Бикомпактные схемы высокой точности для решения задач механики сплошных сред

М. Д. Брагин

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

XVII Международная конференция «Забабахинские научные чтения»

Снежинск, 19–23 мая 2025 г.

Содержание доклада

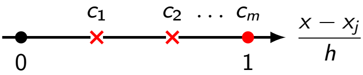
Содержание доклада

Аппроксимация по пространству

Гиперболическая система законов сохранения

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}) > 0.$$

Метод коллокации + метод прямых



$\mathbf{p}(x,t)$, $\mathbf{q}(x,t)$ — многочлены степени m по x;

$\mathbf{p}(x,t)$: $\quad \mathbf{p}(x_j,t) = \mathbf{u}_j(t)$ — г. у., $\quad (\partial_t \mathbf{p} + \partial_x \mathbf{q})(x_{j+c_\alpha}, t) = \mathbf{0}$ — у. коллокации;

$\mathbf{q}(x,t)$: $\quad \mathbf{q}(x_j,t) = \mathbf{f}[\mathbf{p}(x_j,t)] \equiv \mathbf{f}_j$, $\quad \mathbf{q}(x_{j+c_\alpha},t) = \mathbf{f}[\mathbf{p}(x_{j+c_\alpha},t)] \equiv \mathbf{f}_{j+c_\alpha}$;

$\mathbf{u}_{j+c_\alpha}(t) \equiv \mathbf{p}(x_{j+c_\alpha},t)$ — искомые значения.

Общий вид полудискретной бикомпактной схемы

$$\boxed{\sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha\beta} \frac{d\mathbf{u}_{j+c_\beta}}{dt} + \frac{\mathbf{f}_{j+c_\alpha} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0};} \qquad a_{\alpha\beta} = \int_0^{c_\alpha} d\xi\, \ell_\beta(\xi) = \int_0^{c_\alpha} d\xi \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma\neq\beta}}^{m} \frac{\xi - c_\gamma}{c_\beta - c_\gamma}.$$

Примеры полудискретных бикомпактных схем

Центрированная схема 4-го порядка

$$\mathbf{c} = (0, \tfrac{1}{2}, 1):\ \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{u}_j + 4\mathbf{u}_{j+1/2} + \mathbf{u}_{j+1}}{6}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5\mathbf{u}_j + 8\mathbf{u}_{j+1/2} - \mathbf{u}_{j+1}}{24}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1/2} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Противопоточная схема 3-го порядка

$$\mathbf{c} = (\tfrac{1}{3}, 1):\ \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3\mathbf{u}_{j+1/3} + \mathbf{u}_{j+1}}{4}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{5\mathbf{u}_{j+1/3} - \mathbf{u}_{j+1}}{12}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1/3} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Эквивалентная форма при $v_{j+1/3} = \frac{2}{9} v_j + \frac{1}{4} v_{j+1/2} - v_{j+1}$, $v = \mathbf{u}, \mathbf{f}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{u}_j + 4\mathbf{u}_{j+1/2} + \mathbf{u}_{j+1}}{6}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathbf{u}_j + 4\mathbf{u}_{j+1/2} - \mathbf{u}_{j+1}}{8}\right) + \dfrac{\mathbf{f}_{j+1/2} - \mathbf{f}_j}{h} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Аппроксимация по времени

Универсальный подход

Методы ДНРК. Устойчивость при любом числе Куранта $\varkappa$.

Если матрица $A(\mathbf{u})$ не является знакоопределенной, то ...

...применяем глобальное расщепление Лакса-Фридрихса-Русанова (ЛФР).
Переход со слоя t_n на слой t_{n+1} осуществляем так:

1. Вводим потоки $\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{u}) = 0.5\mathbf{f}(\mathbf{u}) \pm C_0\mathbf{u}$, где $C_0 = (0.5+\delta)\max_j \rho_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_j^n)$.
2. Интегрируем по t от $\mathbf{u}^n$ на полный шаг при $\mathbf{f} = \mathbf{f}^+$. Получаем $\mathbf{u}^*$.
3. Интегрируем по t от $\mathbf{u}^*$ на полный шаг при $\mathbf{f} = \mathbf{f}^-$. Получаем $\mathbf{u}^{n+1}$.

Сущность глобального расщепления ЛФР

Подстановка $\mathbf{f} = \mathbf{f}^{\pm}$ эквивалентна замене переменных

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \pm 2C_0 t, \\ \tilde{t} = 2t. \end{cases}$$

Если в постановке граничных условий учтено смещение границ в переменных $(\tilde{x}, \tilde{t})$, то погрешность расщепления равна нулю.

Альтернативный, более экономичный подход

Неявно-явные методы РК: $\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{u})$ дискретизируется как $0.5\mathbf{f}(\mathbf{u}^{\text{old}}) \pm C_0\mathbf{u}^{\text{new}}$.
Устойчивость при любом $\varkappa$ сохраняется.

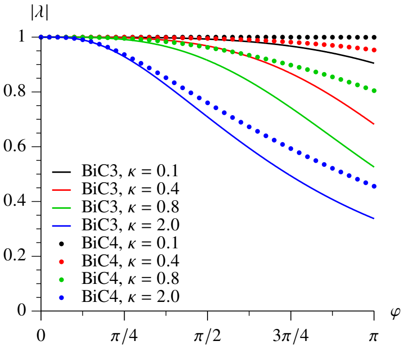
Диссипативные свойства

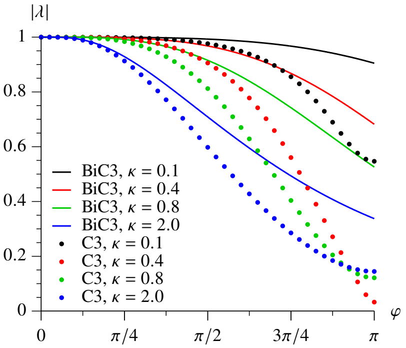
Линейный перенос гармоники

$$u(x,t) = \exp[ik(x - at)] \sim u_j^n = \exp[ik(x_j - a^* t_n)] = \lambda^n e^{i\varphi j}; \ \varphi = kh \in [-\pi; \pi].$$

Модуль множителя перехода

Во всех схемах аппроксимация по времени *L*-устойчивым жестко-точным ДНРК 3-го порядка.



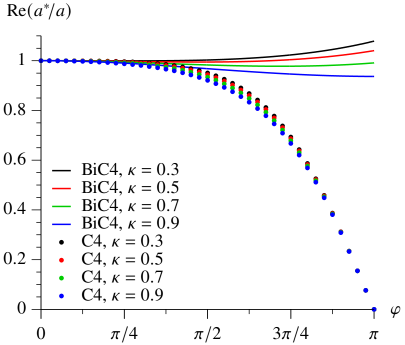


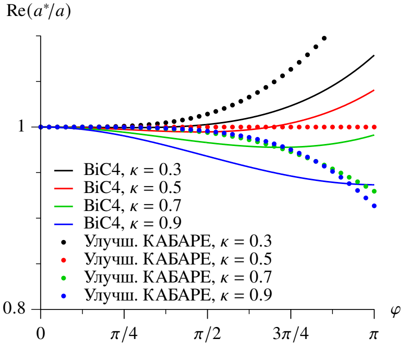
Линейный перенос гармоники

$$u(x,t) = \exp[ik(x-at)] \sim u_j^n = \exp[ik(x_j - a^* t_n)] = \lambda^n e^{i\varphi j};\ \varphi = kh \in [-\pi; \pi].$$

Схемная фазовая скорость

В компактной и бикомпактной схемах аппроксимация по времени наиболее точным ДНРК 2-го порядка с 2 стадиями и $|\lambda| = 1$.





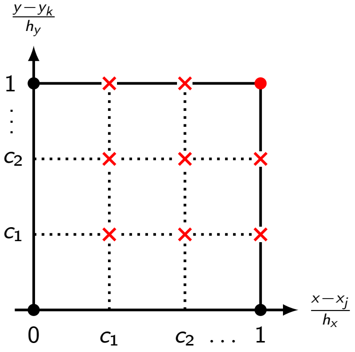
Подход 1 — без пространственного расщепления

Система уравнений:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}^x(\mathbf{u}) + \partial_y \mathbf{f}^y(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Общий вид полудискретной схемы:

$$\sum_{\gamma,\delta=1}^{m} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} \frac{d\mathbf{u}_{j+c_\gamma,k+c_\delta}}{dt} + $$
$$+ \sum_{\delta=1}^{m} a_{\beta\delta} \frac{\mathbf{f}^x_{j+c_\alpha,k+c_\delta} - \mathbf{f}^x_{j,k+c_\delta}}{h_x} + $$
$$+ \sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\gamma} \frac{\mathbf{f}^y_{j+c_\gamma,k+c_\beta} - \mathbf{f}^y_{j+c_\gamma,k}}{h_y} = \mathbf{0}.$$



Достоинство: порядок аппроксимации по t не ограничен.
Недостаток: вычислительная трудоемкость сравнительно высока.

Подход 2 — с локально-одномерным расщеплением (LOD)

Достоинство: скорость счета на порядок выше, чем у нерасщепленных схем.
Недостаток: порядок аппроксимации по t не превосходит 2-й.

Консервативная монотонизация

Две схемы

Схема A: монотонная 1-го порядка.
Схема B: бикомпактная высокого порядка (немонотонная).

Алгоритм

1. Вычислить решения $\mathbf{u}^A, \mathbf{u}^B$ на слое t_{n+1} по схемам A, B соответственно.
2. В каждой ячейке K построить интерполяционный полином Лагранжа, отвечающий $\mathbf{u}^B$, ограничить его покомпонентно около среднего:

$$\widetilde{p}(\mathbf{r}; K) = \overline{u}^B(K) + \beta(K)\left(p^B(\mathbf{r}; K) - \overline{u}^B(K)\right), \quad \mathbf{r} = (x, y, z) \in K,$$

$$\overline{u}^B(K) = \frac{1}{V(K)} \int\limits_K p^B(\mathbf{r}; K)\, dV = \sum_{\mathbf{r} \in K} \omega(\mathbf{r}; K) u^B(\mathbf{r}),$$

$$\beta(K) = \frac{1}{1 + w^2(K)}, \quad w(K) = \frac{C_1 \| u^A - u^B \|_{L_\infty(K)}}{\| u^A \|_{L_\infty(K)}} \quad (C_1 \geqslant 0 \text{ — параметр}).$$

3. В каждом узле $\mathbf{r}$ по ограниченным полиномам всех ячеек, которым он принадлежит, построить результирующее решение на слое t_{n+1}:

$$\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{K \ni \mathbf{r}} \omega(\mathbf{r}; K)\, \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}; K)\, V(K)}{\sum_{K \ni \mathbf{r}} \omega(\mathbf{r}; K)\, V(K)}.$$

Содержание доклада

Аппроксимация по пространству

Уравнение диффузии

$$L_1 u \equiv \partial_t u + \partial_x q = 0, \quad q = -Dv, \quad v = \partial_x u, \quad D = \mathrm{const} > 0.$$

Метод конечных объемов + метод прямых

Кубический интерполяционный полином Эрмита:

$$p(x,t): \quad p(x_m,t) = u_m(t), \quad \partial_x p(x_m,t) = v_m(t), \quad m = j, j+1.$$

Вывод полудискретной схемы:

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (L_1 p)(\xi,t)\,d\xi = 0, \quad \frac{1}{h}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \partial_\xi (L_1 p)(\xi,t)\,d\xi = 0.$$

Полудискретная бикомпактная схема 4-го порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u_j + u_{j+1}}{2} - \dfrac{h}{12}(v_{j+1} - v_j)\right) = D\,\dfrac{v_{j+1} - v_j}{h}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{u_{j+1} - u_j}{h}\right) = \dfrac{6D}{h^2}\left(v_j - 2\,\dfrac{u_{j+1} - u_j}{h} + v_{j+1}\right). \end{cases}$$

Аппроксимация по времени. Квазилинейный случай. Многомерный случай. Уравнения Навье–Стокса

Аппроксимация по времени при постоянном коэффициенте диффузии

Диагонально-неявные методы РК.
Устойчивость при любом τ/h, можно задавать $\tau = O(h)$
(параболическое число Куранта $D\tau/h^2 = O(h^{-1})$).

Квазилинейный случай

При каждом послойном переходе представляем поток в виде

$$q(u,v) = \widetilde{q}(u,v) - D_0 v,\ \ \widetilde{q}(u,v) = [D_0 - D(u)]v,\ \ D_0 = (0.5+\delta)\max_j D(u_j^n).$$

Используем неявно-явные методы РК.
Дискретизируем $q(u,v)$ как $\widetilde{q}(u^{\mathrm{old}}, v^{\mathrm{old}}) - D_0 v^{\mathrm{new}}$.
Устойчивость при любом τ/h сохраняется.

Многомерный случай

На структурированных сетках, без расщепления.
Реализация методом итерируемой приближенной факторизации.
Сходится за 3-6 итераций.

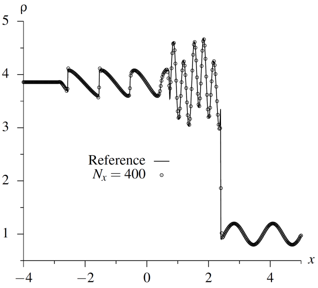
Уравнения Навье–Стокса (для сжимаемой теплопроводной жидкости)

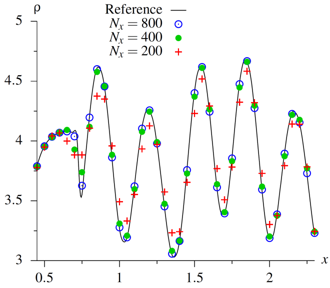
Используется расщепление Марчука по физическим процессам
на уравнения Эйлера и диссипативную часть.

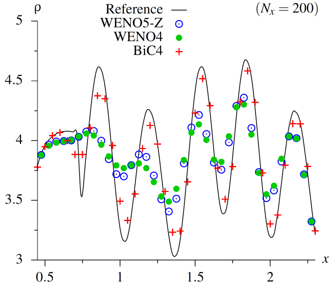
Содержание доклада

Задача Шу-Ошера

Схема BiC4-DIRK3; $\kappa = 0.5$, $C_1 = 5$.



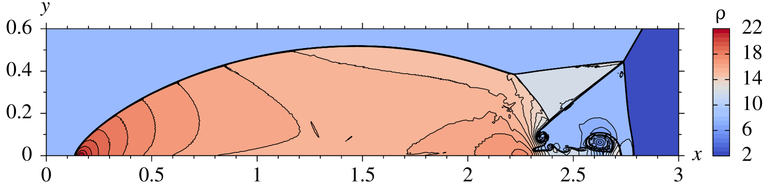




Некоторые двумерные задачи газодинамики

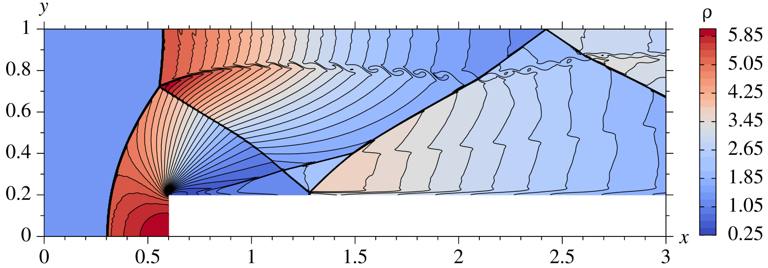
Двойное маховское отражение

Схема BiC4-IMEXRK3-LOD; $h_x = h_y = 1/480$, $\kappa = 0.9$, $C_1 = 5$.



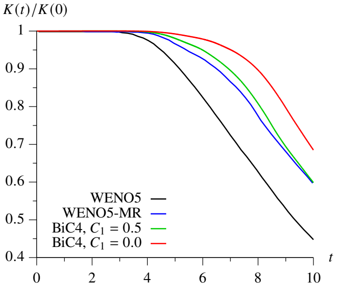
Обтекание уступа в канале

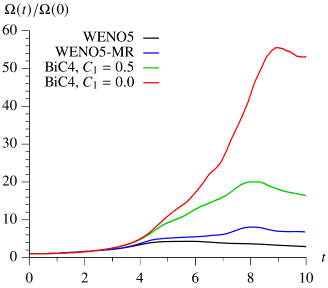
Схема BiC4-IMEXRK3-LOD; $h_x = h_y = 1/320$, $\kappa = 0.9$, $C_1 = 5$.

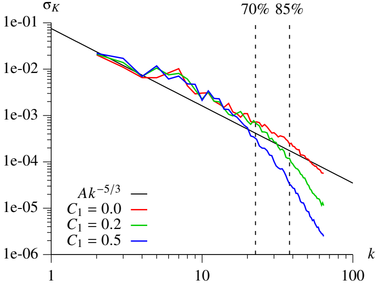


Распад вихря Тейлора-Грина в невязком газе

Схема BiC4-DIRK2-LOD; $h_x = h_y = h_z = 2\pi/128$, $\varkappa = 0.8$, $C_1 = 0, 0.2, 0.5$.

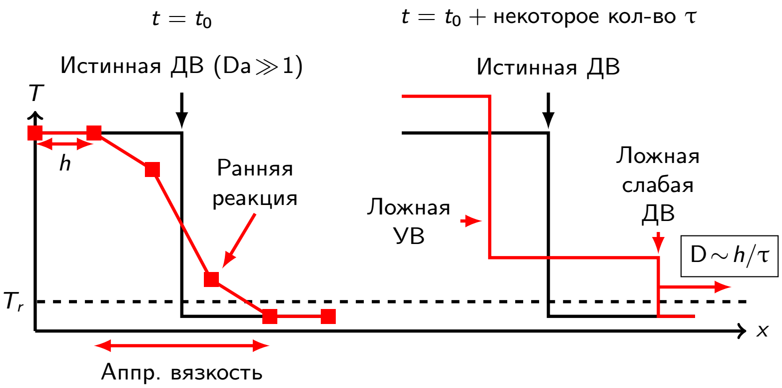






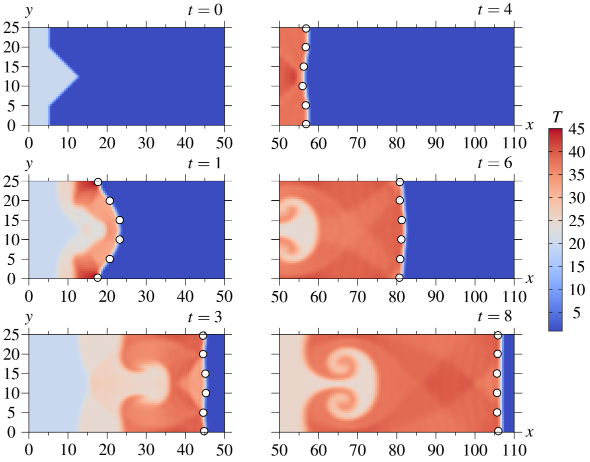
Проблема прекурсора

Иллюстрация



Распространение детонационной волны в канале

Схема BiC4-DIRK3-LOD; $h_x = h_y = 1/50$, $\varkappa = 2$, $C_1 = 10$.
Хим. модель: $H_2 + O_2 \to 2OH$, $2OH + H_2 \to 2H_2O$, катализатор N_2, $Da \sim 10^5$.



Кружки — положение ДВ согласно схеме WENO5-SR.
У бикомпактной схемы τ в 40 раз больше и распад ДВ на прекурсор и УВ подавляется автоматически, без выделения ДВ и специальной коррекции.

Перенос и диссипация плоского вихря

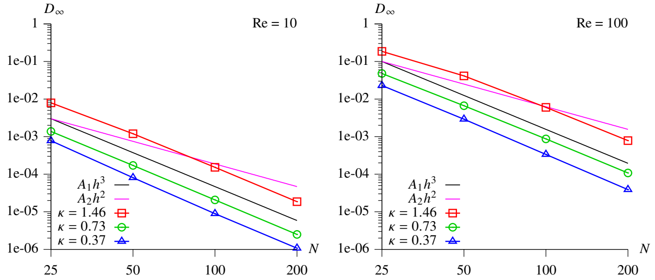
Начальное распределение параметров газа

$$v_x = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} - yF, \quad v_y = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} + xF, \quad T = 1 - \frac{\gamma - 1}{2} F^2, \quad p = \frac{\rho T}{\gamma} = \frac{\rho^\gamma}{\gamma},$$

$$F = F(x, y) = \frac{2.5}{\pi\sqrt{\gamma}} \exp\frac{1 - x^2 - y^2}{2}, \quad (x, y) \in (-5, 5).$$

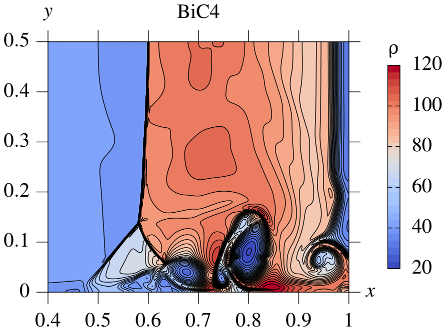
Сходимость при измельчении шагов сетки

Схема:
BiC4-IMEXRK3-LOD для уравнений Эйлера,
BiC4-IMEXRK2 для диссипативной части;
$h_x = h_y = 10/N$, $N = 25, 50, \ldots, 400$, $\kappa \approx 1.46, 0.73, 0.37$, $C_1 = 0$.



Течение вязкого газа в ударной трубе

Схема:
BiC4-IMEXRK3-LOD для уравнений Эйлера,
BiC4-IMEXRK2 для диссипативной части;
$h_x = h_y = 1/500$, $\kappa = 0.6$, $C_1 = 5$.



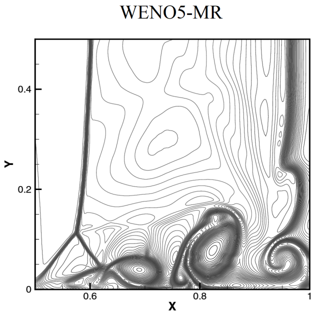
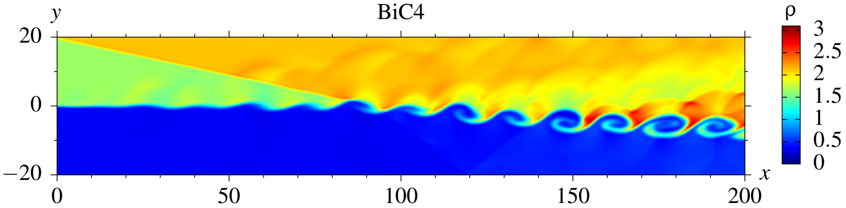
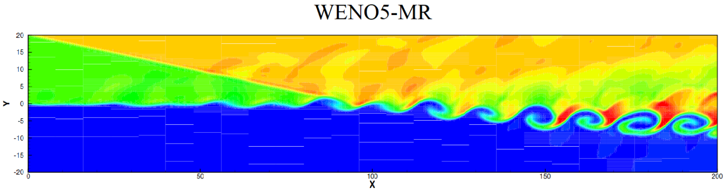


Схема	Тройная точка	Высота наиб. вихря	Наклон наиб. вихря
BiC4	$(0.580, 0.136)$	0.164	71.5°
WENO5-MR	$(0.576, 0.113)$	0.165	55.0°
Эталон	$(0.580, 0.138)$	0.166	74.5°

Схема:
BiC4-IMEXRK3-LOD для уравнений Эйлера,
BiC4-IMEXRK2 для диссипативной части;
$h_x = h_y = 0.4$, $\kappa = 0.8$, $C_1 = 0$.





Бикомпактная схема меньше «размазывает» вихревую дорожку.

Содержание доклада

Заключение

1

Бикомпактные схемы демонстрируют ту же или лучшую точность относительно других современных схем высокого порядка.

2

Вместе с тем, бикомпактные схемы

- Имеют более компактный (минимальный) шаблон по сравнению с конечно-объемными/разностными WENO схемами.
- Обходятся меньшим числом степеней свободы по сравнению со схемами разрывного метода Галеркина.
- Обладают хорошей устойчивостью, позволяющей считать с крупным шагом по времени.

3

Бикомпактные схемы перспективны в приложении к задачам аэро- и гидродинамики, а именно, моделированию турбулентных течений, явления детонации, процессов теплопередачи.

Публикации по теме доклада

1. *Брагин М.Д.* Бикомпактные схемы на локально-адаптивных декартовых сетках для уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2025. Т. 65, № 4. С. 529–548.
2. *Брагин М.Д.* Противопоточные бикомпактные схемы для гиперболических законов сохранения // Докл. АН. 2024. Т. 517. С. 50–56.
3. *Брагин М.Д.* Бикомпактные схемы для уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой жидкости // Докл. АН. 2023. Т. 509. С. 17–22.
4. *Брагин М.Д.* Неявно-явные бикомпактные схемы для гиперболических систем законов сохранения // Матем. моделирование. 2022. Т. 34, № 6. С. 3–21.
5. *Брагин М.Д.* Влияние монотонизации на спектральное разрешение бикомпактных схем в задаче о невязком вихре Тейлора-Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 4. С. 625–641.
6. *Bragin M.D.* High-order bicompact schemes for the quasilinear multidimensional diffusion equation // Applied Numerical Mathematics. 2022. V. 174. P. 112–126.
7. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Бикомпактные схемы для многомерного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, № 4. С. 625–643.
8. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 6. С. 21–36.
9. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bicompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // Applied Numerical Mathematics. 2020. V. 151. P. 229–245.
10. *Брагин М.Д., Рогов Б.В.* Комбинированная многомерная бикомпактная схема, имеющая повышенную точность в областях влияния нестационарных ударных волн // Докл. АН. 2020. Т. 494. С. 9–13.

Спасибо за внимание!