ВНИИА
РОСАТОМ

Моделирование осесимметричных течений контактным методом SPH с корректировкой градиента сглаживающего ядра

ФГУП ВНИИА

Рублев Г.Д., Паршиков А.Н., Дьячков С.А.

19 мая 2025

Исходные дифференциальные уравнения в осесимметричном случае

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU^r\right) + \frac{\partial U^z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} + \frac{U^r}{r}, \qquad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial r}\mathbf{e}^r + \frac{\partial P}{\partial z}\mathbf{e}^z\right) = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P, \qquad (2)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU^r\right) + \frac{\partial U^z}{\partial z}\right) = -\frac{P}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} - \frac{PU^r}{\rho r}, \qquad (3)$$

где

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} = \frac{\partial U^r}{\partial r} + \frac{\partial U^z}{\partial z},$$

P – давление, $\mathbf{e}^\alpha$ – единичные орты цилиндрической системы координат rz, $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial r, \partial/\partial z)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{U} = (U^r, U^z)^{\mathrm{T}}$ – скорость вещества, ρ – плотность вещества, e – удельная внутренняя энергия.

Осесимметричный CSPH

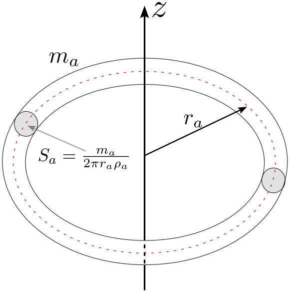
Рассматривая скалярную функцию F, заданную в полуплоскости rz $(r > 0)$ можно записать аппроксимацию через сглаживающее ядро W:

$$F(\mathbf{r}) = \int ds' F(\mathbf{r}') W\left(\left|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\right| / h; h\right) + O(h), \tag{4}$$

где $ds = dr \cdot dz$ – элемент площади, $\mathbf{r} = (r, z)^T$.

Пусть m_a – масса тороидального элемента вещества (SPH-частицы) радиусом r_a с площадью поперечного сечения $S_a = \frac{m_a}{2\pi r_a \rho_a}$. SPH-оценки для дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\nabla} F \rangle_a &= \sum_b F_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab}; \\ \langle \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{F} \rangle_a &= \sum_b \frac{m_b}{2\pi r_b \rho_b} \mathbf{F}_b \cdot \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab}. \end{aligned} \tag{5}$$



Осесимметричный CSPH

Пусть $f(r;A)$ – некоторая гладкая функция радиальной координаты, зависящая от A как от параметра. Для аппроксимации градиента давления рассмотрим следующее тождество:

$$\boldsymbol{\nabla} P = \frac{\boldsymbol{\nabla}(f(r;A)P) - P\boldsymbol{\nabla} f(r;A)}{f(r;A)} = \frac{\boldsymbol{\nabla}(f(r;A)P) + P\boldsymbol{\nabla} f(r;A)}{f(r;A)} - 2P\frac{f'(r;A)}{f(r;A)}\mathbf{e}^r. \quad (6)$$

Для аппроксимации дивергенции скорости рассмотрим следующее тождество:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot(f(r;A)\mathbf{U}) - \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(r;A)}{f(r;A)}. \quad (7)$$

Осесимметричный CSPH

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b r_b}\frac{f(r_b;A)}{f(r_a;A)}(\mathbf{U}_b - \mathbf{U}_a)\cdot\nabla_a W_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}. \qquad (8)$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a r_b}\frac{f(r_b;A)}{f(r_a;A)}(P_a+P_b)\nabla_a W_{ab} + 2\frac{P_a f'(r_a;A)}{\rho_a f(r_a;A)}\mathbf{e}^r. \qquad (9)$$

$$\frac{dE_a}{dt} = \frac{de_a}{dt} + \mathbf{U}_a\cdot\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} =$$
$$-\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a r_b}\frac{f(r_b;A)}{f(r_a;A)}\frac{P_a+P_b}{2}(\mathbf{U}_b+\mathbf{U}_a)\cdot\nabla_a W_{ab} +$$
$$\left(\frac{2f'(r_a;A)}{f(r_a;A)} - \frac{1}{r_a}\right)\frac{P_a U_a^r}{\rho_a}. \qquad (10)$$

Осесимметричный CSPH

Далее будем полагать параметр A в уравнениях (9), (8), (10) равным r_a. Как видно из уравнения (9), чтобы полный импульс сохранялся нужно потребовать, чтобы выполнялось

Условие 1.

$$\frac{f(r_b;r_a)}{r_b f(r_a;r_a)} = \frac{f(r_a;r_b)}{r_a f(r_b;r_b)}, \quad \forall r_a, r_b.$$

Из уравнения (10) следует, что для консервативности уравнения полной энергии необходимо потребовать, чтобы выполнялось

Условие 2.

$$2\frac{f'(r_a;r_a)}{f(r_a;r_a)} = \frac{1}{r_a}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $f(r_a;r_a) = 1$ при любом r_a. Функцию $f(r;r_a)$ будем искать в виде

$$f(r;r_a) = \frac{1}{r_a} g(r,r_a), \tag{11}$$

где $g(r,r_a) = g(r_a,r)$, $g(r_a,r_a) = r_a$, $g'(r_a,r_a) = 1/2$.

Осесимметричный CSPH

ВНИИА
РОСАТОМ

После подстановки контактных значений:

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b r_b h_{ab}} f(r_b; r_a) 2(U^{R*}_{ab} - U^R_a) W'_{ab} + \frac{U^r_a}{r_a}. \qquad (12)$$

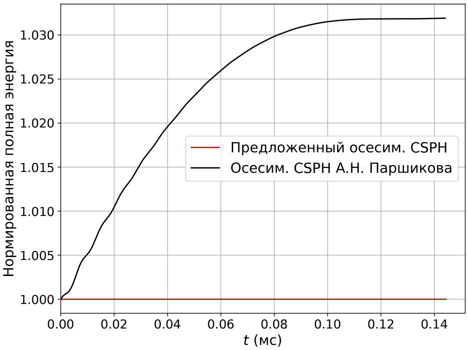
$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b \rho_a r_b} f(r_b; r_a) 2P^*_{ab} \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a}\mathbf{e}^r. \qquad (13)$$

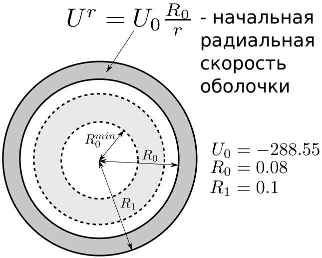
$$\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b \rho_a r_b h_{ab}} f(r_b; r_a) 2P^*_{ab} U^{R*}_{ab} W'_{ab}, \qquad (14)$$

Осесимметричный CSPH

$g(r, r_a)$	Схема	Название
$\sqrt{r r_a}$	$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b h_{ab}} \frac{2}{\sqrt{r_a r_b}} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}$ $\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a} \frac{2}{\sqrt{r_a r_b}} P_{ab}^* \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r$ $\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a h_{ab}} \frac{2}{\sqrt{r_a r_b}} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab}$	“Среднее геометр.”
$\frac{2 r_a r}{r + r_a}$	$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b h_{ab}} \frac{4}{r_a + r_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}$ $\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a} \frac{4}{r_a + r_b} P_{ab}^* \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r$ $\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a h_{ab}} \frac{4}{r_a + r_b} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab}$	“Среднее арифм.”
$\frac{r_a + r}{2}$	$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{r_a r_b} (U_{ab}^{R*} - U_a^R) W'_{ab} + \frac{U_a^r}{r_a}$ $\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a} \frac{(r_a + r_b)}{r_a r_b} P_{ab}^* \boldsymbol{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a} \mathbf{e}^r$ $\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a h_{ab}} \frac{(r_a + r_b)}{r_a r_b} P_{ab}^* U_{ab}^{R*} W'_{ab}$	“Среднее гармон.”

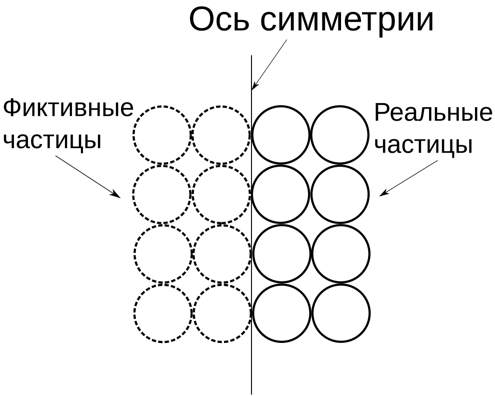
Консервативность: сжатие оболочки





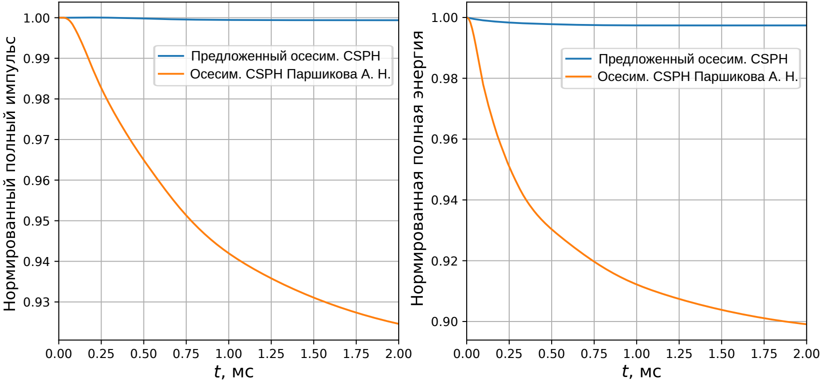
Изменение полной энергии в цилиндрической задаче Верни при использовании предлагаемой осесимметричной схемы CSPH “среднее гармоническое” и схемы осесимметричного метода CSPH А.Н. Паршикова [Parshikov и др. 2000].

Условие вблизи оси



Около оси осуществляется локальный переход на схему осесимметричного метода CSPH А.Н. Паршикова [Parshikov и др. 2000] с отражением частиц за ось симметрии.

Консервативность: соударение капель



Изменение полного импульса и полной энергии в задаче о столкновении двух капель жидкого олова при использовании предлагаемой осесимметричной схемы CSPH “среднее гармоническое” и схемы осесимметричного метода CSPH А.Н. Паршикова [Parshikov и др. 2000].

Корректировка (ТКС)

Подробнее см. [Rublev и др. 2024].

$$\frac{d\varepsilon_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b}\frac{r_a+r_b}{r_a r_b}\left(\overline{U}_{ab}^{*R} - \overline{U}_a^R\right)\frac{W'_{ab}}{h_{ab}} + \frac{U_a^r}{r_a}, \tag{15}$$

$$\frac{d\mathbf{U}_a}{dt} = -\sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_b\rho_a}\frac{r_a+r_b}{r_a r_b}\tilde{P}_{ab}^{*}\mathbf{L}_{ab}^{-1}\cdot\boldsymbol{\nabla}_a W_{ab} + \frac{P_a}{\rho_a r_a}\mathbf{e}^r. \tag{16}$$

$$\frac{dE_a}{dt} = \sum_b \frac{m_b}{2\pi\rho_a\rho_b}\frac{r_a+r_b}{r_a r_b}\tilde{P}_{ab}^{*}\tilde{U}_{ab}^{*R}W'_{ab}. \tag{17}$$

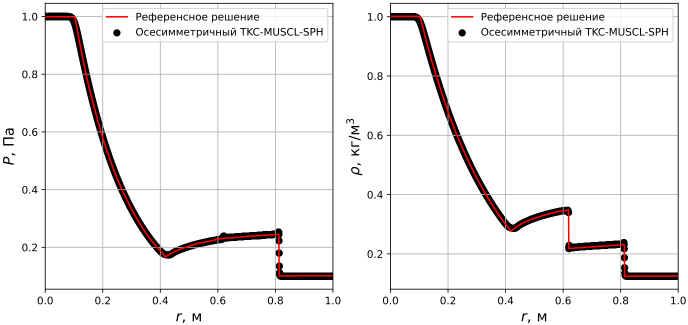
где $\overline{U}_a^R = \mathbf{U}_a\cdot\left(\mathbf{L}_a^{-1}\cdot\mathbf{e}_{ba}^R\right)$, $\tilde{U}_a^R = \mathbf{U}_a\cdot\left(\mathbf{L}_{ab}^{-1}\cdot\mathbf{e}_{ba}^R\right)$,
$\mathbf{L}_{ab}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_a^{-1}+\mathbf{L}_b^{-1})$. $\overline{U}_{ab}^{*R}$, $\tilde{P}_{ab}^{*}$ и $\tilde{U}_{ab}^{*R}$ вычисляются по формулам

$$\overline{U}_{ab}^{*R} = \frac{\overline{U}_l^R Z_l + \overline{U}_r^R Z_r + (P_l - P_r)}{Z_l + Z_r},$$

$$\tilde{U}_{ab}^{*R} = \frac{\tilde{U}_l^R Z_l + \tilde{U}_r^R Z_r - P_r + P_l}{Z_l + Z_r},$$

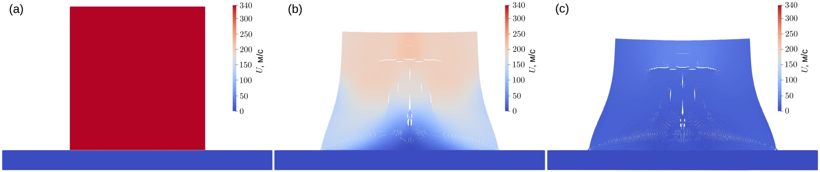
$$\tilde{P}_{ab}^{*} = \frac{P_r Z_l + P_l Z_r - Z_l Z_r\left(\tilde{U}_r^R - \tilde{U}_l^R\right)}{Z_l + Z_r}.$$

Распад разрыва в идеальном газе



Цилиндрический тест Сода

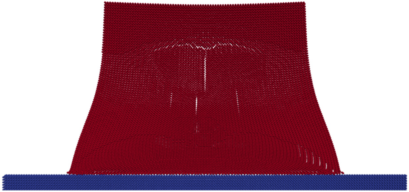
Тест Тейлора



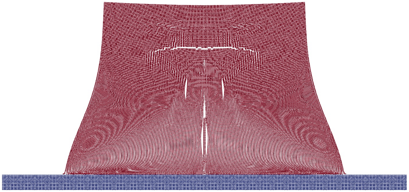
Моделирование удара стального цилиндра по твёрдой стенке. Начальная длина цилиндра $L_0 = 0.81$ см, диаметр равен $D_0 = 0.762$ см. Скорость удара равна 343 м/с. Раскраска выполнена по скорости. (a) Момент соударения, (b) 5 мкс (c) 11 мкс.

Тест Тейлора

3D MUSCL-SPH

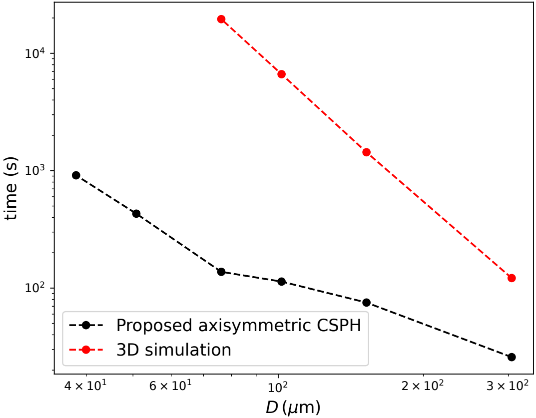


Осесимметричный MUSCL-SPH



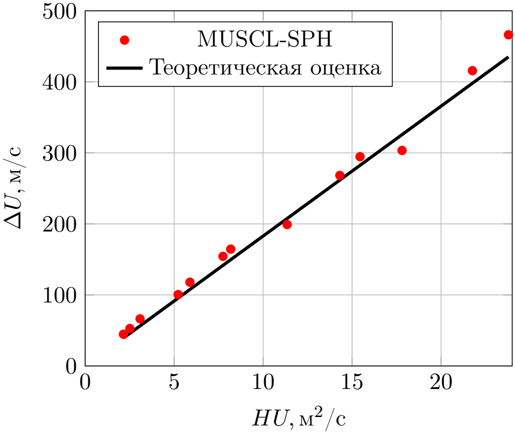
Сравнение результатов моделирования удара стального цилиндра по твёрдой стенке трёхмерным методом MUSCL-SPH в декартовых координатах и предлагаемым осесимметричным методом MUSCL-SPH. Начальная длина цилиндра $L_0 = 0.81\,$см, диаметр равен $D_0 = 0.762\,$см. Скорость удара равна $343\,$м/с. Показан момент времени $t = 11\,$мкс.

Тест Тейлора



Сравнение времени моделирования удара стального цилиндра по твёрдой стенке методом MUSCL-SPH при разных размерах частиц в двумерном осесимметричном случае и в трёхмерном декартовом случае на 16 вычислительных ядрах.

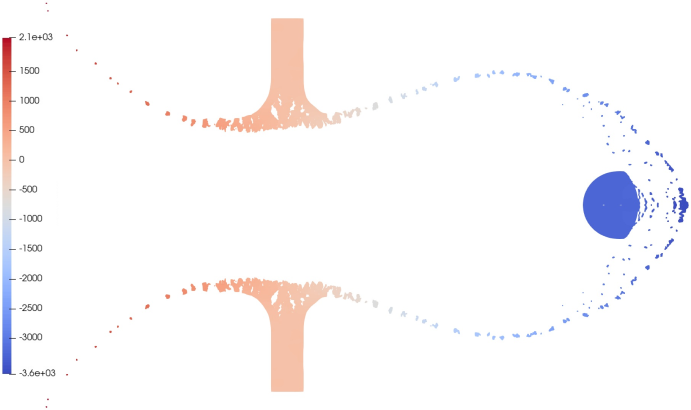
Пробитие тонких преград



$$\Delta U \cong \frac{\rho S}{2m} HU, \qquad (18)$$

Пробитие тонких преград. Изменение скорости шарика при столкновении с тонкой преградой. Сплошная черная линия соответствует теоретической формуле (18), маркеры – результатам расчётов.

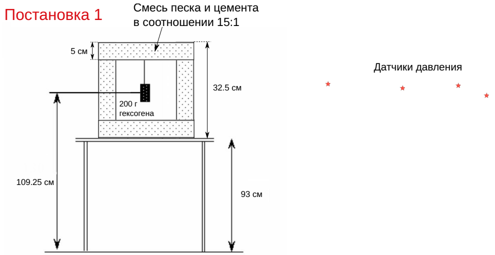
Пробитие тонких преград

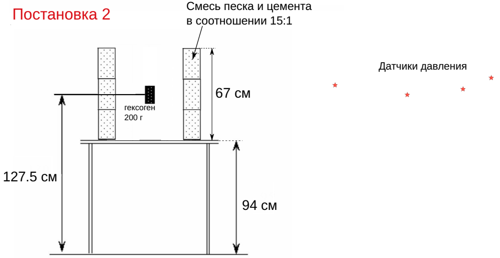


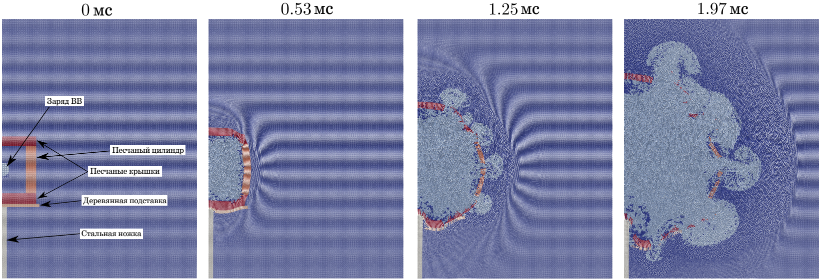
Пробитие тонкой преграды PMMA стальным шариком. Моделирование производилось осесимметричным методом MUSCL-SPH. $H = 3.28$ мм, $U = 3460$ м/с. На рисунке представлен момент времени 11.7 мкс.

Постановка задачи

ВНИИА
РОСАТОМ

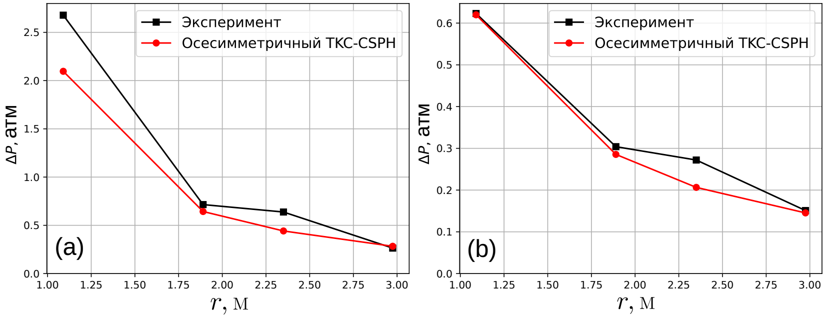






Взрыв внутри песчаного цилиндра в первой постановке: динамика разрушения песчаной преграды. На рисунках показано распределение материалов в разные моменты времени.

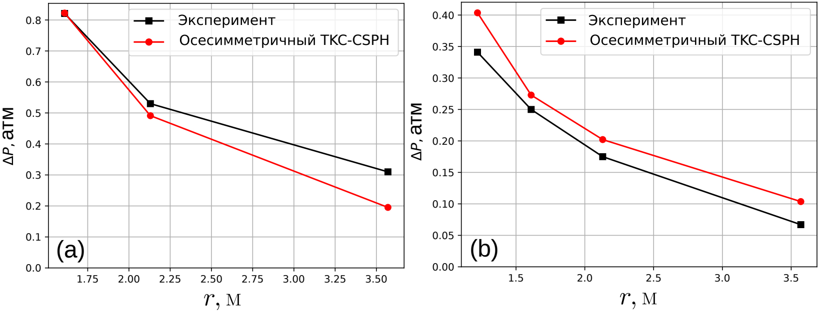
Эксперимент 1



Максимальный прирост давления в датчиках по отношению к атмосферному давлению в первом эксперименте: (a) взрыв в воздухе, (b) взрыв в защитном песчаном цилиндре.

Эксперимент 2

ВНИИА РОСАТОМ



Максимальный прирост давления в датчиках по отношению к атмосферному давлению во втором эксперименте: (a) взрыв в воздухе, (b) взрыв в защитном песчаном цилиндре.

Список литературы

[1] Anatoly N. Parshikov и др. “Impruvements in SPH method by means of interparticle contact algorithm and analysis of perforation tests at moderate projectile velocities”. в: *International Journal of Impact Engineering* 24 (2000), с. 779—796. DOI: 10.1016/S0734-743X(99)00168-2.

[2] G. D. Rublev, A. N. Parshikov и S. A. Dyachkov. “Improving approximation accyracy in Godunov-type smoothed particle hydrodynamics methods”. англ. в: *Applied Mathematics and Computation* 488 (2024). DOI: 10.1016/j.amc.2024.129128.

Спасибо за внимание

Рублев Г.Д., Паршиков А.Н., Дьячков С.А.

E-mail: rublev_gd_97@vk.com

19 мая 2025