

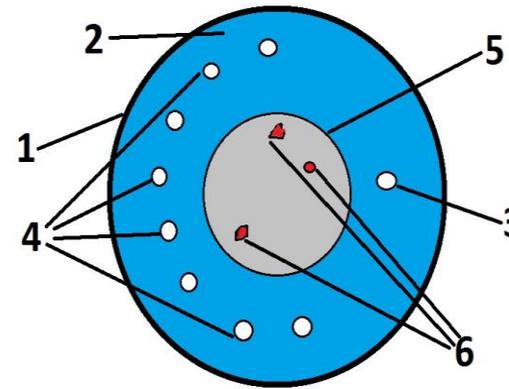


# Волновая томография в медицине: теория и численные методы

М.А. Шишленин, С.И. Кабанихин, Н.С. Новиков,  
Д.В. Ключинский, Н.А. Савченко, М.Р. Дударь

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

XVII Международная конференция  
«Ззабабахинские научные чтения»  
19–23 мая 2025, Снежинск



- 1 – Граница томографа
- 2 – Наполнитель (вода)
- 3 – Источник сигнала
- 4 – Приёмники
- 5 – Исследуемое тело
- 6 – Неоднородности

**МГУ - прототип акустического томографа**  
**29 января 2025. О.Д. Румянцева и научная группа, М.А. Шишленин**

**Цель:** Разработка методов и алгоритмов раннего выявления опухолевых новообразований в мягких тканях человека и апробация на реальных данных.

**Междисциплинарный проект РФ**  
**ИМ СО РАН, РФЯЦ-ВНИИЭФ, МГУ:**  
**цифровой двойник + прототип отечественного медицинского акустического томографа**

Ранняя диагностика опухолей является одной из ключевых проблем в медицине.

Одной из основных проблем ультразвуковой томографии является разработка методов решения нелинейных обратных задач. Наиболее подходящей моделью является трехмерная обратная задача, в которой скорость распространения волн, плотность и другие акустические параметры восстанавливаются по данным регистрируемыми детекторами, расположенными на границе исследуемой области.

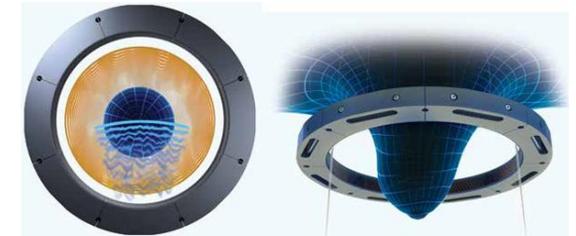
Обратные задачи волновой томографии и геометрической оптики были исследованы в работах [Duric et al 2007; Huang et al 2007; Glide et al 2008; Natterer 2011; Wiskin et al 2012; Jirik et al 2012]. В последнее время эта область интенсивно изучается [Novikov, Grinevich; Novikov; Duric et al 2007, 2012; Jirik and others 2012; Wiskin et al 2013, 2017, 2019].

Применены следующие подходы к восстановлению скорости звука, основанные на миграции Кирхгофа [Duric et al 2007, 2012], обработке изображений [Jirik et al 2012], обратная задача для уравнения Гельмгольца [Wiskin et al 2013, 2017; Bakushinsky, Leonov, 2019, 2020], обратные задачи для волнового уравнения 2 порядка [Goncharsky et al 2014, 2017], обратная миграция по времени [Filatova et al 2016, 2018].

## Delphinus Medical Technologies, Inc., Novi, Michigan

**Neb Duric,**  
Co-Founder And Chief Technology Officer

**Peter J. Littrup,**  
Co-Founder And Medical Advisor



<https://www.delphinusmt.com/technology/>

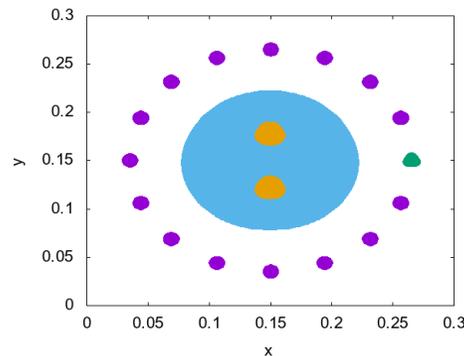
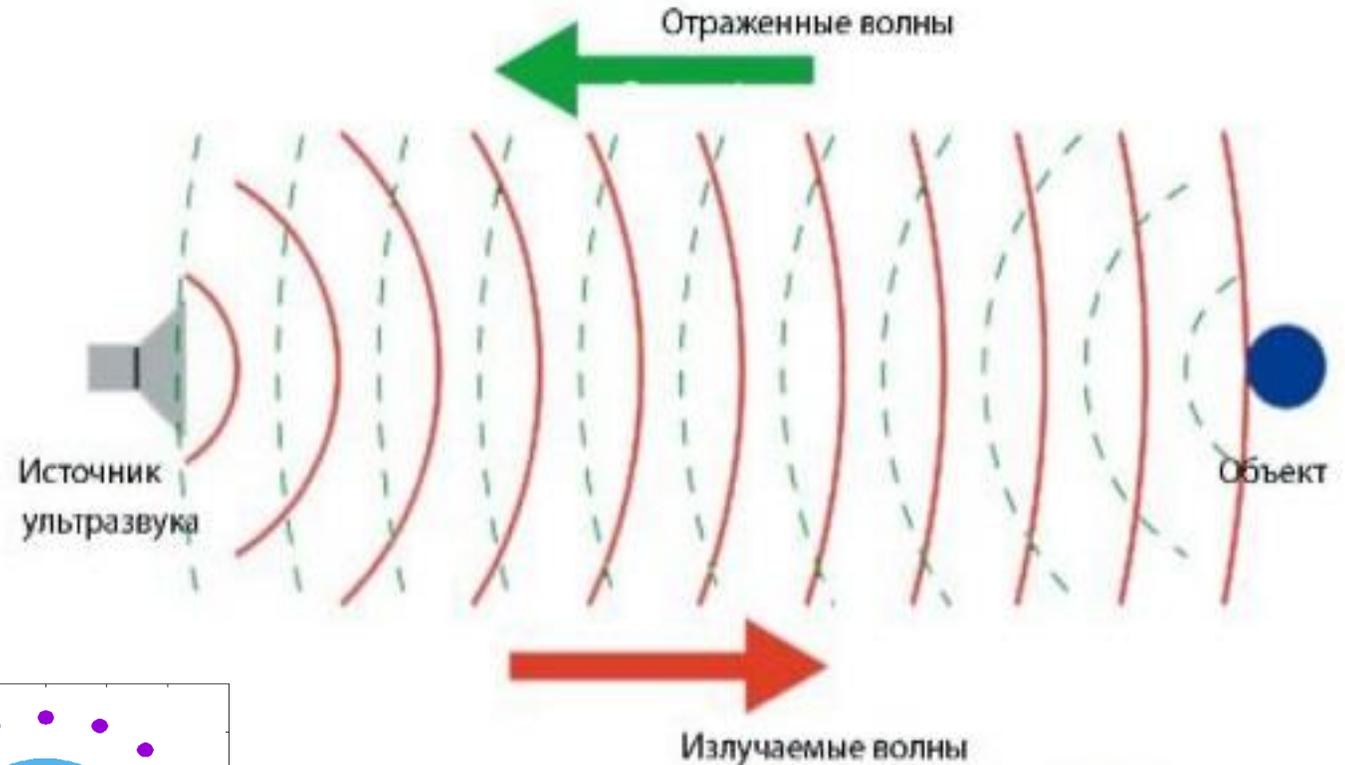
# Как моделировать распространение волны в исследуемом объекте?

Колебания точек среды описываются функциями:

$u = u(x, y, t)$  – скорость смещения точек среды по переменной  $x$

$v = v(x, y, t)$  – скорость смещения точек среды по переменной  $y$

$p = p(x, y, t)$  – акустическое давление



## Прямая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sigma p + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \Theta_{\Omega}(x, y) I(t)$$

$$\Omega = (x, y) \in [0: L] \times [0: L]$$

$$(x, y) \in \Omega$$

$$0 < t < T$$

Начальные условия  $u, v, p \Big|_{t=0} = 0$

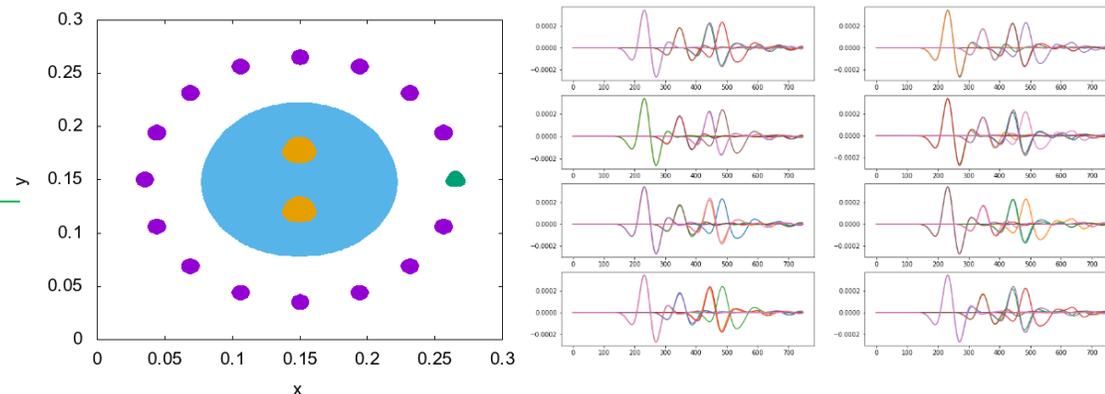
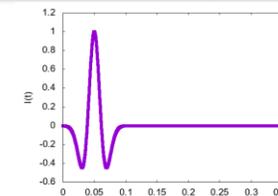
Неотражающие граничные условия

**Обратная задача:** найти  $\rho, c, \sigma$  в  $\Omega$

$p(x_i, y_i, t) = f_i(t)$  - давление в приемниках

## Импульс Рикера

$$I(t) = \left( 1 - 2 \left( \pi v_0 \left( t - \frac{1}{v_0} \right) \right)^2 \right) e^{-\pi v_0 \left( t - \frac{1}{v_0} \right)}$$



T.D. Mast, L.M. Hinkelman, L.A. Metlay, M.J. Orr, R. C. Waag, *Simulation of ultrasonic pulse propagation, distortion, and attenuation in the human chest wall. J. Acoust. Soc. Am.* (1999) 106, No. 6.

Romanov V.G., Kabanikhin S.I. *Inverse problems of geoelectrics*, 1991.

Imanuvilov, O.Y.; Isakov, V.; Yamamoto, M. *An inverse problem for the dynamical Lamé system with two sets of boundary data. Comm. Pure Appl. Math.* 2003, 56.

Beilina, L.; Cristofol, M.; Li, S.; Yamamoto, M. *Lipschitz stability for an inverse hyperbolic problem of determining two coefficients by a finite number of observations. Inverse Probl.* 2017, 34, 015001.

# Метод решения задачи – минимизация целевого функционала

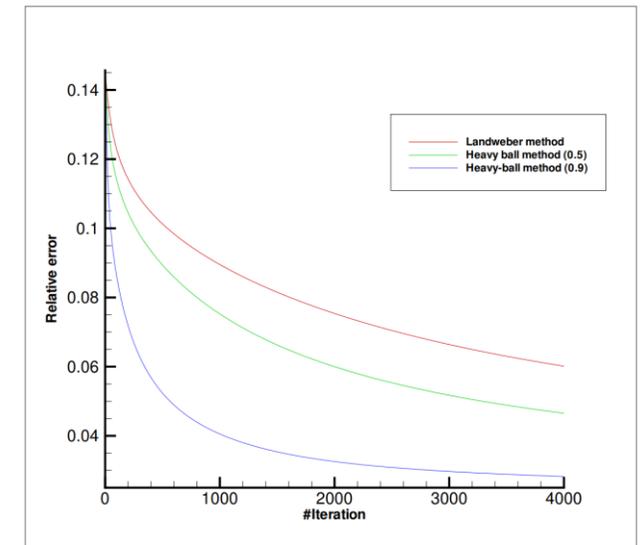
$$A(\mathbf{q}) = \mathbf{f}, \quad J(\mathbf{q}) = \|A(\mathbf{q}) - \mathbf{f}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q}=(c,\rho,\sigma)}$$

$$J(\mathbf{q}) = \int_0^T \sum_{i=1}^N [p(x_i, y_i, t; \mathbf{q}) - f_i(t)]^2 dt \rightarrow \min_{\mathbf{q}=(c,\rho,\sigma)}$$

**Градиентный метод:**  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha_n [A'(\mathbf{q}_n)]^* (A(\mathbf{q}_n) - \mathbf{f})$   
 $J'(\mathbf{q}_n) = 2[A'(\mathbf{q}_n)]^* (A(\mathbf{q}_n) - \mathbf{f})$

**Метод heavy-ball:**  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha_n J'(\mathbf{q}_n) + \beta_n (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1})$

**Метод Ю.Е. Нестерова:**  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n - \alpha_n J'(\mathbf{q}_n + \beta_n (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1})) + \beta_n (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{n-1})$



Кабанихин С.И. Регуляризация операторного уравнения Вольтерра первого рода с ограничено липшиц-непрерывным ядром. ДАН СССР. 1989. Т. 39. № 3.  
S.I. Kabanikhin, O. Scherzer, M.A. Shishlenin. Iteration methods for solving a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. 11(1).

A. d'Aspremont, D. Scieur, A. Taylor. Acceleration Methods. Foundations and Trends® in Optimization. 2021. Vol. 5: No. 1–2.

## Акустические параметры тела человека

Голубинский А. Н., Дворянкин С. В. К вопросу о параметризации результатов акустического зондирования тела человека (АЧХ) при реализации контактно-разностного метода аудиоидентификации. Спецтехника и связь. 2011. № 2.

T. Douglas Mast. Empirical relationships between acoustic parameters in human soft tissues. Acoustics Research Letters Online 1 (2000).

S. A. Goss, R. L. Johnston, F. Dunn. Comprehensive compilation of empirical ultrasonic properties of mammalian tissues. The Journal of the Acoustical Society of America 64 (1978).

$$\rho_{n+1} = \rho_n - \alpha_\rho J'(\rho_n), c_{n+1} = c_n - \alpha_c J'(c_n), \sigma_{n+1} = \sigma_n - \alpha_\sigma J'(\sigma_n)$$

$$J'(\rho) = \int_0^T \left[ -u\psi_{1t} - v\psi_{2t} + \frac{\psi_3}{\rho} (u_x + v_y) \right] dt$$

$$J'(c) = \int_0^T \frac{\psi_3}{c^2} (u_x + v_y) dt$$

$$J'(\sigma) = \int_0^T \frac{p(x, y, t) \Psi_3(x, y, t)}{\rho c^2(x, y)} dt.$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \sigma \psi_3 + \rho c^2 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) = 2 \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i, y - y_i) [p - f_i]$$

$u, v, p$  - решение прямой задачи

$\psi_1, \psi_2, \psi_3$  - решение сопряженной задачи

*Kabanikhin S.I., Klyuchinskiy D.V.,  
Novikov N.S., Shishlenin M.A.  
Numerics of acoustical 2D tomography  
based on the conservation laws.  
Journal of Inverse and Ill-Posed  
Problems, 2020, 8(2).  
Klyuchinskiy D., Novikov N., Shishlenin  
M.A. Modification of gradient descent  
method for solving coefficient inverse  
problem for acoustics equations.  
Computation, 2020, 8(3), № 73.*

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3 \Big|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0$$

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3 \Big|_{t=T} = 0$$

**Структура градиентных методов:**  $q_{n+1} = q_n - \alpha(A'(q_n))^* (A(q_n) - f)$

[Hanke, Neubauer, Scherzer, 1995]: градиентный метод локально сходится, если в некоторой окрестности точного решения выполняются условия:

1.  $\|A'(q)\| \leq \mu < 1,$

2.  $\|A(x) - A(y) - A'(y)(x - y)\| \leq \eta \|A(x) - A(y)\|, 0 < \eta < 1/2.$

Верна оценка  $\|q_{n+1} - q_{\text{точное}}\| \leq M\beta^{n+1}, 0 < \beta < 1.$

*M. Hanke, A. Neubauer, O. Scherzer, A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems. Numer. Math. 1995. 72.  
S.I. Kabanikhin, O. Scherzer, M.A. Shishlenin. Iteration methods for solving a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. 11(1).*

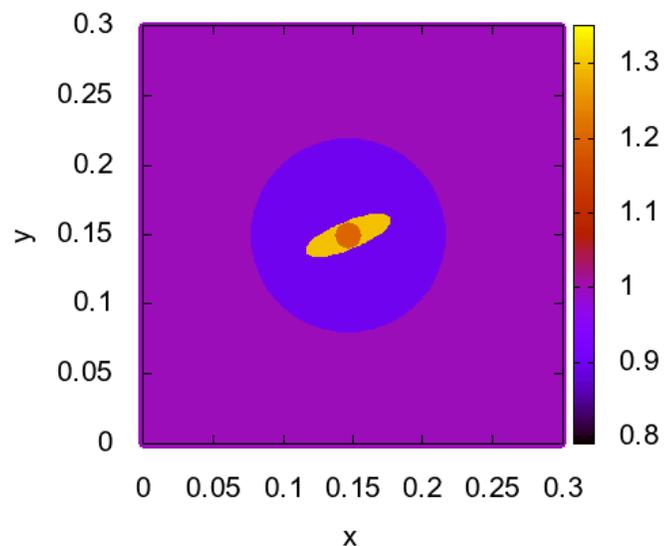
Использование априорной информации о решении: гладкость, монотонность...

На каждой итерации приближенное решение проектируется в искомый класс функций.

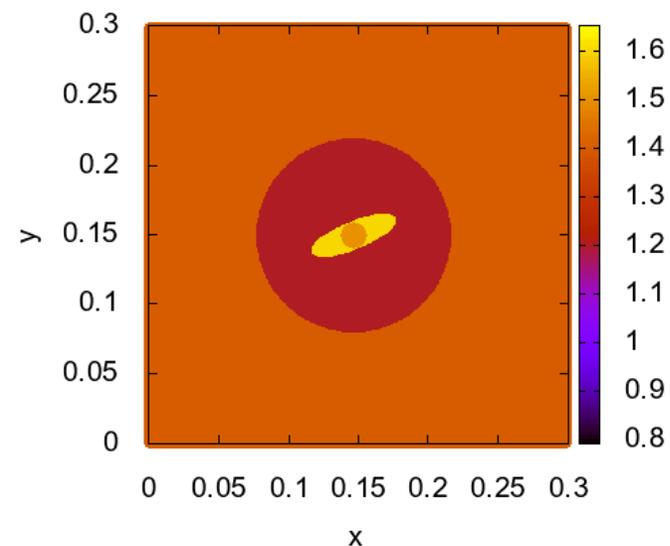
*Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. 2005.*

*Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений. Труды ИММ УрО РАН. 2012. 18(1).*

**Плотность (точное значение )**



**Скорость звука в среде (точное значение)**



**Наполнитель – вода, исследуемая область (круг) – человеческая ткань (жир),  
внутри – включения большей плотности. В начальном приближении информация  
о включениях отсутствует.**

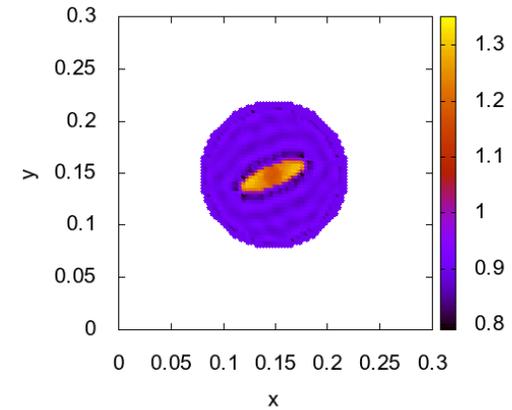
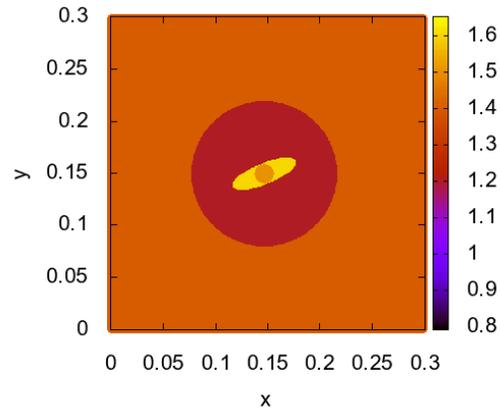
# Пример: Восстановление одного из параметров ( плотности)

Как точность зафиксированной скорости звука влияет на восстановление плотности?

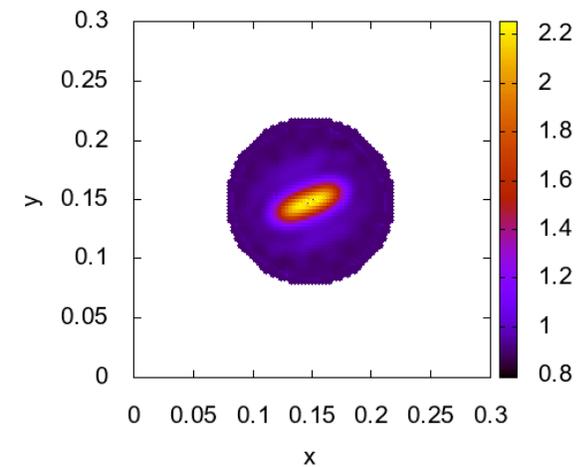
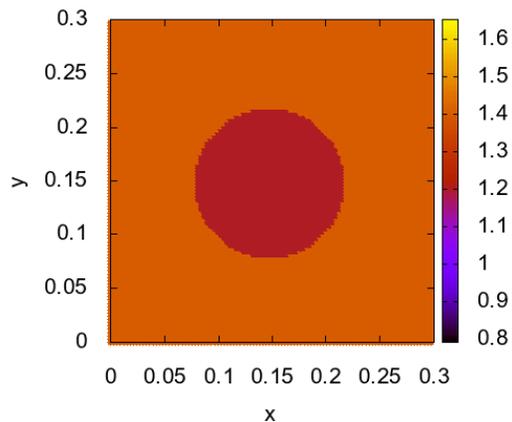
Значение фиксированной скорости звука в среде

Результат восстановления плотности ( 1000 итераций, шаг сетки 3мм, система из 8 источников и приёмников)

Скорость известна точно



Скорость известна приближённо



# Пример: Восстановление двух параметров

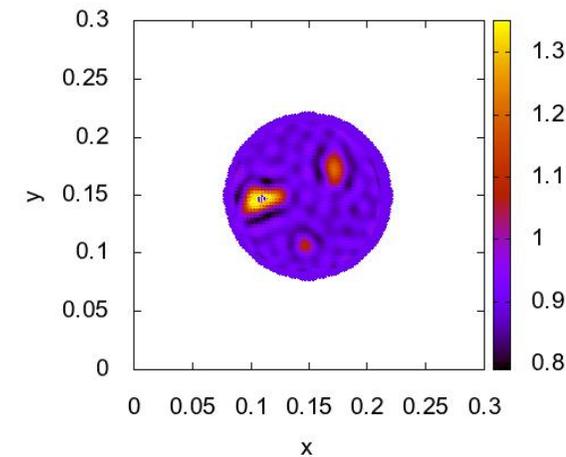
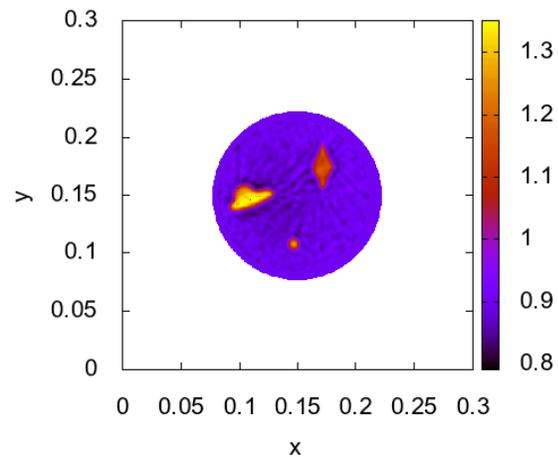
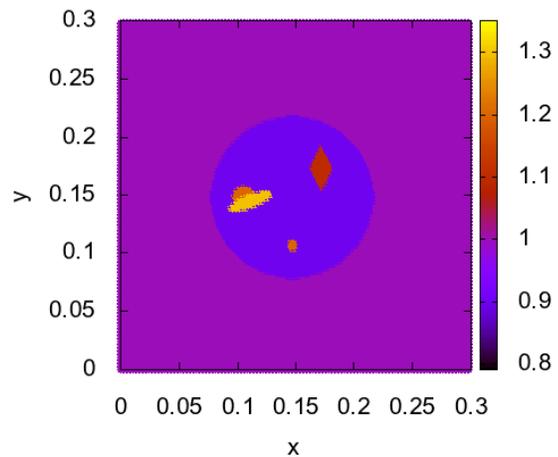
Рассмотрим задачу восстановления двух параметров

Точные значения параметров

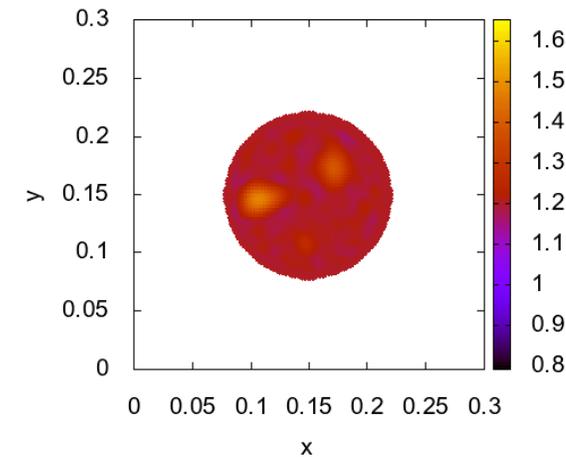
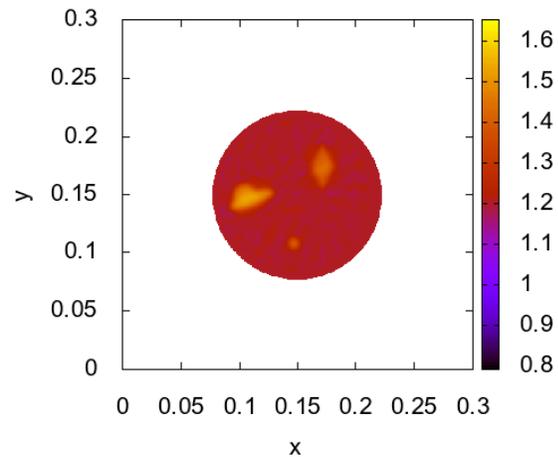
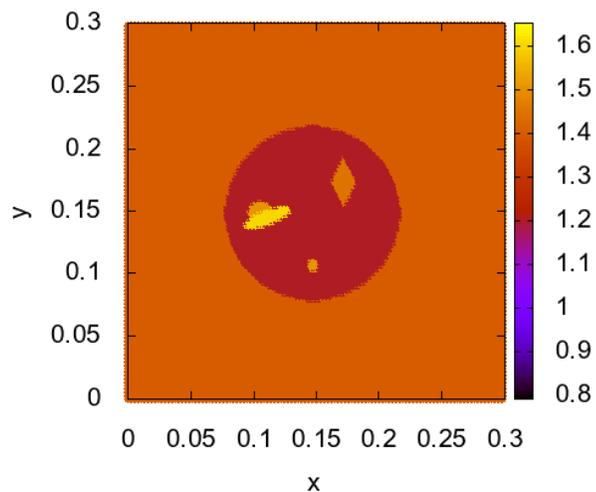
Восстановление (точные данные)

Восстановление (шум 5%)

Плотность



Скорость



$$J'(\rho) = \int_0^T \left[ -u\psi_{1t} - v\psi_{2t} + \frac{\psi_3}{\rho} (u_x + v_y) \right] dt$$

## Стандартная схема

- 1) Решаем прямую задачу  $p_j(x_i, y_i, t; q_n)$
- 2) Решаем сопряженную задачу
- 3) Вычисляем градиент  $J'_j = J'_j(q_n)$

## Одновременная схема

- 1) Решаем прямую задачу  $p_j(x_i, y_i, t; q_n)$
- 2) Решаем сопряженную задачу и находим давление в конкретный момент времени и вычисляем градиент  $J'_j = J'_j(q_n)(t_n)$

## Standard scheme

Mesh size	CPU Time, s			Memory, Gb
	4 cores	8 cores	16 cores	
$N_x = N_y = 100$	2.9	1.5	1.1	0.18
$N_x = N_y = 200$	23.8	11.8	7.2	1.43
$N_x = N_y = 400$	184.1	96.2	53.7	11.48

## Simultaneous scheme

Mesh size	CPU Time, s			Memory, Gb
	4 cores	8 cores	16 cores	
$N_x = N_y = 100$	2.29	1.26	0.83	0.09
$N_x = N_y = 200$	18.1	9.37	5.56	0.72
$N_x = N_y = 400$	145.3	75.12	42.03	5.75

Этап расчета сопряженной задачи и градиента оптимизирован с точки зрения потребляемых ресурсов оперативной памяти и времени вычислений.

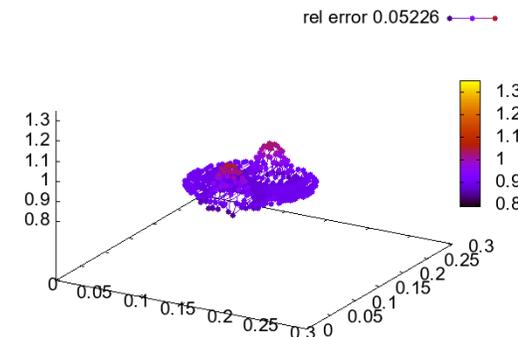
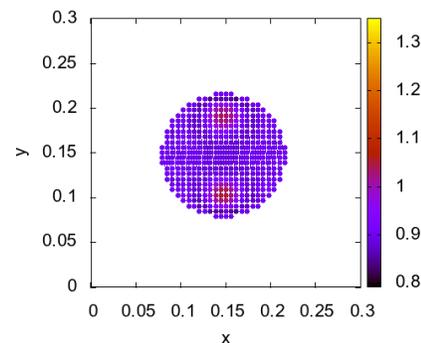
Оптимизация обеспечивает уменьшение до 50% объема памяти ОЗУ и 25% (в зависимости от количества ядер) по времени вычислений.

Сетка 120 x 120 x 120.  
500 итераций.  
Время расчета обратной задачи на Intel Xeon Gold 6140 (2.1 Ghz, 18 ядер) – 70 часов.

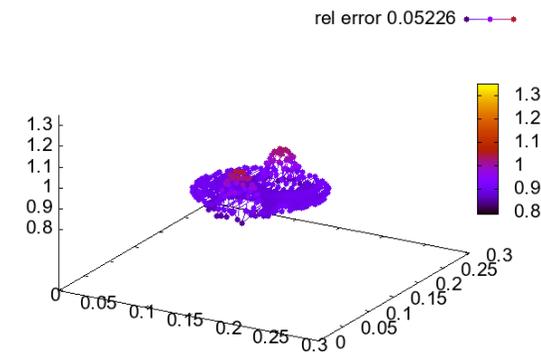
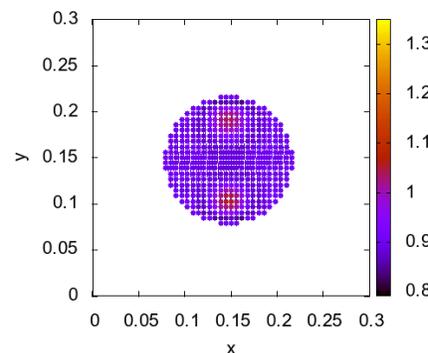
Точные значения параметров

Решение обратной задачи

Плотность



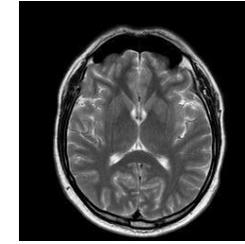
Скорость



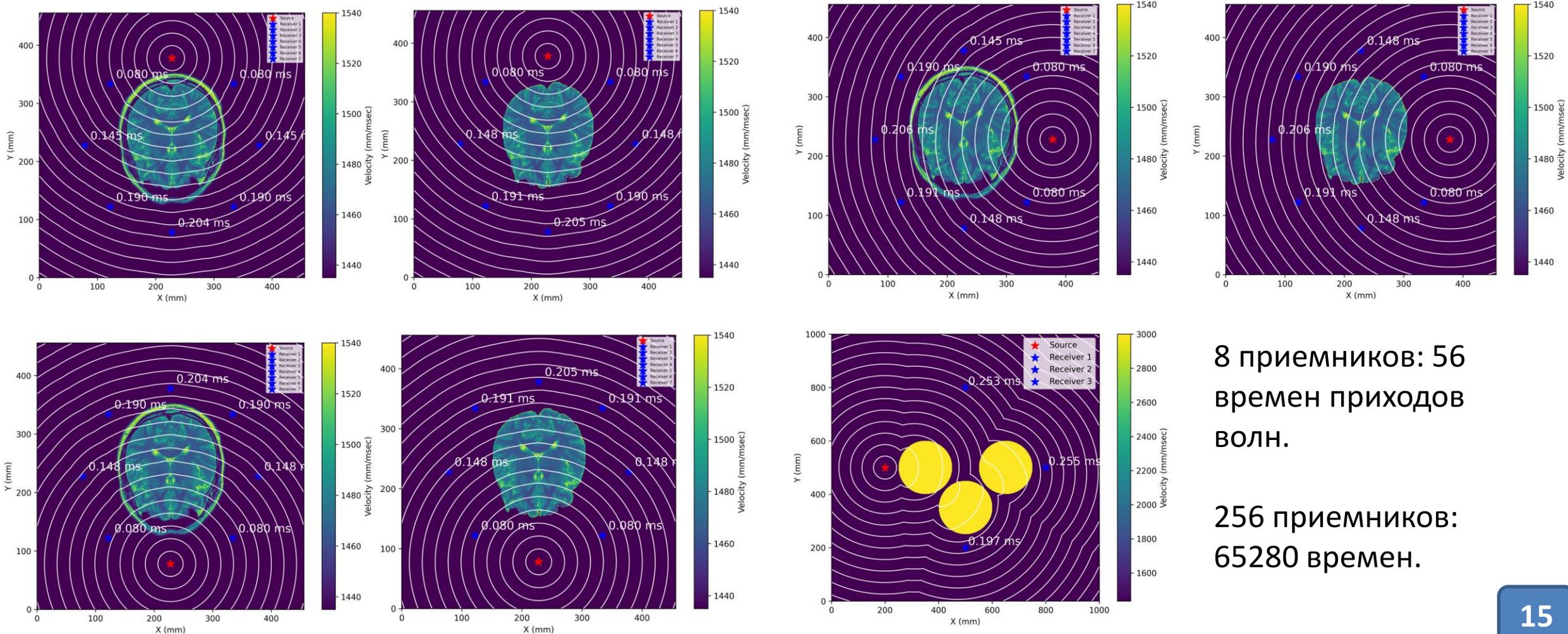
Суперкомпьютер ИМ СО РАН  
«Сергей Годунов».  
Узел Торнадо TDN711  
(2 x Intel Xeon Platinum 8368,  
76 ядер, 512 Gb)

# Кинематическая обратная задача

МРТ. 8 датчиков, датчики расположены на расстоянии 15 см от центра: 56 времен приходов волн.  
Скорость звука: вода - 1435 м/с, мозг - 1510-1540 м/с.



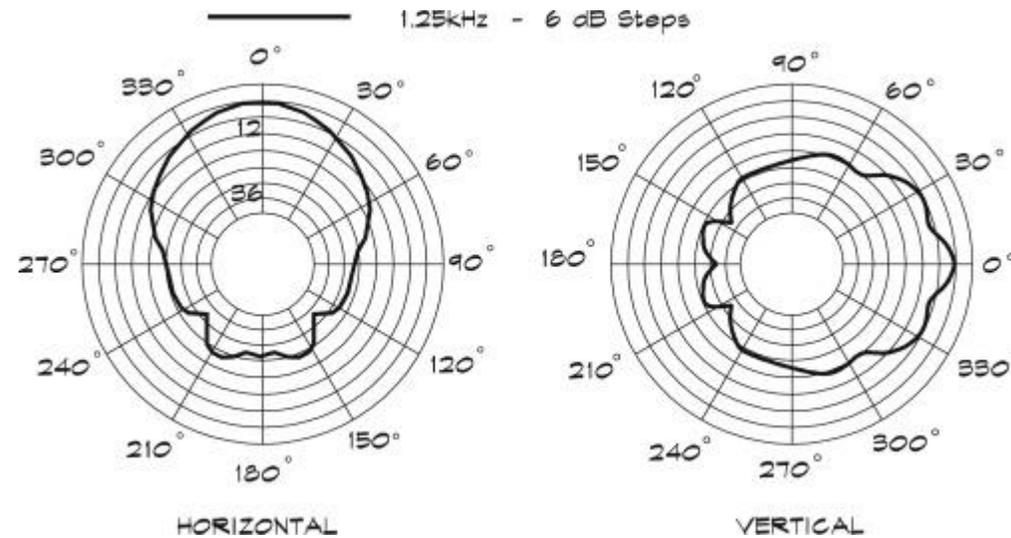
$$\|\nabla\tau\|^2 = c^{-2}(x, y, z)$$



8 приемников: 56  
времен приходов  
волн.

256 приемников:  
65280 времен.

В области проектирования антенн термин диаграмма направленности (или диаграмма направленности антенны или диаграмма направленности дальнего поля) относится к направленной (угловой) зависимости силы радиоволн от антенны или другого источника (в частотной области).



<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/directivity-index>

Моделирование диаграмм направленности акустического излучения источников позволяет проводить апробацию на реальных данных и повысить разрешающую способность акустической томографии.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = q_1(x, y, t);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = q_2(x, y, t);$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \theta_{\Omega}(x, y) I(t);$$

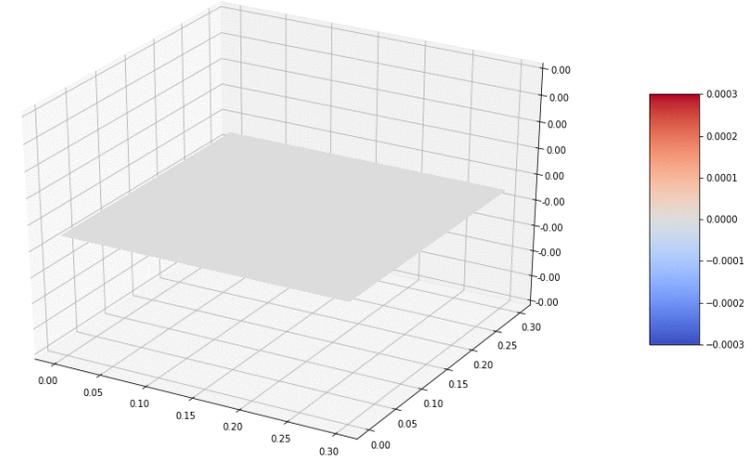
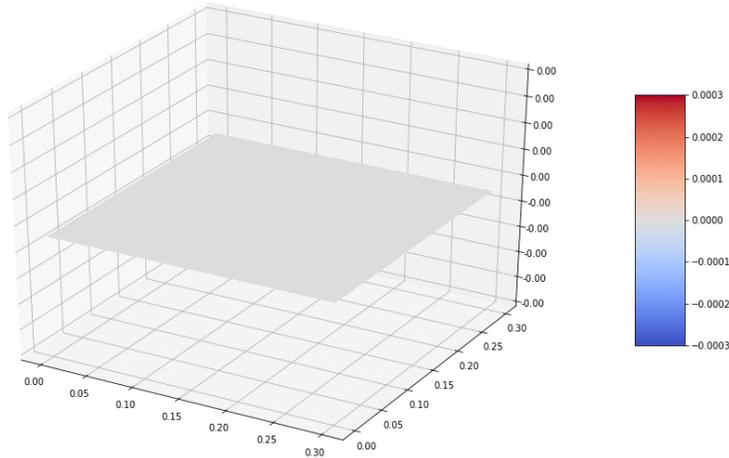
$$u, v, p|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0;$$

$$u, v, p|_{t=0} = 0.$$

Функции  $q_1(x, y, t)$  и  $q_2(x, y, t)$  являются неизвестными функциями правой части системы. Цель состоит в том, чтобы найти эти функции управления для получения желаемой формы давления, соответствующей конкретной диаграмме направленности звукового импульса.

Дополнительная информация задается за все время (конкретная диаграмма направленности звукового импульса):

$$p(x, y, t) = f(x, y, t)$$



Задача управления: найти  $q_1(x, y, t)$  и  $q_2(x, y, t)$  такие, что давление имеет наперед заданный вид:

$$J(q_1, q_2) = \int_0^T [p(x, y, t; q_1, q_2) - f(x, y, t)]^2 dt \rightarrow \min_{q_1, q_2}$$

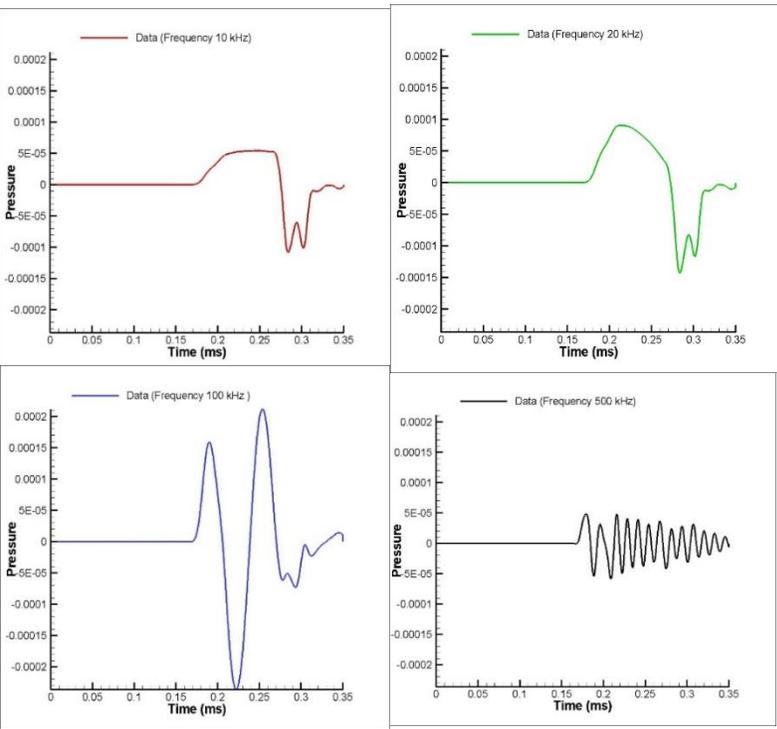
$$J'(q) = \begin{pmatrix} J'(q_1) \\ J'(q_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x, y, t) \\ \psi_2(x, y, t) \end{pmatrix}$$

$$\rho\psi_{1t} + \psi_{3x} = 0; \quad \rho\psi_{2t} + \psi_{3y} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho c^2} \psi_{3t} + (\psi_{1x} + \psi_{2y}) + 2[p(x, y, t) - F(x, y, t)] = 0;$$

$$\psi_i(x, y, T) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

1D



# Deep Learning в акустической томографии

Данные акустического давления измеренные в приемниках

Данные акустической томографии

Математическая модель

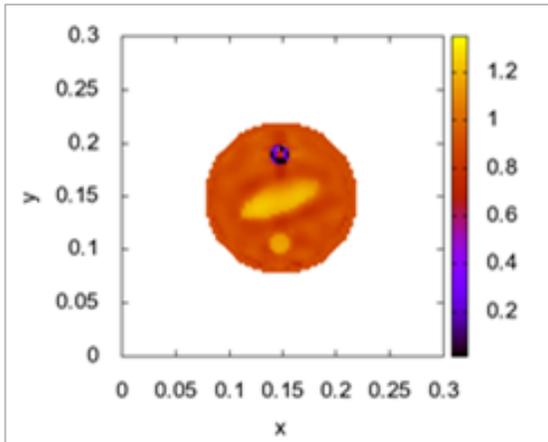
Нейронные сети

Коэффициентная обратная задача

Восстановление акустических параметров среды

Восстановить скорость распространения звука в среде  $c(x, y)$ , плотность среды  $\rho(x, y)$  и акустическое затухание

2D

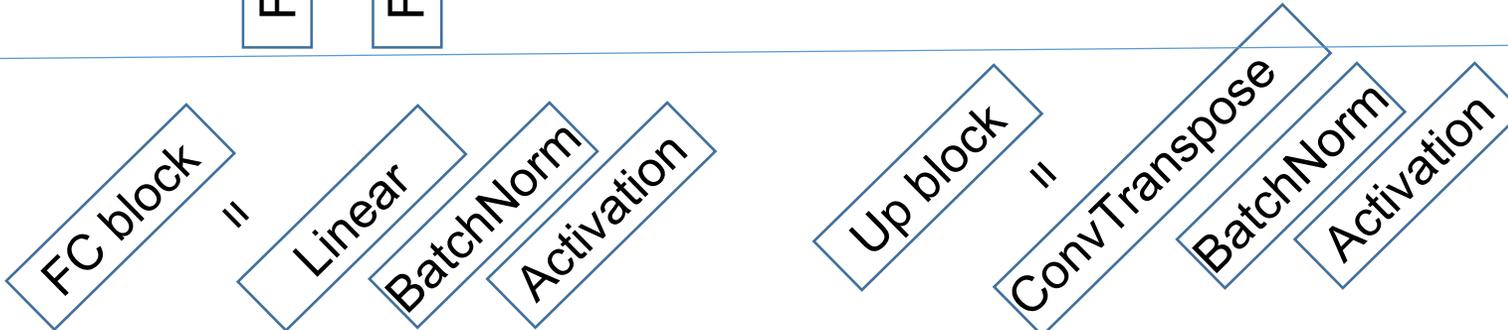
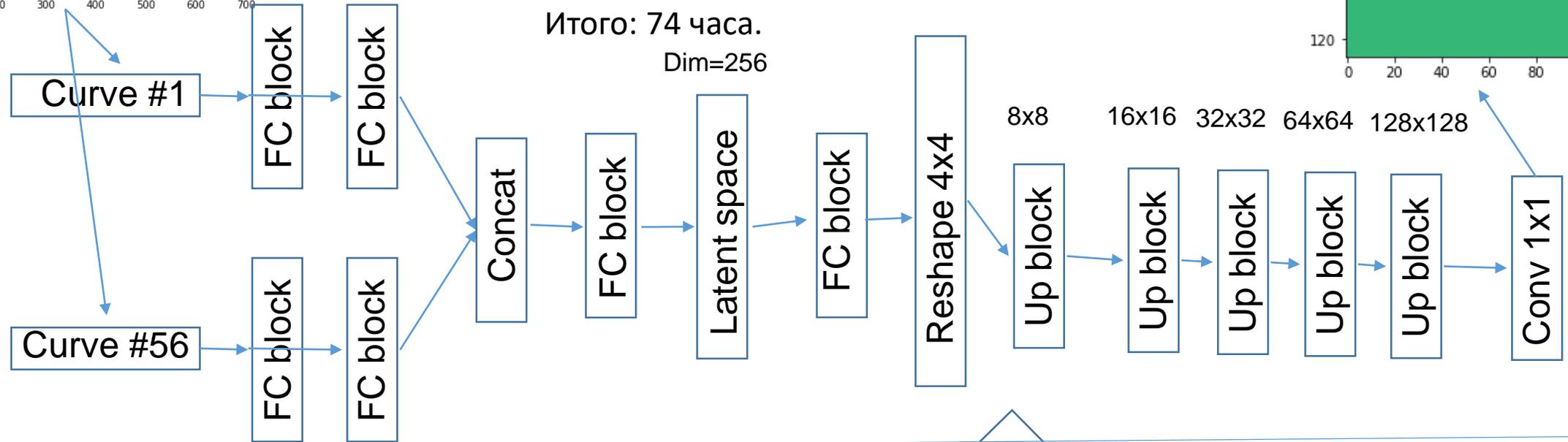
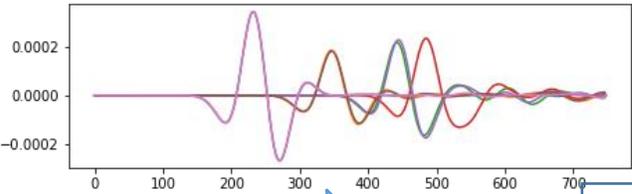
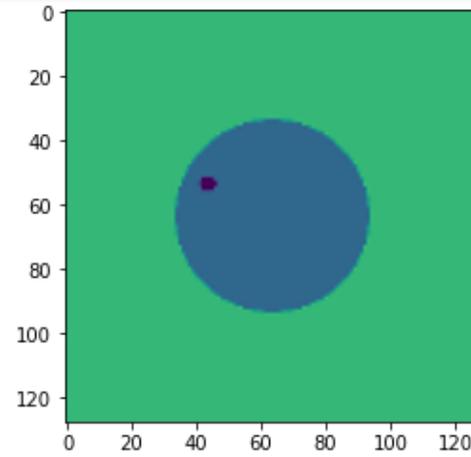


# Нейронная сеть для восстановления скорости

Синтетические данные для обучения нейронной сети: 7500 кругов и 7500 эллипсов.

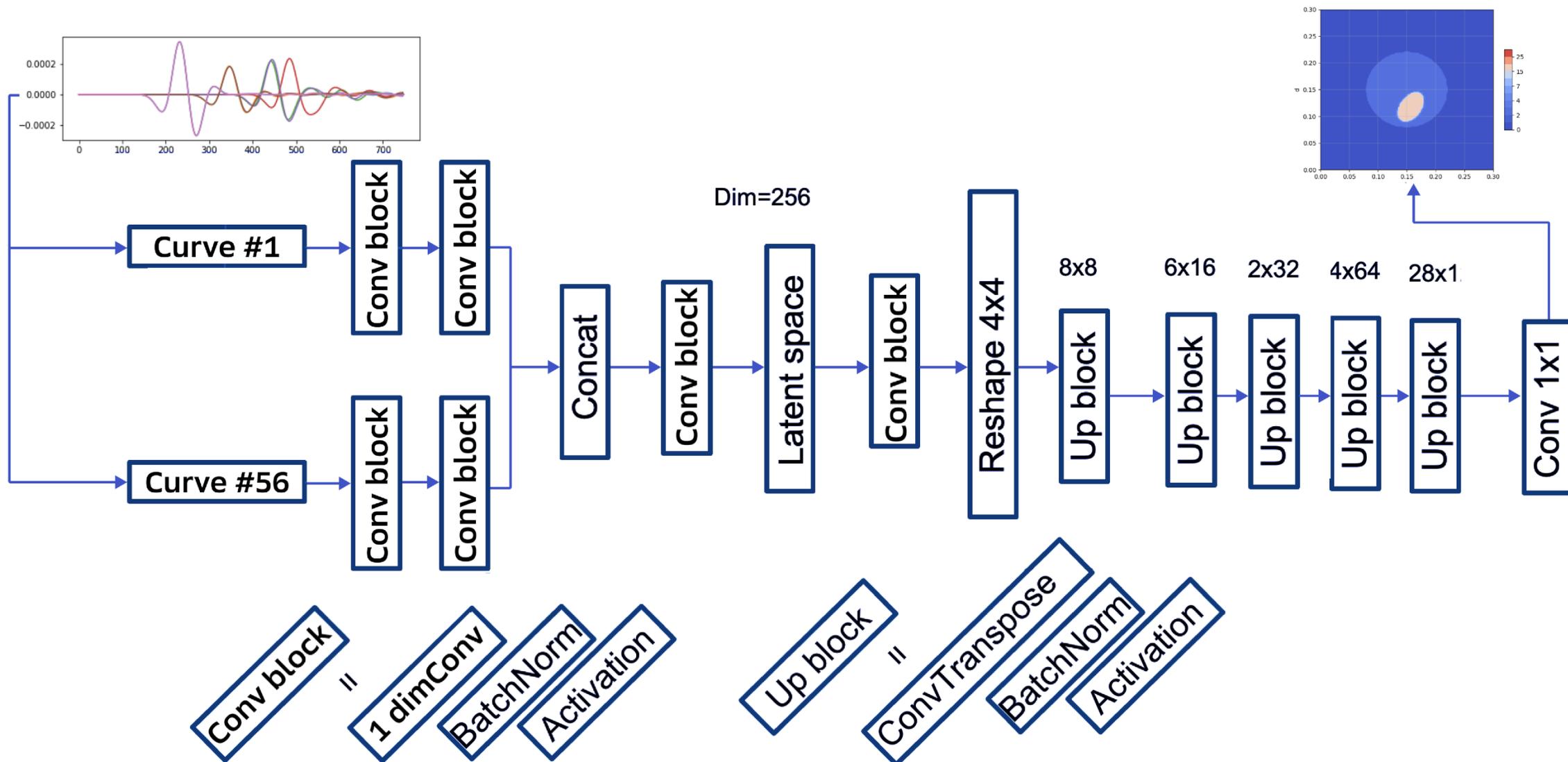
Этапы обучения нейросети:

1. Intel Xeon Gold 6140 (2.1 GHz, 18 ядер), ОЗУ 512 Гб – 50 часов подготовка 15000 тренировочных данных.
  2. Intel i5-10400F (2.90 GHz, 6 ядер), ОЗУ 64 Гб, GeForce RTX 2070 - 24 часа обучение нейросети.
- Итого: 74 часа.

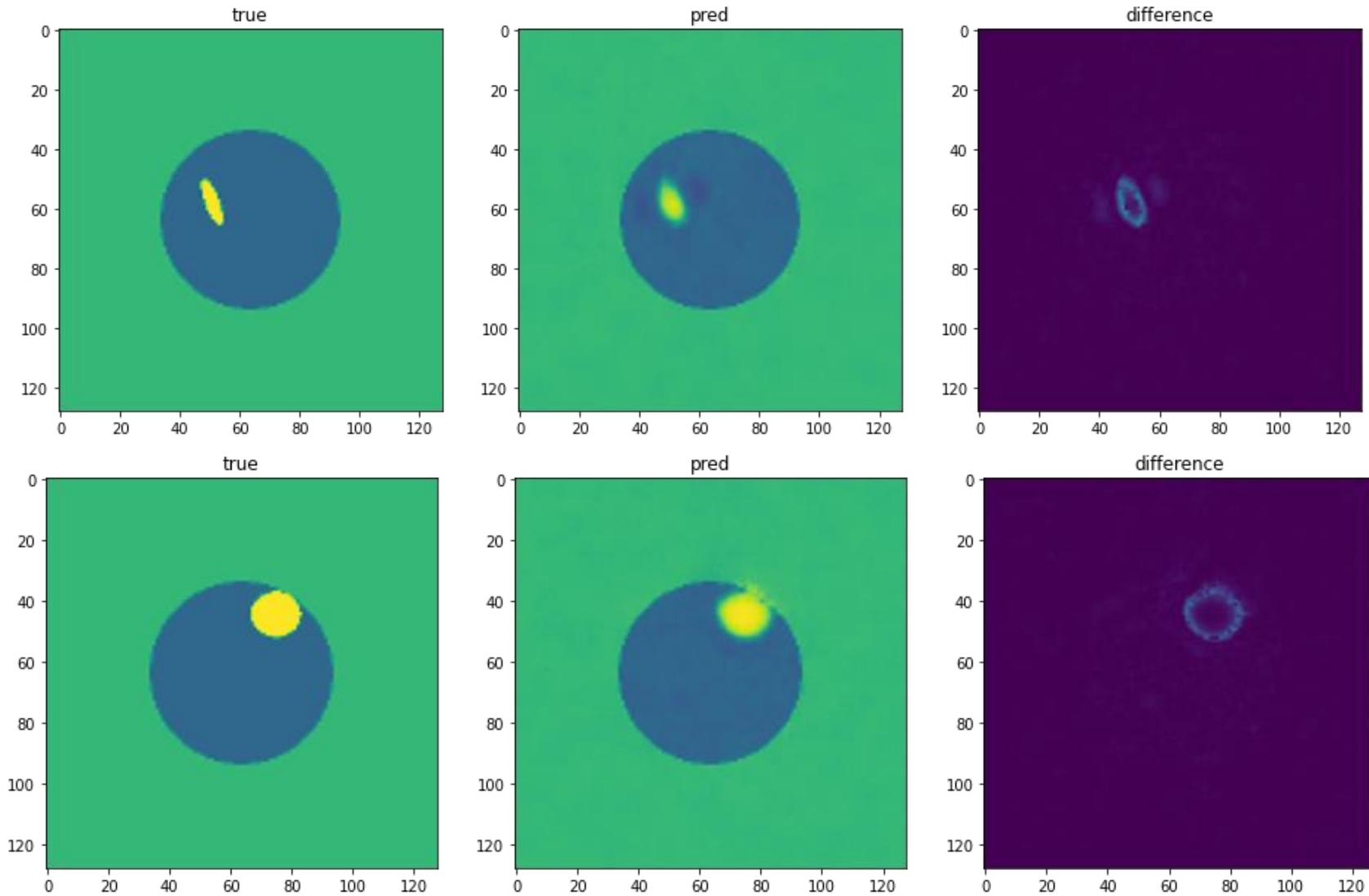


Опухоль – изменение скорости распространения ультразвука в мягких тканях

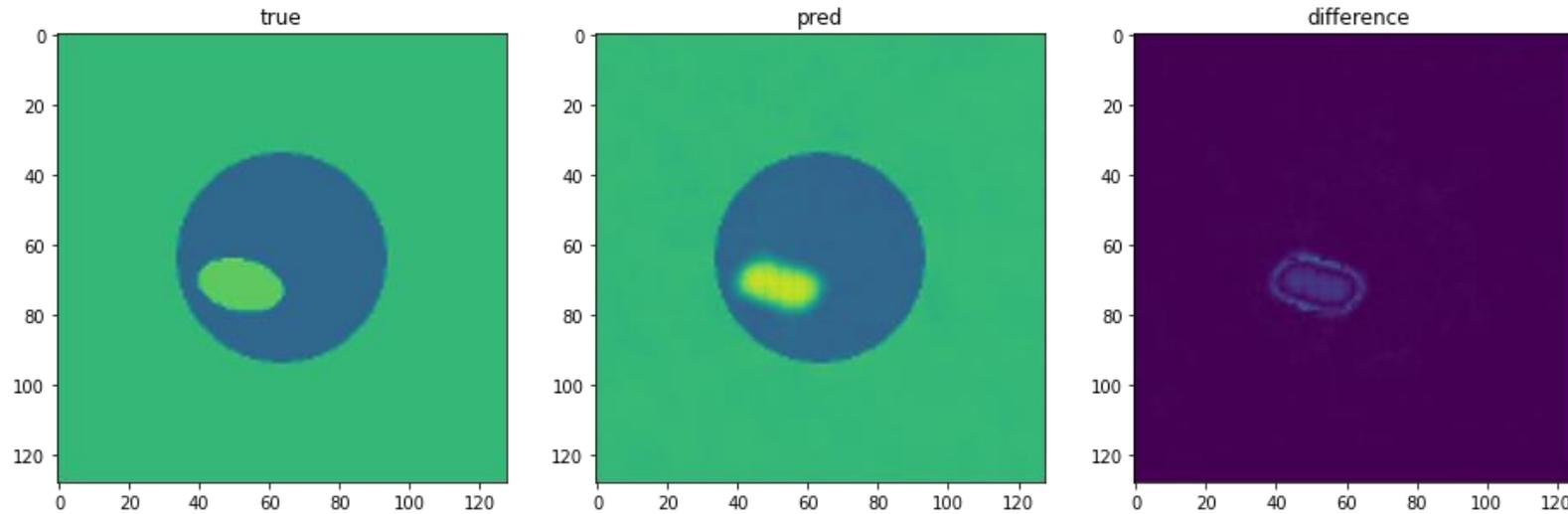
# Нейронная сеть для восстановления скорости. Модернизация



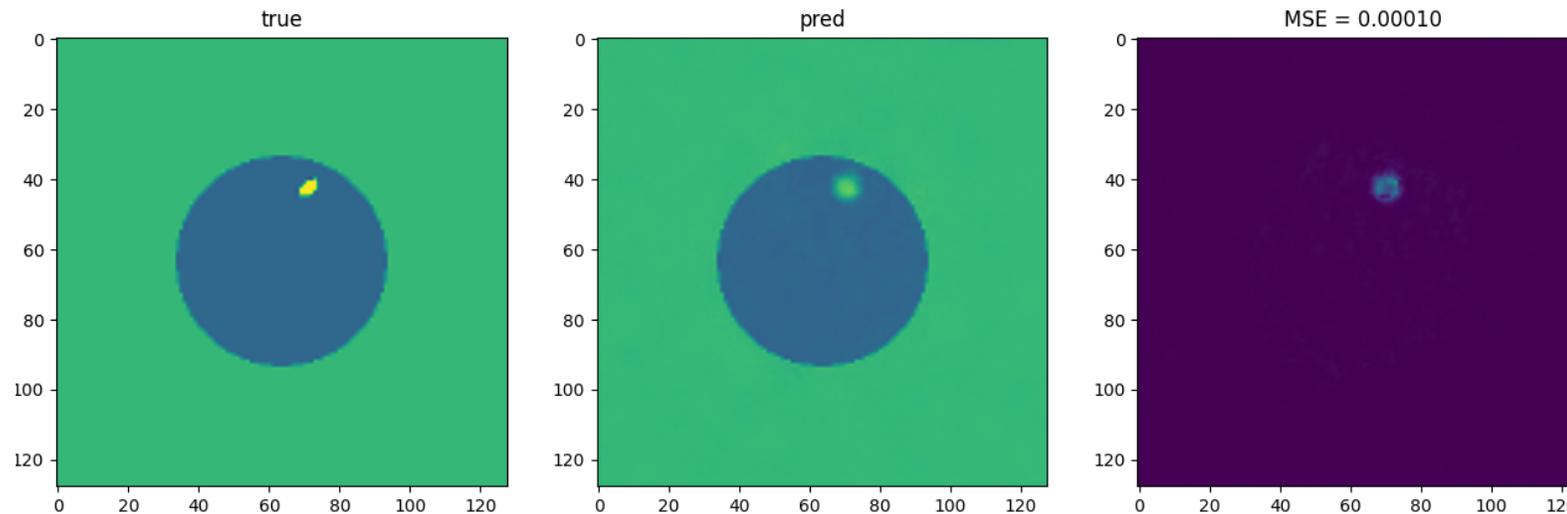
# Численное решение



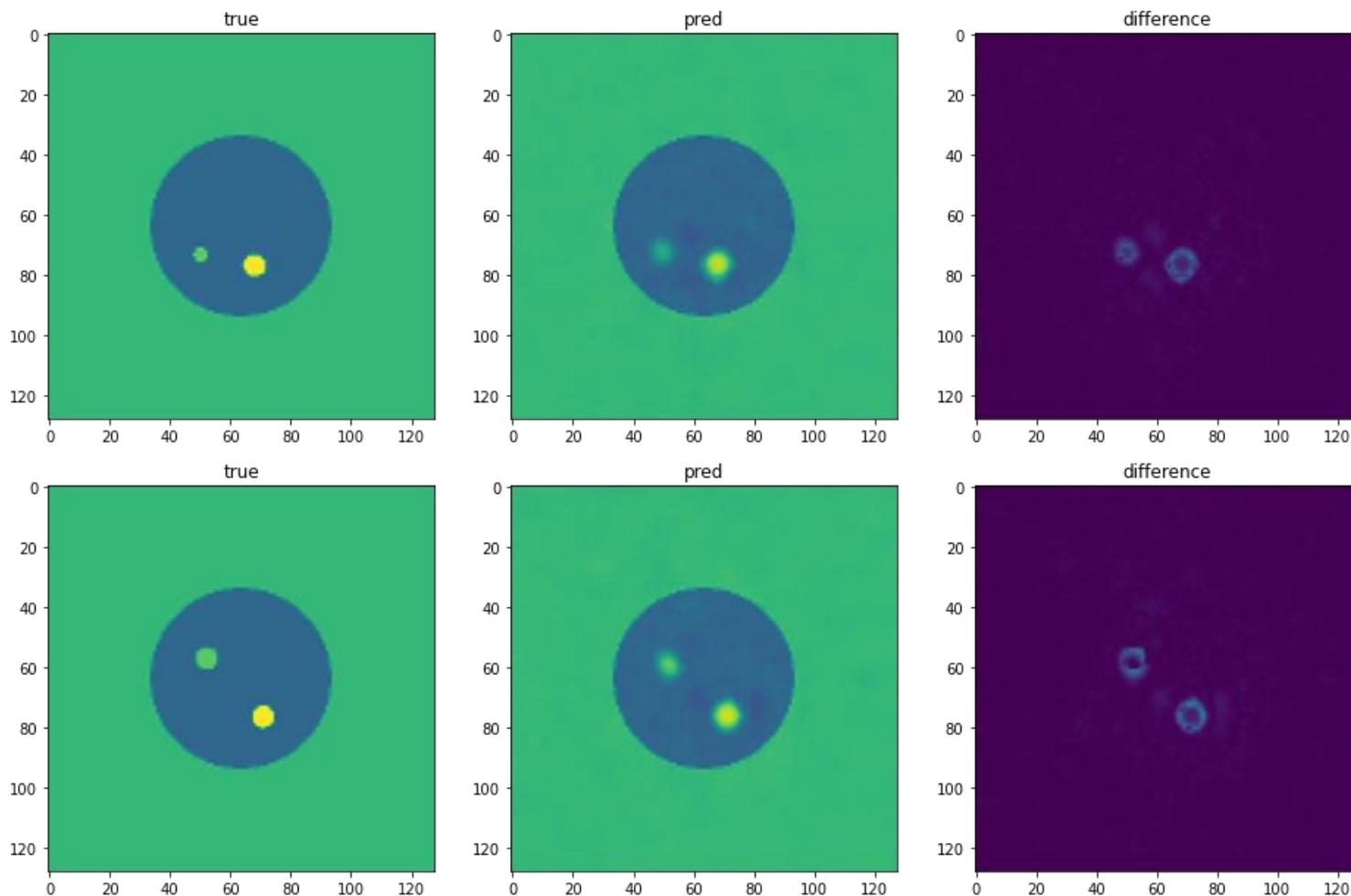
# Численное решение



True (left), computed (center), difference (right). MSE = 0.021



Contrast case. True (left), computed (center), difference (right). MSE = 0.011



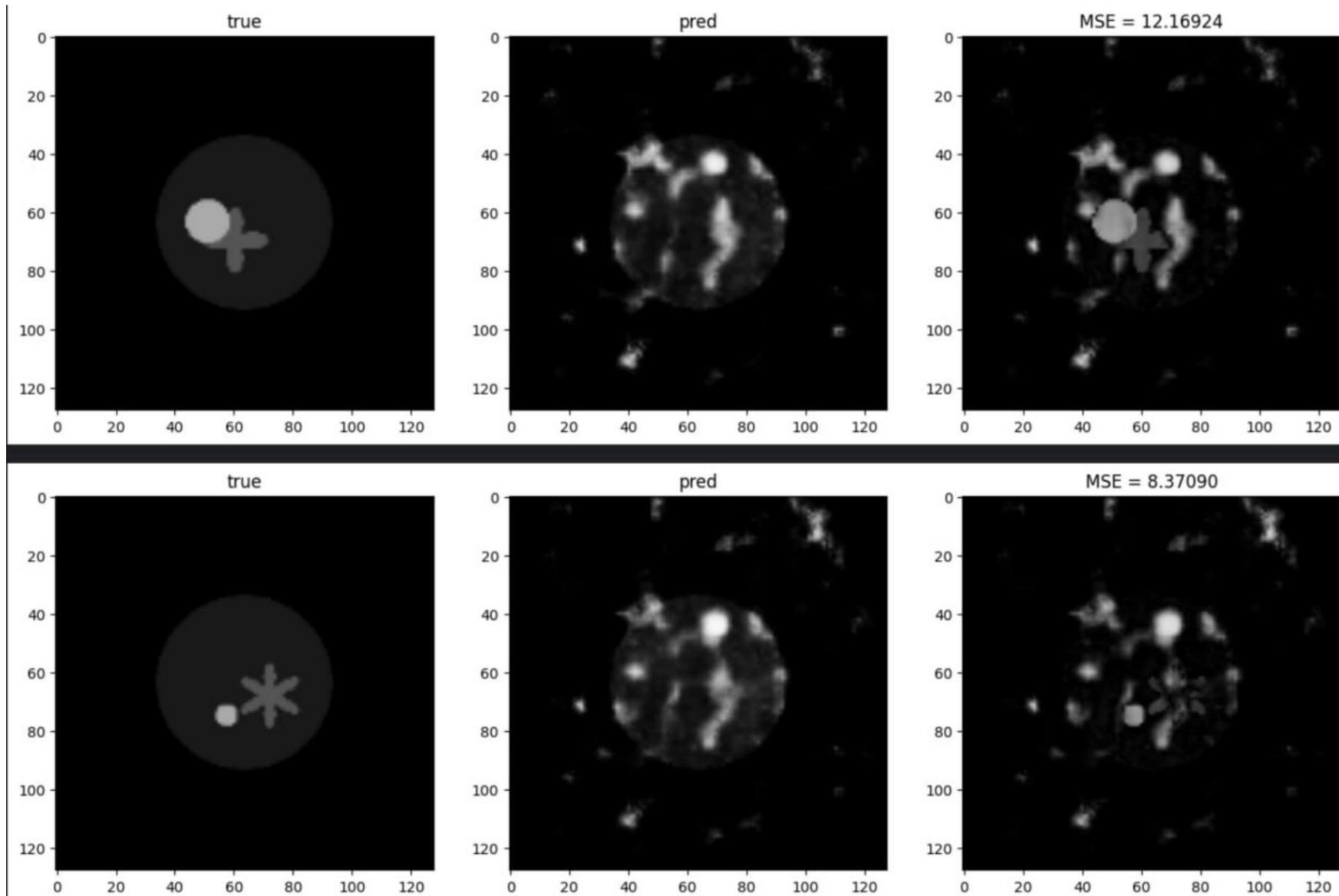
*S. Arridge, P. Maass, O. Oktem, C. Schonlieb. Solving inverse problems using data-driven models. Acta Numerica. 2019. 28.*

*J. Berg, K. Nystrom. Neural networks as smooth priors for inverse problems for PDEs, Journal of Computational Mathematics and Data Science. 2021. Vol. 1, 2021, 100008.*

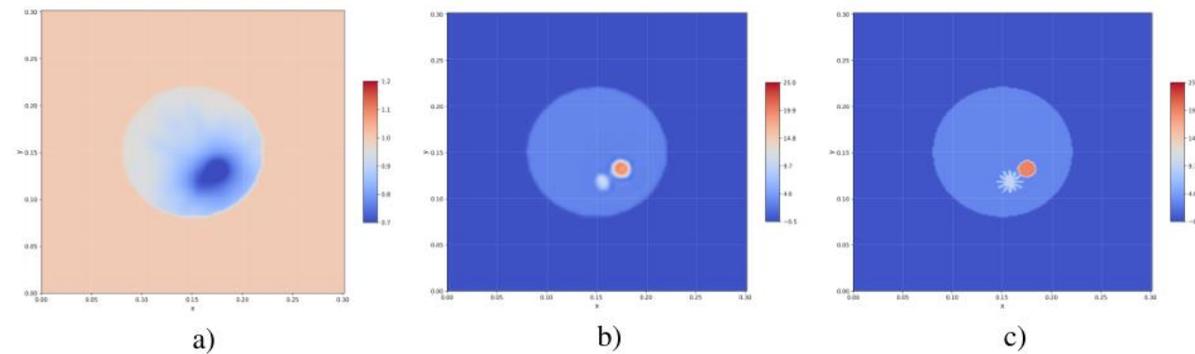
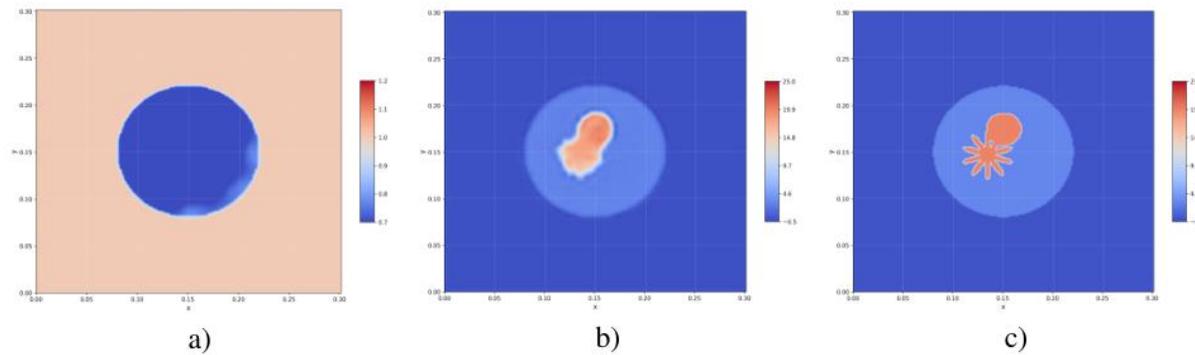
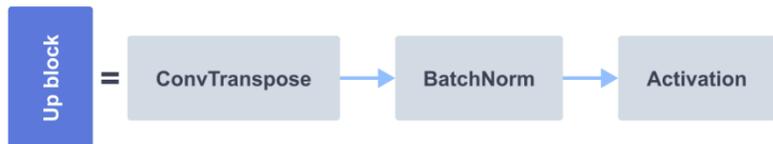
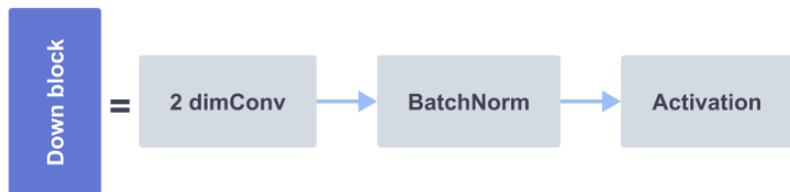
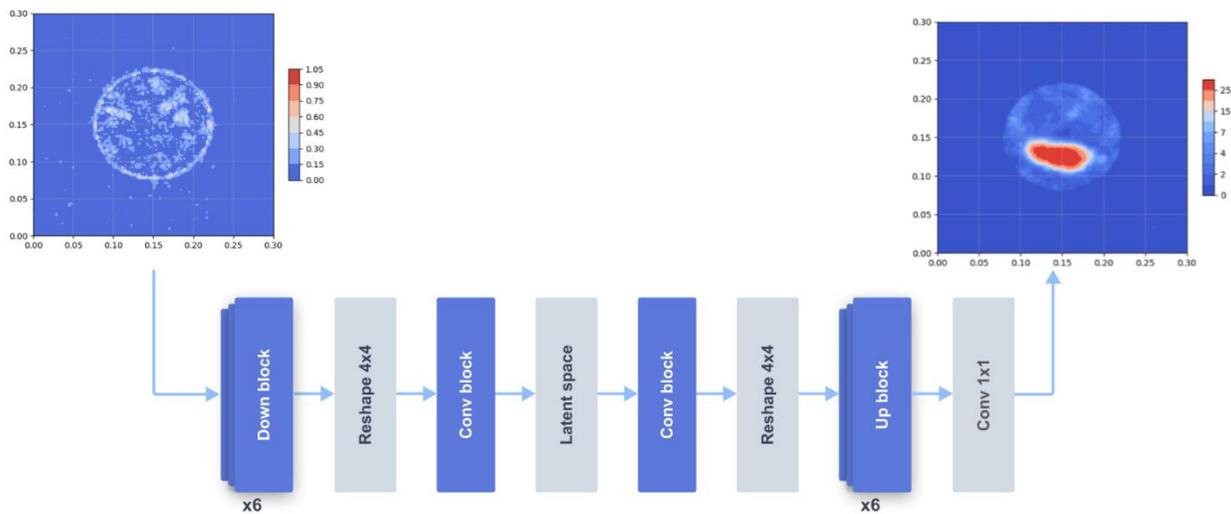
## Сравнение:

- Intel Xeon Gold 6140 (2.1 Ghz, 18 ядер), ОЗУ 512 Гб - **7 часов** для решения обратной задачи.
- Intel i5-10400F (2.9 GHz, 6 ядер), GeForce RTX 2070, ОЗУ 64 Гб - **0,01 сек.** для решения обратной задачи на основе глубокого обучения. Предварительно необходимо **74 часов** для обучения.

# Численное решение



# Восстановление неоднородностей. Априорная информация о градиенте



a) input b) NN solution c) exact

В последнее время появилось много работ по нелинейной акустической томографии:

*T.G. Muir, E.L. Carstensen. Prediction of nonlinear acoustic effects at biomedical frequencies and intensities. Ultrasound in Medicine & Biology. 1980. Vol. 6, Issue 4.*

*Gunther Uhlmann – Conference Talks.*

*B. Kaltenbacher. Mathematics of nonlinear acoustics. Evolution Equations and Control Theory. 2015. 4(4).*

*Francis A Duck, Nonlinear acoustics in diagnostic ultrasound, Ultrasound in Medicine & Biology. 2002. 28(1).*

С помощью численного решения системы уравнений Навье-Стокса возможно моделирование распространения звуковых волн в жидкости.

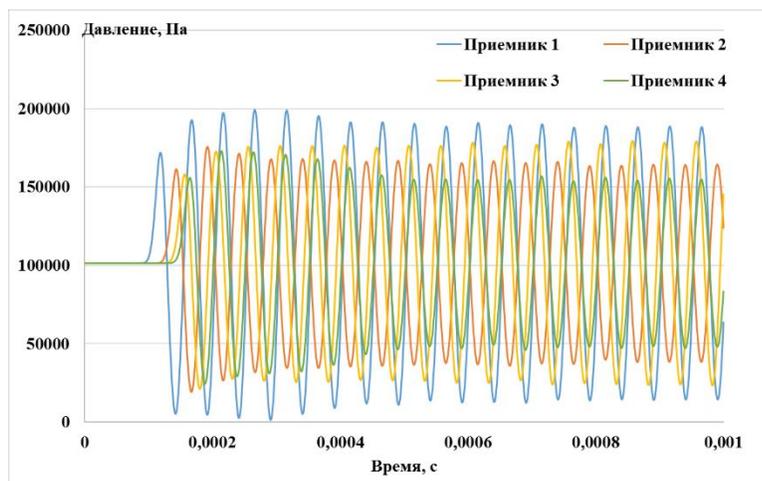
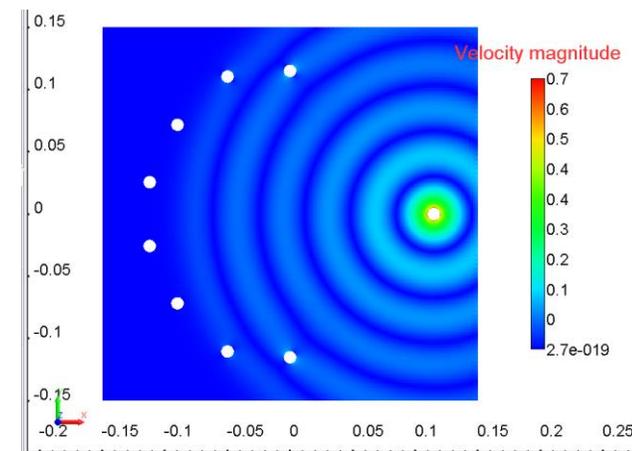
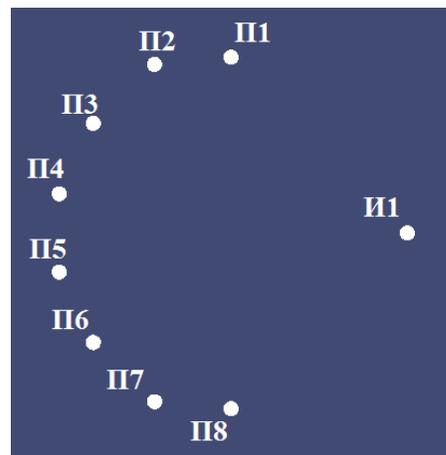
Прямое численное моделирование в настоящее время не используется ввиду вычислительной дороговизны данного подхода.

Цель показать принципиальную возможность построения вычислительного двойника томографа в рамках "единой" физико-математической модели на основе уравнений Навье-Стокса.

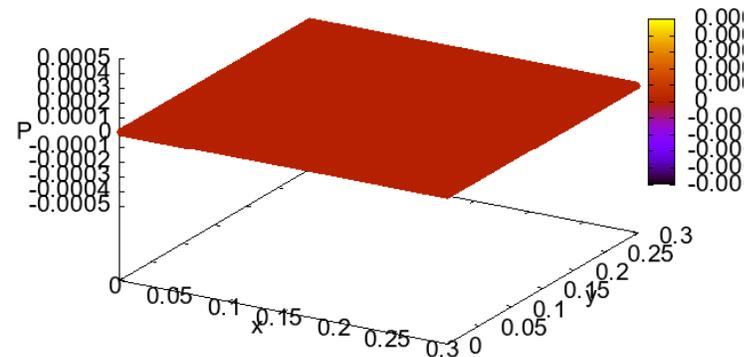
Размеры области моделирования достаточно малы, звуковые волны - это волны "малого" возмущения, человек более чем на 60% состоит из воды, то человека можно моделировать моделью "жидкости".

## Задача акустической томографии на основе уравнений Навье-Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \\ \rho = \rho(p) \end{cases}$$



Нелинейная акустика

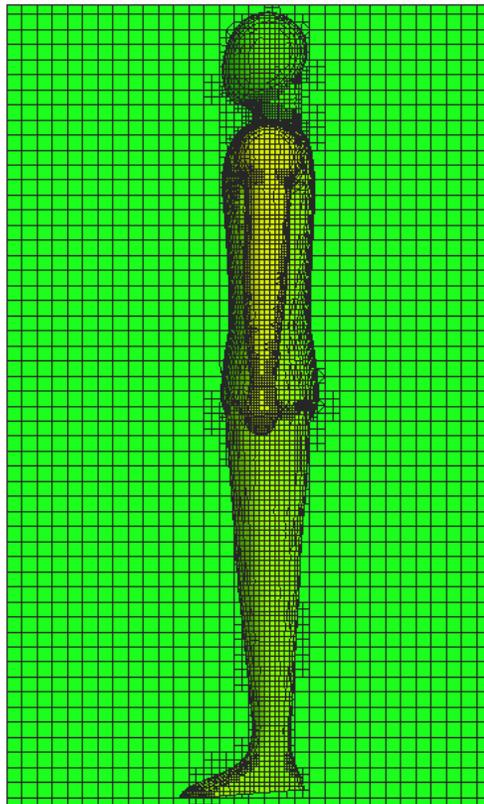
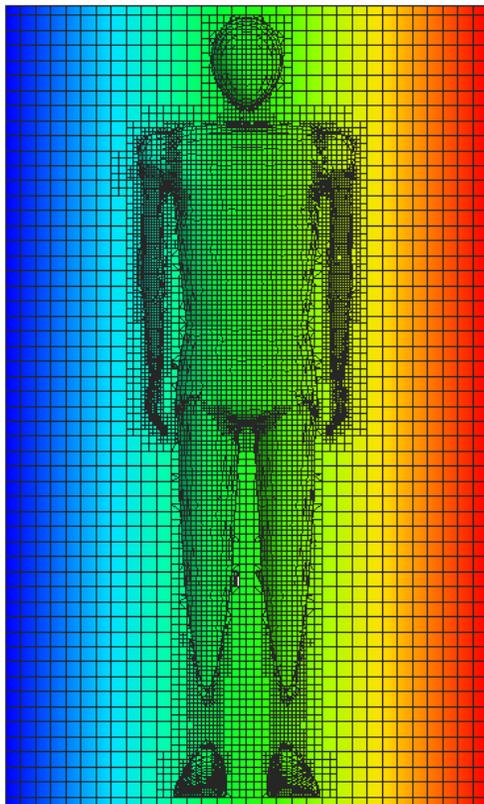
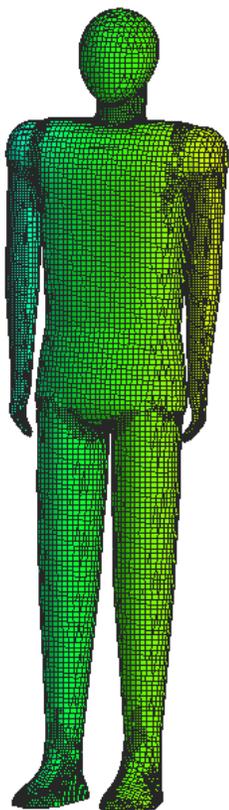


Линейная акустика

Для выявления

- патологий печени
- осложнений легких после Covid-19

и отладки алгоритмов в Сарове созданы цифровой манекен и томограф

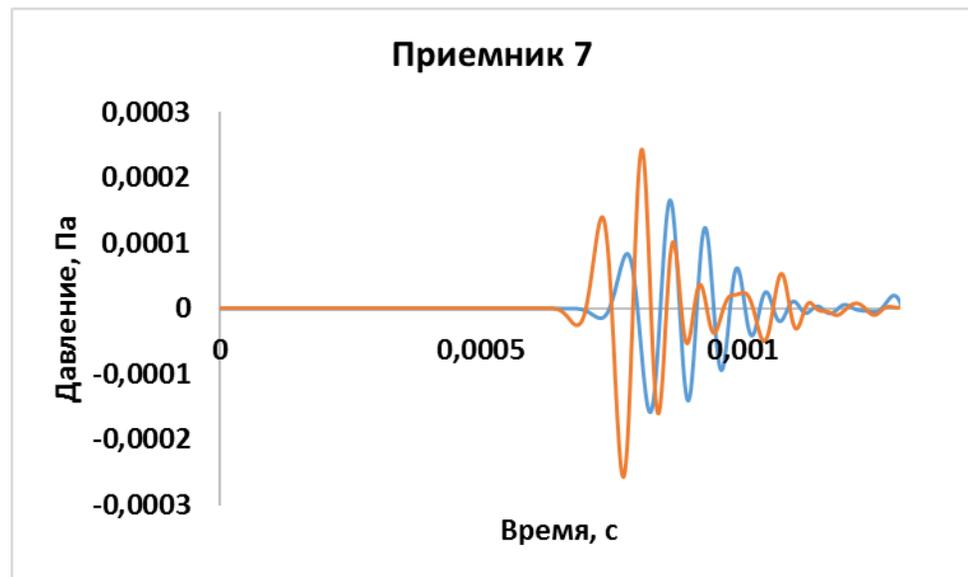
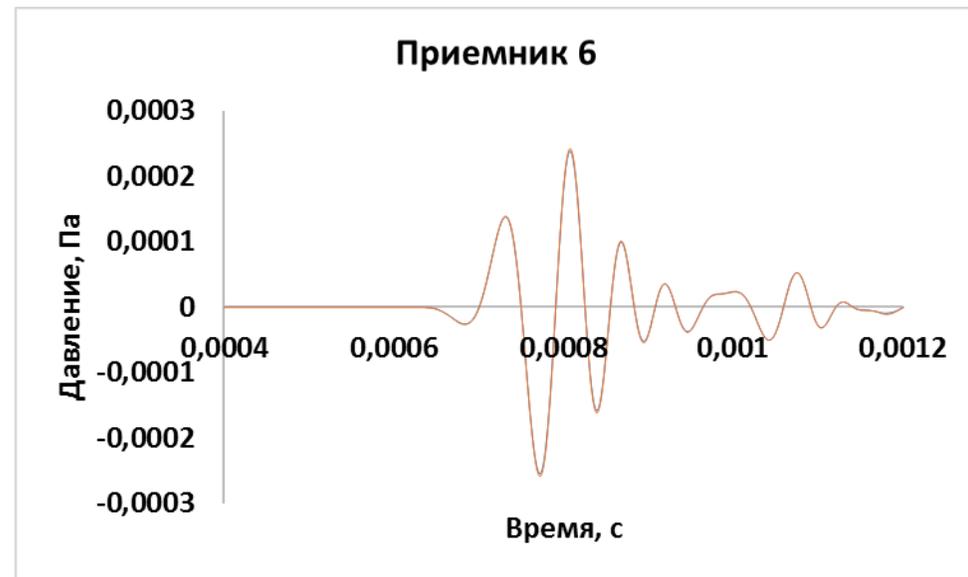
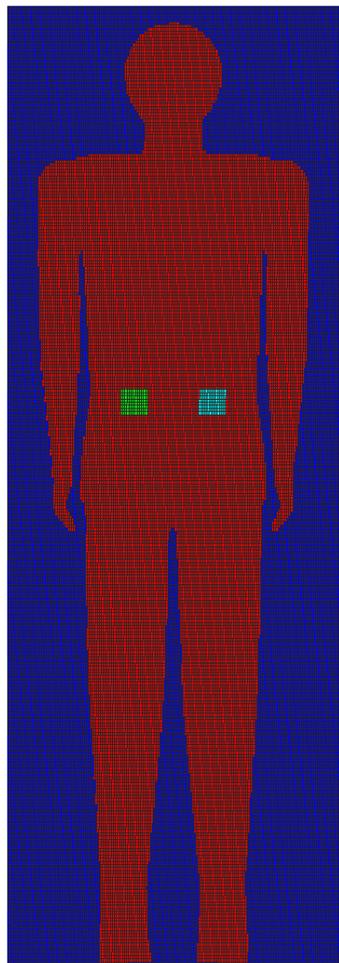
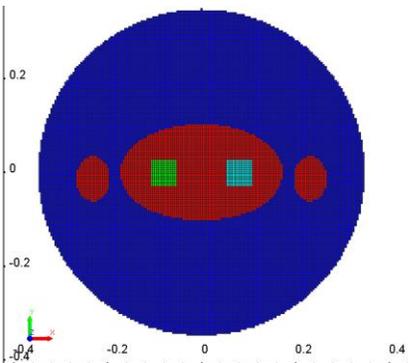
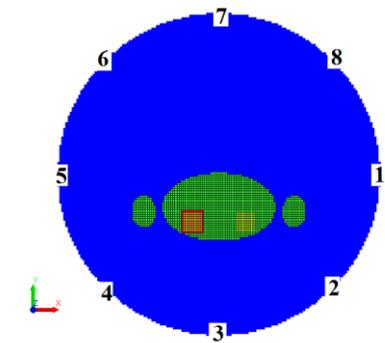


	скорость звука, м/с	плотность, кг/м <sup>3</sup>
жировая ткань	1460	904
мышечная ткань	1550	994
костная ткань	3660	1700
печень	1570	1083
среднее по человеку		1036

Параметры манекена: рост – 1,95 м,  
ширина плеч – 0,56 м.

Параметры томографа: высота – 2 м,  
диаметр – 1,2 м.

# Нелинейная акустика



Разработан и реализован акустический томограф на основе законов сохранения.

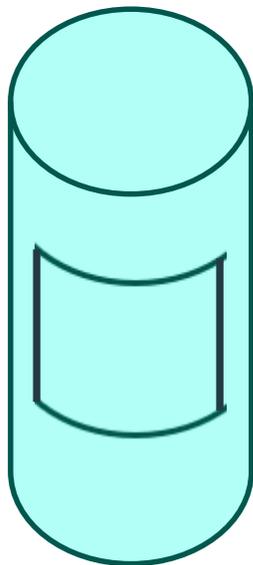
Разработан и реализован нейросетевой подход решения обратной задачи.

Определение опухоли с разрешением  $\approx 1$  мм (500 x 500 x 500).

Требуется  $\approx 4$  Тб – для хранения данных динамической прямой задачи (double).

- Максимально использовать априорную информацию для снижения требования по хранению памяти.
- Численный аналог метода наискорейшего спуска: на каждом узле решается прямая задача для выбора оптимального параметра спуска (heavy ball, Нестеров).
- Решение задачи в частотной области.

## Заключение



Источники/приемники: диаметр 2 см, высота 5 см.

Антенна: источник/приемник 1 см, высота 3 см.

**Усреднение сигнала по площади приемника!**

**2d:** 8 источников/приемников (500 x 500) – 56 кривых, 15 000 наборов данных – **74 часа** (50 + 24).

**3d:** 256 источников/приемников x 10 срезов (120 x 120 x 120) – 65280 x 10 количество срезов  $\approx$  130.000.000 наборов данных  $\approx$  500 дней на высокопроизводительной рабочей станции для наборов данных  $\approx$  **15 дней** на суперкомпьютере Сергей Годунов (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН).

Решение на основе нейросетей – хорошее начальное приближение для градиентного метода.

Решение задачи в частотной области, если нет доступа к вычислительным ресурсам.



# Благодарю за внимание!

**Максим Александрович Шишленин**

**д.ф.-м.н., профессор РАН**

**Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН**

**[m.a.shishlenin@mail.ru](mailto:m.a.shishlenin@mail.ru)**

- Научный руководитель член-корреспондент РАН С.И. Кабанихин
- к.ф.-м.н. Н.С. Новиков (акустика, сейсмика, томография)
- Д.В. Ключинский (супервычисления, Huawei)
- А.Ю. Приходько (Computer Vision, медицинская томография, *Inworld AI*)
- П.С. Сурнин (**иммунный ответ организма человека с учетом лечения**)
- Н.А. Савченко (глубокое обучение, медицинская томография, *СберТех*)
- А.И. Глухов (**социальные протесты**)
- А.В. Губер (тензорная аппроксимация, нейронные сети PINN)
- М.Р. Дударь (волновая томография, кинематика)



**Структура метода Ньютона-Канторовича:**  $q_{n+1} = q_n - (A'(q_n))^{-1} (A(q_n) - f)$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\check{p}(x, y)}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi_3}{\partial y} = \frac{\check{p}(x, y)}{\rho} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \sigma \psi_3 + \rho c^2 \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) = -\check{p}(x, y) c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Данные обратной задачи:  $\psi_3(x, y, t) = p(x_i, y_i, t) - f(x_i, y_i, t)$

Схема Ньютона-Канторовича

- 1) Решаем прямую задачу  $p_j(x_i, y_i, t; q_n)$
- 2) Решаем линейную обратную задачу
- 3) Вычисляем приближенное решение на новой итерации