



Линеаризация и численное исследование полной системы уравнений Навье-Стокса

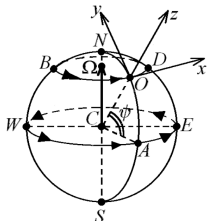
Бугаенко А. А., Крутова И. Ю.

СФТИ НИЯУ МИФИ

Снежинск 2025

Полная система уравнений Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \frac{1}{\gamma}T_x = av - bw + \left(\frac{\mu_0}{\rho} \left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right) \right), \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = -au + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\gamma - 1)T(u_x + v_y + w_z) = \frac{\kappa_0}{\rho} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma - 1)}{2\rho} [(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2 + \\ + \frac{3}{2} ((u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2)] \end{array} \right. \quad (1)$$



Обозначения

$\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3); \quad \mathbf{\Omega} = (0; \Omega_2; \Omega_3);$
 $\Omega_2 = \Omega \cos \psi; \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi, \quad \sin \psi > 0;$
 $a = 2\Omega_3; \quad b = 2\Omega_2; \quad \mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad g = \text{const} > 0.$

Масштабные значения

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}; \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}; \quad e_{00} = c_{v0}T_{00};$$

$$\gamma = 1 + R/c_{v0}, \quad u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3}10^3, \quad \rho_{00} = 1.29 \text{ кг/м}^3, \quad T_{00} = 288 \text{ K}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 * 3600 \text{ с}} * t_{00}, \quad g = g_* \frac{T_{00}}{c_{00}},$$

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{4}{3} \frac{\gamma}{Pr} \mu_0$$

Для воздуха $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.72$, $\kappa_0 \approx 1.46\mu_0$

Точное решение системы (1) в случае $g = 0$

$$\rho = 1; \quad T = 1; \quad u = v = w = 0. \quad (2)$$

$$\rho = 1 + \tilde{\rho}; \quad T = 1 + \tilde{T}; \quad \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}.$$

Линеаризованная система уравнений Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) = 0, \\ \tilde{u}_t + \frac{\tilde{\rho}_x}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_x}{\gamma} - a\tilde{v} + b\tilde{w} - \mu_0 \left(\tilde{u}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{xz} \right) = 0, \\ \tilde{v}_t + \frac{\tilde{\rho}_y}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_y}{\gamma} + a\tilde{u} - \mu_0 \left(\frac{3}{4}\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{v}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{yz} \right) = 0, \\ \tilde{w}_t + \frac{\tilde{\rho}_z}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_z}{\gamma} - b\tilde{u} - \mu_0 \left(\frac{3}{4}\tilde{w}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{w}_{yy} + \tilde{w}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{yz} \right) = 0, \\ \tilde{T}_t + (\gamma - 1)(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) - \kappa_0 \left(\tilde{T}_{xx} + \tilde{T}_{yy} + \tilde{T}_{zz} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Разностная аппроксимация линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}, \quad (5)$$

$$f = (\rho, T, u, v, w)$$

$$0 \leq x \leq x_0, \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad 0 \leq z \leq z_0.$$

Разностная схема

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} - av_{i,j,k}^n + bw_{i,j,k}^n - \\ & - \mu_0 \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} - \\ & - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} - \\ & - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + au_{i,j,k}^n - \\ & - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} - \mu_0 \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} - \\ & - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} - \\ & - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z} = 0, \end{aligned}$$

Разностная схема

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} - bu_{i,j,k}^n - \\ & - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} - \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} - \\ & - \mu_0 \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z} - \\ & - \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) - \\ & - \kappa_0 \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} - \kappa_0 \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} - \\ & - \kappa_0 \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} = 0. \end{aligned}$$

Численное моделирование течений в ВЗП

продув: 0.1x0.1

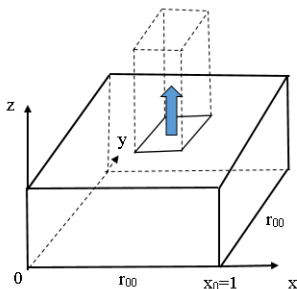


Рис.1 Расчетная область

$$\rho_0 = \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}$$

$$T_0(z) = 1 - kz, k = \frac{Lr_{00}}{T_{00}}$$

$$\nu = \frac{\gamma g}{k}, L = 0.0065$$

$$u_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0,$$

$$\Delta t = 0.001$$

$$\Delta x = \Delta y = 0.005$$

в ВЗП малых масштабов

$$r_{00} = 10 \text{ м}$$

$$\Delta z = 0.005, w(t) = 0.003(1 - e^{-10t})$$

в ВЗП средних масштабов

$$r_{00} = 50 \text{ м}$$

$$\Delta z = 0.004, w(t) = 0.003(1 - e^{-10t})$$

в ВЗП больших масштабов

$$r_{00} = 50000 \text{ м}$$

$$\Delta z = 0.002, w(t) = 0.0125(1 - e^{-10t})$$

$z = 0.025(0.25\text{м}), r_{00} = 50 \text{ м}, \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.005(0.05\text{м}),$
 $\Delta t = 0.001(0.00003\text{с}), w(t) = 0.003 * (1 - e^{-10*t}), w : 0 \div 1\text{м/с}$

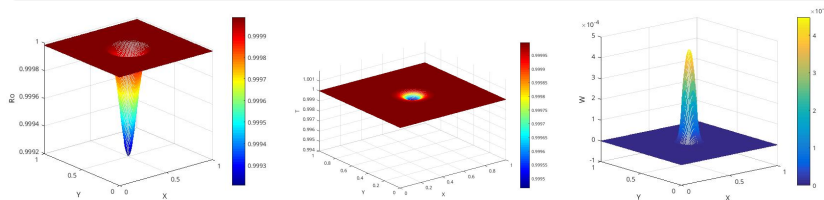


Рис.2 $t=0.1\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

в - W

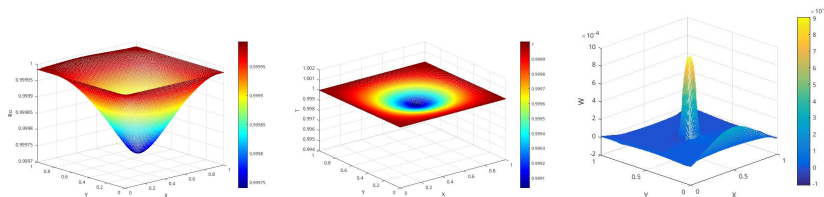


Рис.3 $t=300\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

в - W

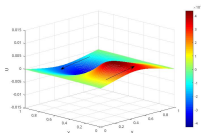
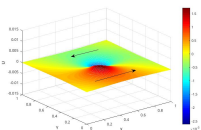
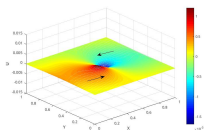
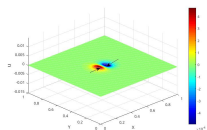


Рис.4 U a - $t=0.5c$

b - $t=1c$

c - $t=5c$

d - $t=300c$

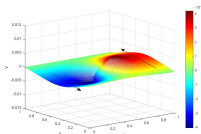
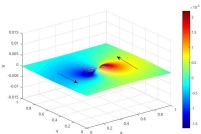
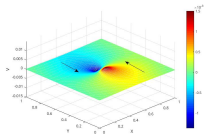
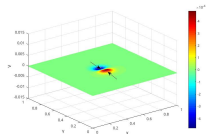


Рис.4.1 V a - $t=0.5c$

b - $t=1c$

c - $t=5c$

d - $t=300c$

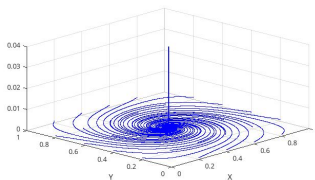
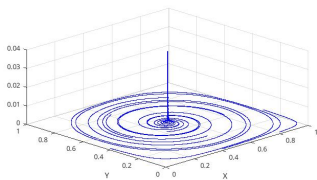


Рис.5 Линии тока

Численное моделирование течений в ВЗП малых масштабов (сравнение) ¹

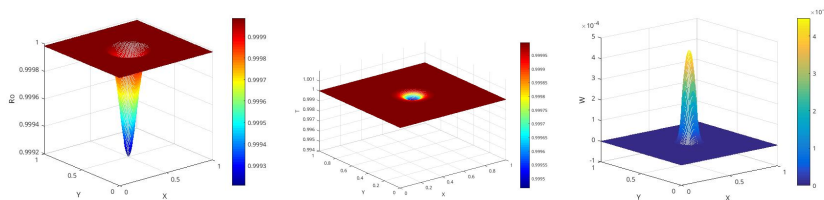


Рис.6 Линеаризованная ПСУНС: плотность, температура и W при $t=0.1s$

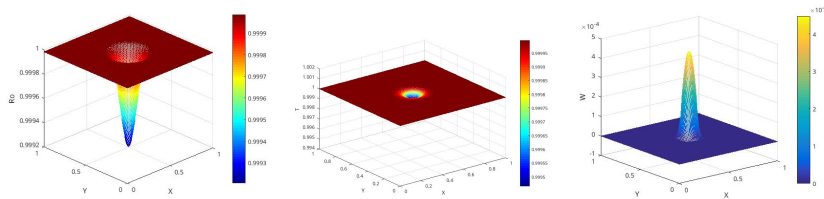


Рис.7 ПСУНС: плотность, температура и W при $t=0.1s$

¹С.П. Баутин, А.Г. Обухов. Численное моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2020.

Численное моделирование течений в ВЗП малых масштабов (сравнение)

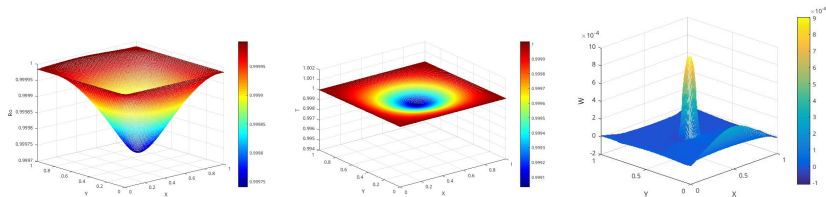


Рис.8 Линеаризованная ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300$ с

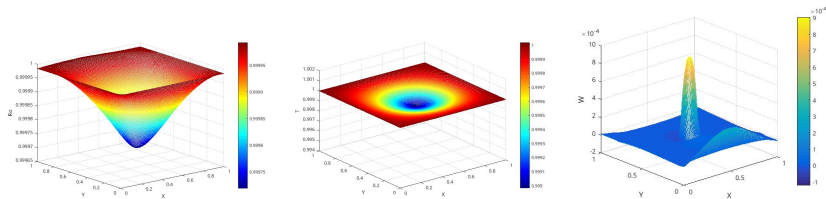


Рис.9 ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300$ с

Численное моделирование течений в ВЗП средних масштабов

$z = 0.02(1\text{м}), r_{00} = 50 \text{ м}, \Delta x = \Delta y = 0.005(0.25\text{м}), \Delta z = 0.004(0.2\text{м}),$
 $\Delta t = 0.001(0.00015\text{с}), w(t) = 0.003 * (1 - e^{-10*t}), w : 0 \div 1\text{м/с}$

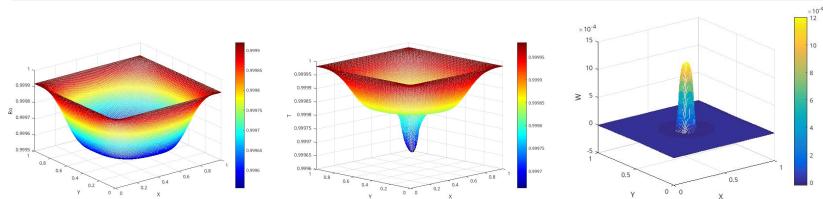


Рис.10 $t=0.5\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

с - W

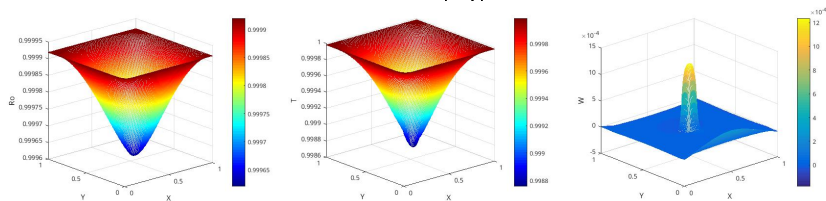


Рис.11 $t=300\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

с - W

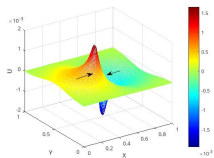


Рис.12 U при $t=0.5c$

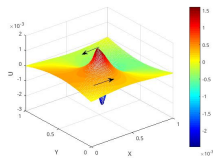


Рис.13 U при $t=2c$

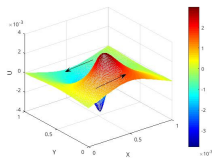


Рис.14 U при $t=10c$

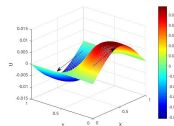


Рис.15 U при $t=300c$

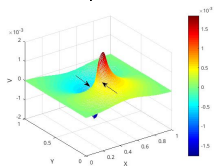


Рис.12.1 V при $t=0.5c$

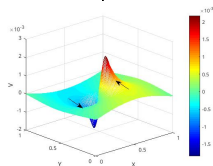


Рис.13.1 V при $t=2c$

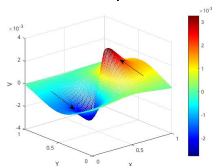


Рис.14.1 V при $t=10c$

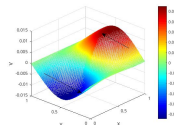


Рис.15.1 V при $t=300c$

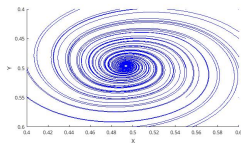
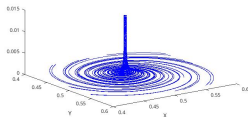


Рис.16 Линии тока

Численное моделирование течений в ВЗП средних масштабов (сравнение)

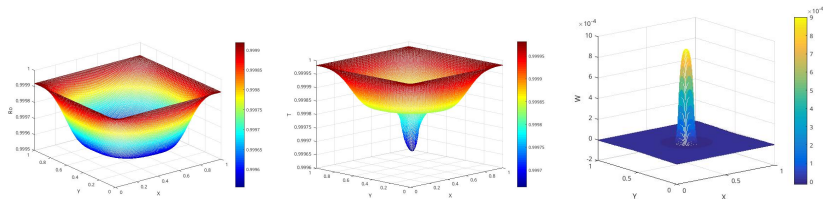


Рис.17 Линеаризованная ПСУНС: плотность, температура и W при $t=0.5s$

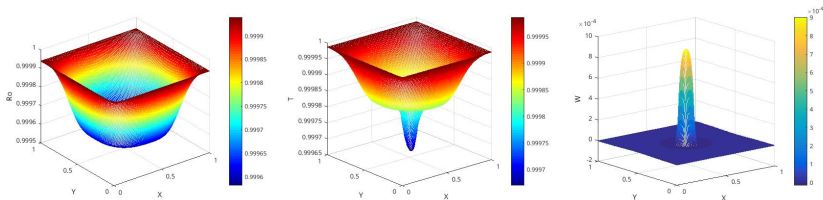


Рис.18 ПСУНС: плотность, температура и W при $t=0.5s$

Численное моделирование течений в ВЗП средних масштабов (сравнение)

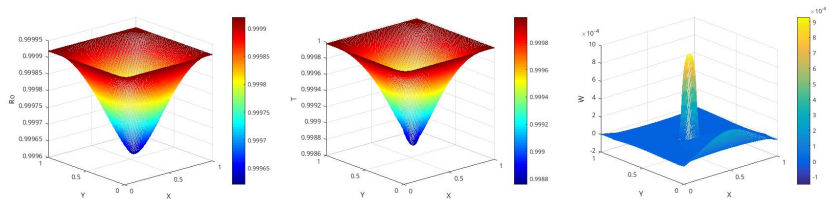


Рис.19 Линеаризованная ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300s$

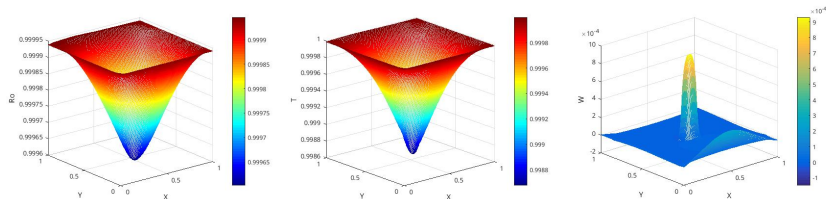


Рис.20 ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300s$

$z = 0.01(500\text{м})$, $r_{00} = 50000 \text{ м}$, $\Delta x = \Delta y = 0.005(250\text{м})$, $\Delta z = 0.002(100\text{м})$,
 $\Delta t = 0.001(0.15\text{с})$, $w(t) = 0.125 * (1 - e^{-10*t})$, $w : 0 \div 4.16\text{м/с}$

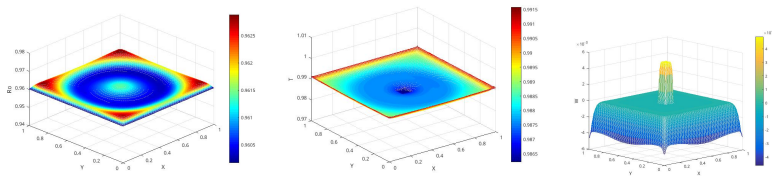


Рис.9 $t=0.5\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

с - W

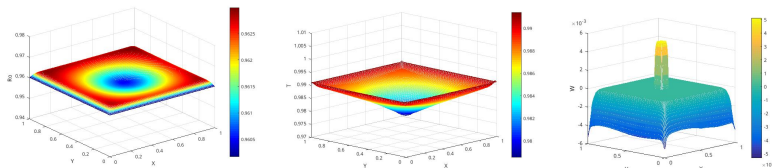


Рис.21 $t=300\text{с}$ а - Плотность

б - Температура

с - W

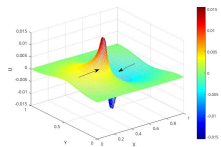


Рис.21 U при $t=0.5c$

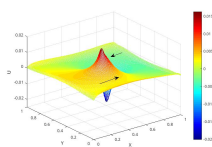


Рис.22 U при $t=2c$

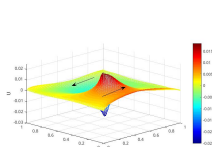


Рис.23 U при $t=5c$

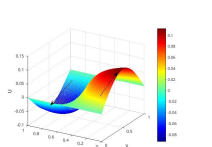


Рис.24 U при $t=300c$

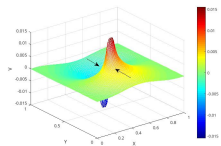


Рис.21.1 V при $t=0.5c$

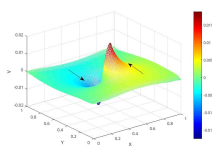


Рис.22.1 V при $t=2c$

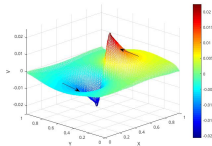


Рис.23.1 V при $t=5c$

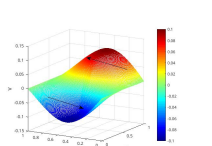


Рис.24.1 V при $t=300c$

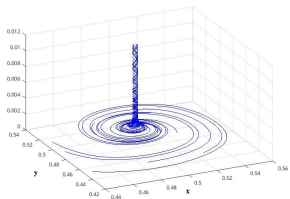


Рис.25 Линии тока

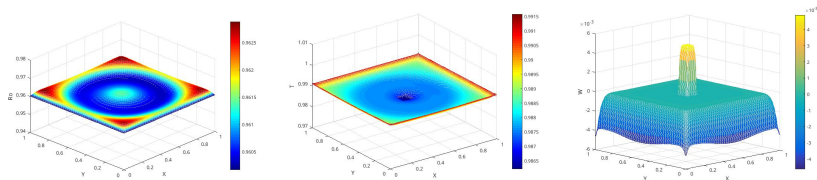


Рис.26 Линеаризованная ПСУН: плотность, температура и W при $t=0.5s$

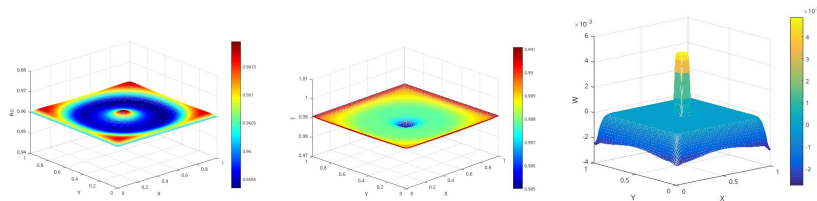


Рис.27 ПСУН: плотность, температура и W при $t=0.5s$

Численное моделирование течений в ВЗП больших масштабов (сравнение)

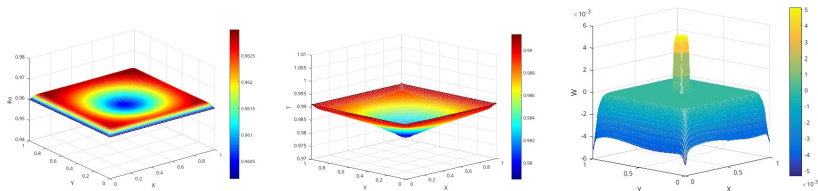


Рис.28 Линеаризованная ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300c$

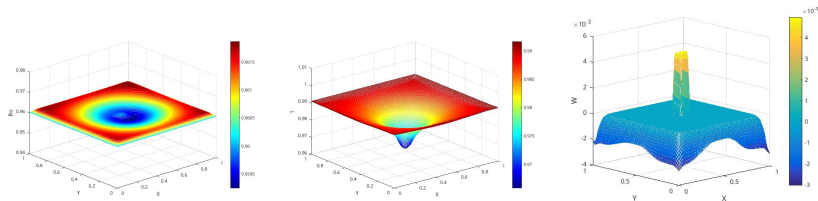


Рис.29 ПСУНС: плотность, температура и W при $t=300c$

Сравнительная таблица термодинамических характеристик, полученных при численном моделировании течений в ВЗП различных масштабов ПСУНС и линеаризованной ПСУНС

	$r_{00}=10\text{ m}$			$r_{00}=50\text{ m}$			$r_{00}=50000\text{ m}$		
	Лин	НЕЛин		Лин	НЕЛин		Лин	НЕЛин	
	$t=0.1$			$t=0.5$			$t=0.5$		
min Ro	0.9992	0.9992	0.00%	0.9996	0.9996	0.00%	0.9605	0.9595	0.10%
min T	0.9995	0.9995	0.00%	0.9997	0.9997	0.00%	0.9865	0.986	0.05%
max W	0.0004	0.0004	0.00%	0.0009	0.0009	0.00%	0.004	0.004	0.00%
	$t=300$			$t=300$			$t=300$		
min Ro	0.99965	0.9997	-0.01%	0.99955	0.99945	-0.01%	0.9605	0.9595	0.10%
min T	0.998	0.998	0.00%	0.9975	0.997	-0.05%	0.98	0.97	1.03%
max U	0.005	0.005	0.00%	0.01	0.01	0.00%	0.1	0.1	0.00%
max V	0.005	0.005	0.00%	0.01	0.01	0.00%	0.1	0.1	0.00%
max W	0.0008	0.0008	0.00%	0.0009	0.0009	0.00%	0.004	0.004	0.00%

$$E \approx 0.5 \sum_i \sum_j \sum_k \rho_{i,j,k} (u_{i,j,k}^2 + v_{i,j,k}^2 + w_{i,j,k}^2) \Delta x \Delta y \Delta z$$

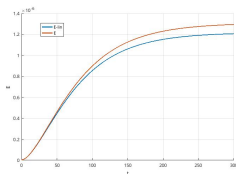


Рис.30 E(r00=10м)

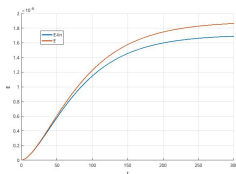


Рис.31 E(r00=50м)

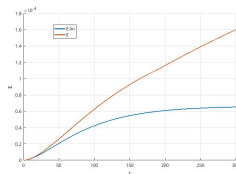


Рис.32 E(r00=50000м)

Размерное значение полной кинетической энергии (Дж)

$$W^* = W \cdot \rho_{00} \cdot v_{00}^2 \cdot r_{00}^3$$

			r0_00	v^2				
	НЕлин	Лин	1.2928	110889	r00^3	W* Нелин	W* лин	
W1	1.21E-06	1.30E-06			1.00E+03	1.73E+02	1.86E+02	6.76%
W2	1.87E-06	1.69E-06			1.25E+05	3.34E+04	3.03E+04	9.31%
W3	1.60E-04	6.55E-05			1.25E+14	2.8714E+15	1.1729E+15	59.15%

- 1 Численное решение линеаризованной ПСУНС описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа
- 2 Схема возникновения ВЗП² получила численное подтверждение
- 3 Получено качественное и количественное согласие в поведении газодинамических характеристик линеаризованной и ПСУНС

Спасибо за внимание!

Бугаенко Анна Анатольевна
BugaenkoAA@vniitf.ru

²С.П. Баутин, И.Ю. Крутова, А.Г. Обухов. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург: УрГУПС, 2020.