. – 82, N2.

Аппроксимация уравнений



Для решения уравнений по нелинейности внутренней энергии используется метод Ньютона

- Этап 1: вдоль линий основной сетки с постоянным индексом j

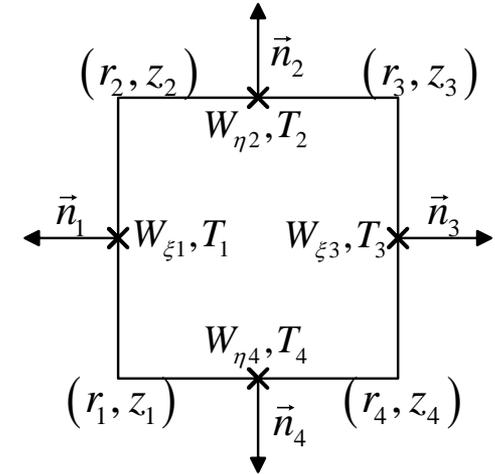
$$\begin{cases} T_4^{\nu+1} + T_2^{\nu+1} + \left[2\delta + \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} R_2^d \right] W_{\eta_2}^{\nu+1} - \left[2\delta + \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} R_4^d \right] W_{\eta_4}^{\nu+1} = (F_0), \\ 2\chi^{\mu} \frac{\tilde{h}_k^2}{\Delta S} (T_2 - T_4)^{\nu+1} + W_{\eta_2}^{\nu+1} + W_{\eta_4}^{\nu+1} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$(F_0) = \frac{2}{\varepsilon_T^{\nu}} (\varepsilon^n - \varepsilon^{\nu} + \varepsilon_T^{\nu} T^{\nu}) - \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} (R_3^d W_{\xi_3} - R_1^d W_{\xi_1})^{\mu},$$

- Этап 2: вдоль линий основной сетки с постоянным индексом i

$$\begin{cases} T_1^{\nu+1} + T_3^{\nu+1} + \left[2\delta + \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} R_3^d \right] W_{\xi_3}^{\nu+1} - \left[2\delta + \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} R_1^d \right] W_{\xi_1}^{\nu+1} = (F_1), \\ 2\chi^{\mu} \frac{\tilde{h}_k^2}{\Delta S} (T_3 - T_1)^{\nu+1} + W_{\xi_1}^{\nu+1} + W_{\xi_3}^{\nu+1} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$(F_1) = \frac{2}{\varepsilon_T^{\nu}} (\varepsilon^n - \varepsilon^{\nu} + \varepsilon_T^{\nu} T^{\nu}) - \frac{2\tau}{\varepsilon_T^{\nu} m} (R_2^d W_{\eta_2} - R_4^d W_{\eta_4})^{\mu+1/2}.$$



Организация счета прямой и встречной прогонок на адаптивной сетке



Потоковая прогонка⁴ предполагает рекуррентный расчет прогоночных коэффициентов для прямого направления от ячейки к ячейке, начиная с левой (нижней) границы, для обратного направления - от правой (верхней) границы к левой.

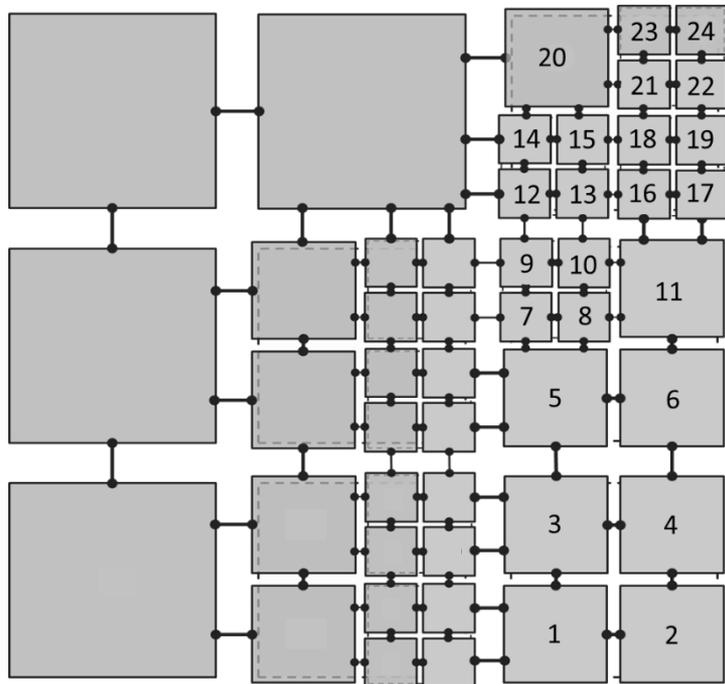
Напрямую использовать потоковую прогонку на адаптивной разностной сетке невозможно. В этом случае вдоль координатных линий основной сетки необходимо организовать передачу прогоночных коэффициентов от ячейки к ячейке.

В соответствии с направлением решения проводится упорядочивание ячеек.

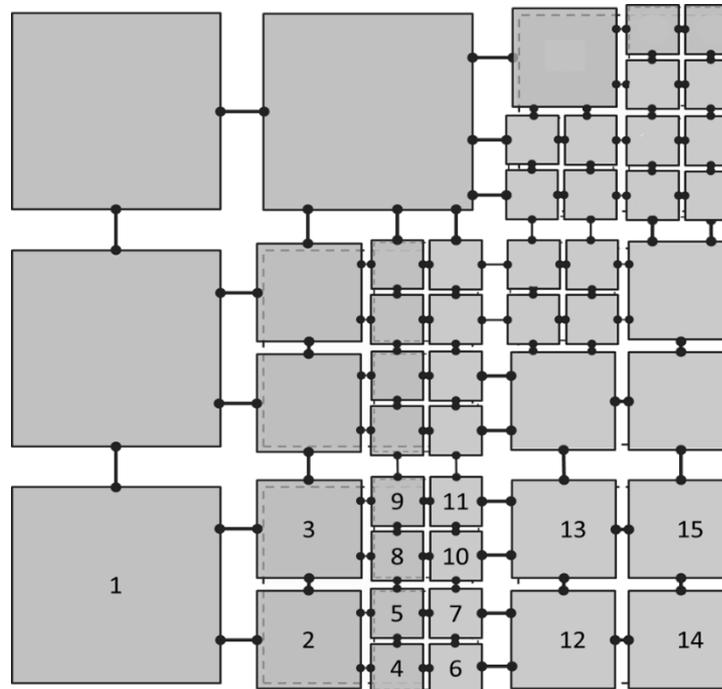
Для упорядочивания ячеек используется рекурсивная функция, в которой перебор ячеек осуществляется в порядке возрастания индекса основной сетки i – для первого этапа и j – для второго этапа от ячейки с нулевым уровнем по всем ее вложенным ячейкам. В массив упорядочивания записывается номер ячейки, принадлежащей данной адаптивной сетке. В результате получается массив упорядоченных ячеек с номерами $k = 0, \dots, K_j - 1$, где K_j – число ячеек нерегулярной адаптивной сетки, содержащихся в ячейках основной сетки вдоль выбранной координатной линии.

⁴ А.Д.Гаджиев, В.Н.Писарев. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979, т.19, № 5, с. 1288-1303.

Организация счета прямой и встречной прогонок на адаптивной сетке



- На этапе 1: нумерация ячеек снизу-вверх и слева-направо



- На этапе 2: нумерация ячеек слева-направо и снизу-вверх

Передача
прогоночных
коэффициентов

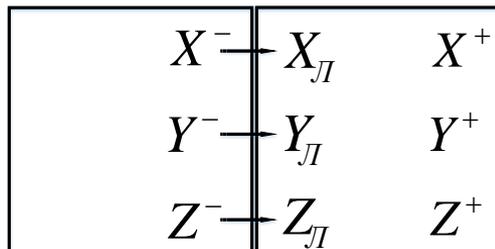
- Ячейки одного уровня адаптации
- Ячейки разного уровня адаптации

Организация счета прямой прогонки на адаптивной сетке



Формулы для вычисления коэффициентов прямой прогонки в ячейке k имеют вид:

$$X_k^+ = f(X_{\mathcal{L}}^k, Y_{\mathcal{L}}^k, Z_{\mathcal{L}}^k), \quad Y_k^+ = g(X_{\mathcal{L}}^k, Y_{\mathcal{L}}^k, Z_{\mathcal{L}}^k), \quad Z_k^+ = h(X_{\mathcal{L}}^k, Y_{\mathcal{L}}^k, Z_{\mathcal{L}}^k)$$



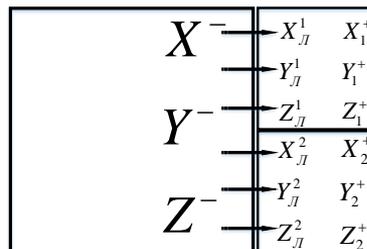
При равных уровнях адаптации

$$X_{\mathcal{L}} = X^-$$

$$Y_{\mathcal{L}} = Y^-$$

$$Z_{\mathcal{L}} = Z^-$$

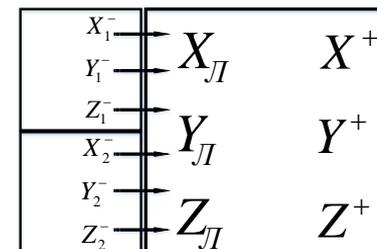
В ячейках с равными уровнями адаптации или в ячейках с более низким уровнем адаптации индекс k опущен



К ячейкам с более высоким уровнем адаптации

$$X_{\mathcal{L}}^{1,2} = \left(\frac{X}{Y}\right)^- \cdot \frac{1}{2^{|L-L_{1,2}|}}; \quad Y_{\mathcal{L}}^{1,2} = 1;$$

$$Z_{\mathcal{L}}^{1,2} = \left(\frac{Z}{Y}\right)^- \cdot \frac{1}{2^{|L-L_{1,2}|}}$$



К ячейке с более низким уровнем адаптации

$$X_{\mathcal{L}} = \frac{1}{R_{\mathcal{L}}} \sum_{m=1}^M \left(\frac{R \cdot X}{Y}\right)_m^-; \quad Y_{\mathcal{L}} = 1;$$

$$Z_{\mathcal{L}} = \frac{1}{R_{\mathcal{L}}} \sum_{m=1}^M \left(\frac{R \cdot Z}{Y}\right)_m^-$$

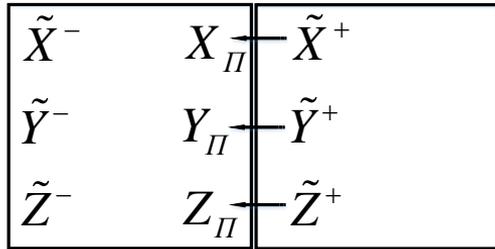
M – количество ячеек, граничащих с ячейкой k

Организация счета встречной прогонки на адаптивной сетке



Формулы для вычисления коэффициентов встречной прогонки в ячейке k имеют вид:

$$\tilde{X}_k^- = \tilde{f}(X_{\Pi}^k, Y_{\Pi}^k, Z_{\Pi}^k), \quad \tilde{Y}_k^- = \tilde{g}(X_{\Pi}^k, Y_{\Pi}^k, Z_{\Pi}^k), \quad \tilde{Z}_k^- = \tilde{h}(X_{\Pi}^k, Y_{\Pi}^k, Z_{\Pi}^k)$$

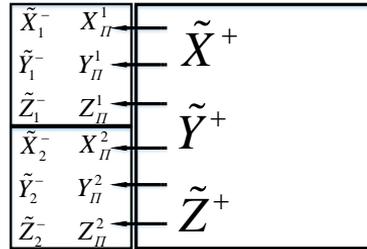


При равных уровнях адаптации

$$X_{\Pi} = X^+$$

$$Y_{\Pi} = Y^+$$

$$Z_{\Pi} = Z^+$$

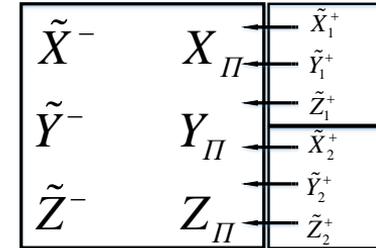


К ячейкам с более высоким уровнем адаптации

$$X_{\Pi}^{1,2} = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}} \right)^+ \cdot \frac{1}{2^{|L_{1,2} - L^+|}}$$

$$Y_{\Pi}^{1,2} = -1; \quad Z_{\Pi}^{1,2} = \left(\frac{\tilde{Z}}{\tilde{Y}} \right)^+ \cdot \frac{1}{2^{|L_{1,2} - L^+|}}$$

$$W_{1,2}^+ = \frac{X_{1,2}^- Z_{\Pi}^{1,2} - X_{\Pi}^{1,2} Z_{1,2}^-}{X_{1,2}^- Y_{\Pi}^{1,2} - X_{\Pi}^{1,2} Y_{1,2}^-}$$



К ячейке с более низким уровнем адаптации

$$W^- = \frac{1}{R_{\Pi}} \sum_{m=1}^M (R \cdot W)_m^+; \quad W_m^+ = \frac{X_{\Pi}^m \tilde{Z}_m^+ - \tilde{X}_m^+ Z_{\Pi}^m}{X_{\Pi}^m \tilde{Y}_m^+ - \tilde{X}_m^+ Y_{\Pi}^m}$$

$$X_{\Pi} = \frac{1}{R_{\Pi}} \sum_{m=1}^M \left(\frac{R \cdot X}{Y} \right)_m^+; \quad Y_{\Pi} = -1$$

$$Z_{\Pi} = \frac{1}{R_{\Pi}} \sum_{m=1}^M \left(\frac{R \cdot Z}{Y} \right)_m^+$$

Задача о тепловой волне



В области $D \in [0,10] \times [0,10]$ находится вещество с характеристиками

$$\rho = 1, c_v = 1, \chi(T) = 6T^3.$$

Начальное распределение температуры:

$$T(x, y, 0) = T_0 = 1 \cdot 10^{-5}$$

Граничные условия: $T_{zp} \Big|_{z=0} = (12.5t)^{1/3}$

$$W(10, y, t) = W(x, 10, t) = 0,$$

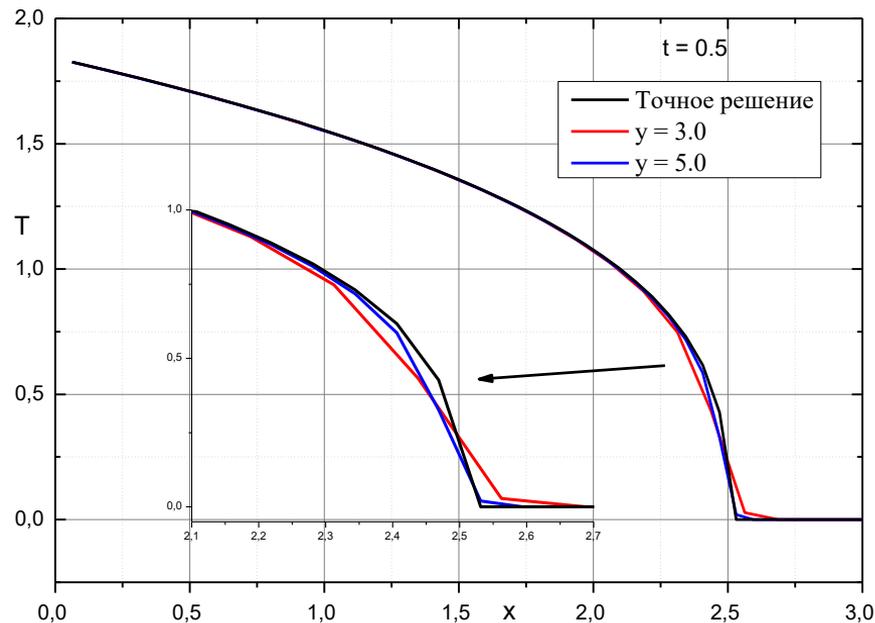
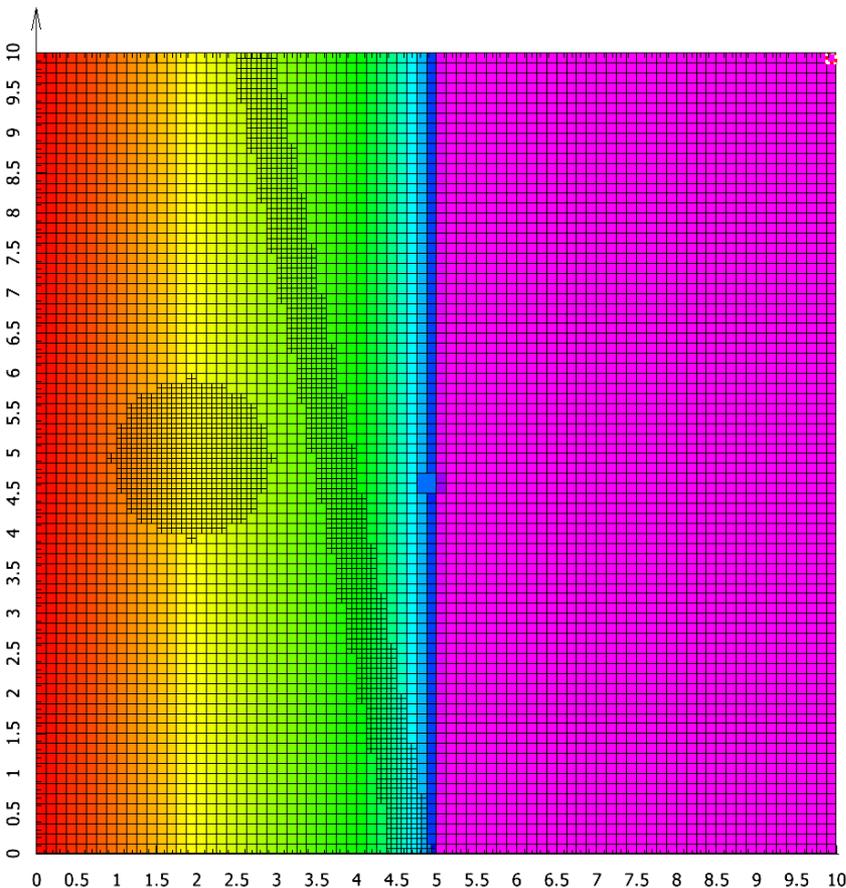
где $t \in [0, t_{end}]$.

Расчеты проводились с начальными пространственными шагом $h = 0.25$,
с временным шагом $\tau = 10^{-3}$ до времени $t_{end} = 1$.

Задача в данной постановке имеет аналитическое решение⁵ в виде

$$T(x, t) = \begin{cases} (2.5(5t - x))^{1/3}, & x < 5t \\ 0, & x \geq 5t \end{cases}$$

Сравнение решений на адаптивных сетках



$$\delta_y = \frac{\|T_y - T\|_{L_1}}{\|T\|_{L_1}} 100\% \quad \delta_{y=3} = 0.24\%; \delta_{y=5} = 0.14\%$$

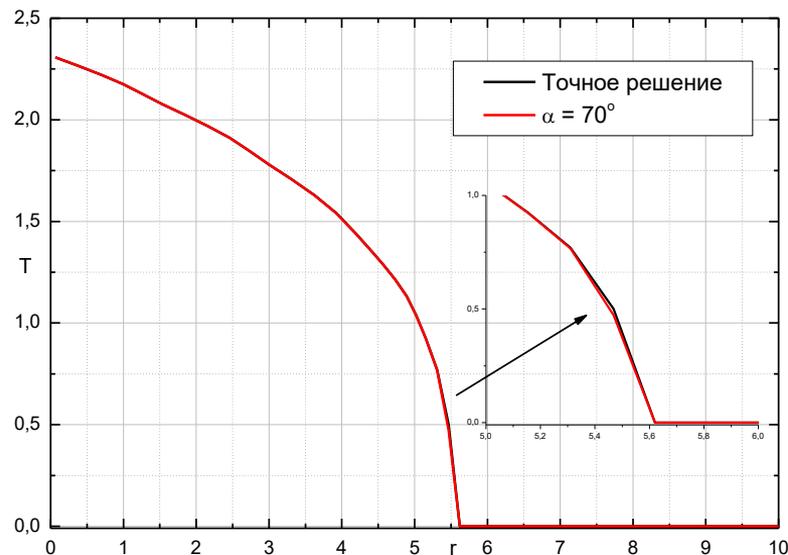
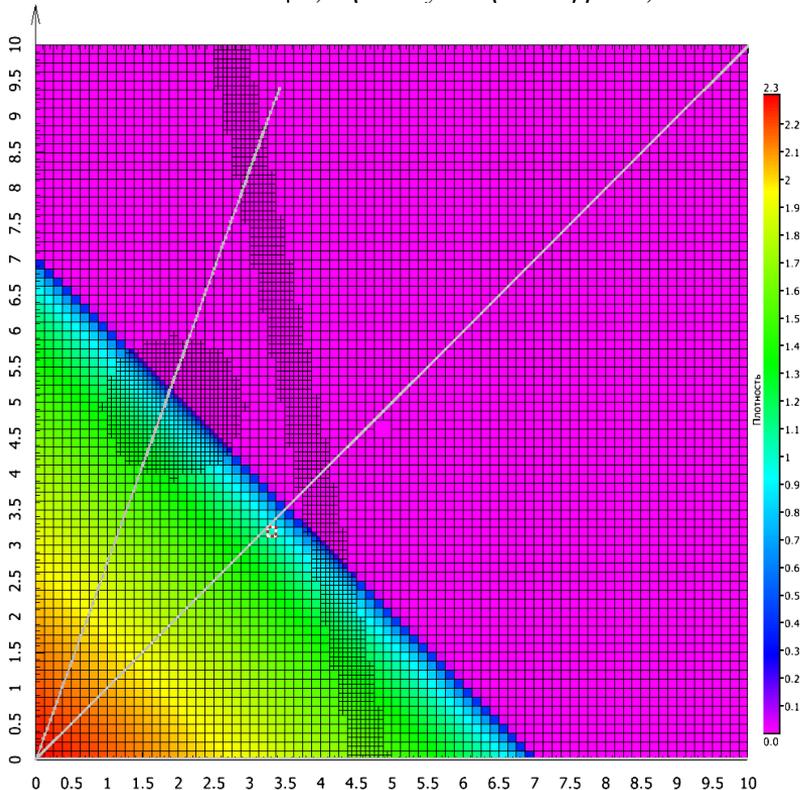
На основной сетке: $\delta_y = 0.75\%$

Диагональное распространение тепловой волны



РФАЖ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

$$\text{Г.у.: } T(0, y, t) = \begin{cases} (2.5(5t - y \sin(\pi/4)))^{1/3}, & (5t - y \sin(\pi/4)) > 0, \\ 0, & (5t - y \sin(\pi/4)) \leq 0, \end{cases} \quad T(x, 0, t) = \begin{cases} (2.5(5t - x \cos(\pi/4)))^{1/3}, & (5t - x \cos(\pi/4)) > 0, \\ 0, & (5t - x \cos(\pi/4)) \leq 0, \end{cases}$$



$$\delta_{\alpha=0} = 0.28\% \quad \delta_{\alpha=45} = 0.2\% \quad \delta_{\alpha=70} = 0.07\%$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ



- Двумерное уравнение лучистой теплопроводности аппроксимируется в соответствии с идеологией схемы «Ромб»
- Полученная разностная схема аппроксимирует исходные уравнения в пределах одной сеточной ячейки адаптивно-встраиваемой сетки
- Двумерные разностные уравнения решаются с использованием метода расщепления, сводя двумерную задачу к ряду более простых одномерных задач, но на нерегулярной сетке
- Для решения полученных СЛАУ на адаптивно-встраиваемых сетках был адаптирован метод потоковой прогонки
- Приведены сравнительные результаты расчётов модельных задач на адаптивно-встраиваемых дробных сетках
- Адаптация сетки позволяет уменьшить погрешность вычисления