

Классы точных решений с нелинейной зависимостью от пространственных Координат для описания движений сжимаемых сред

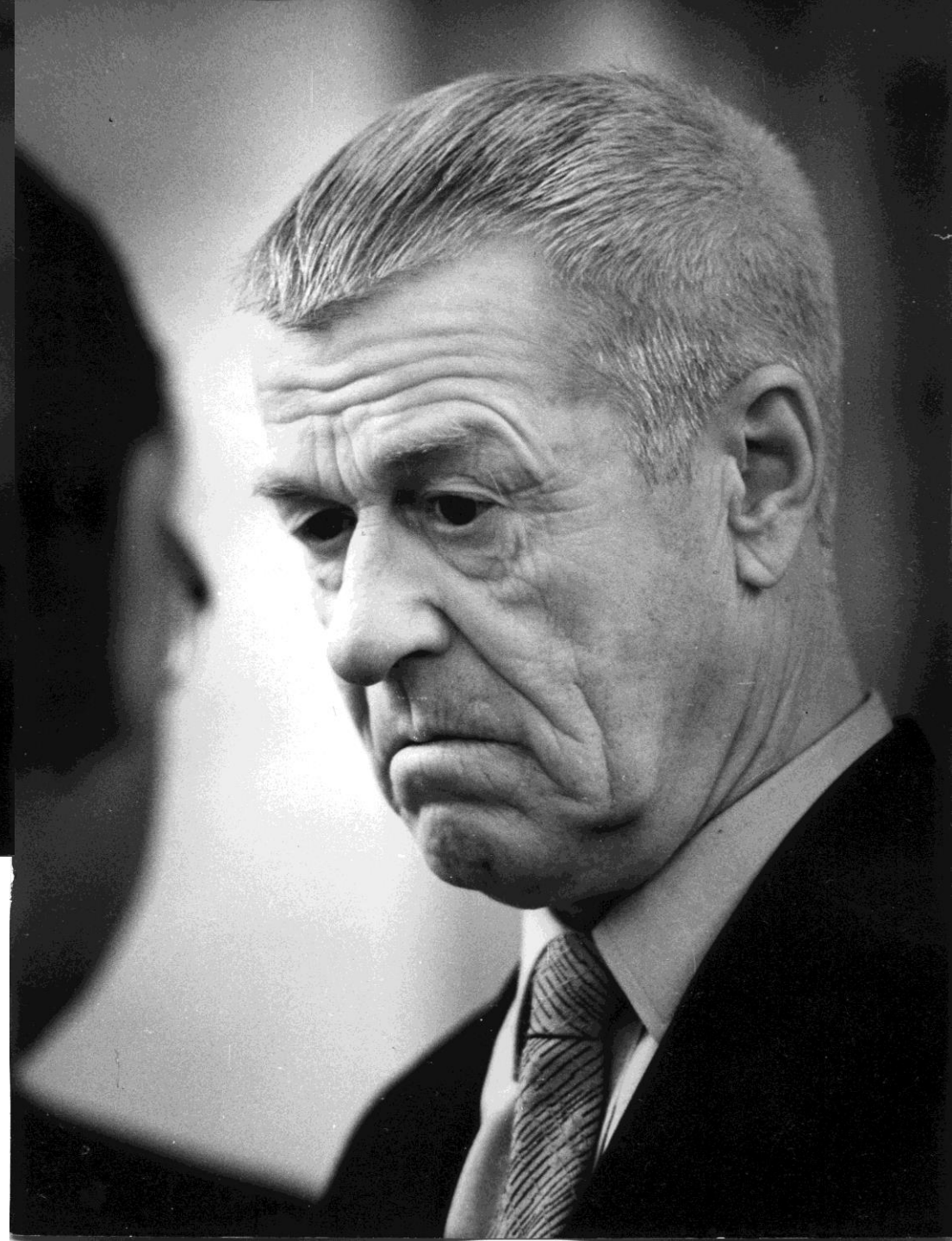
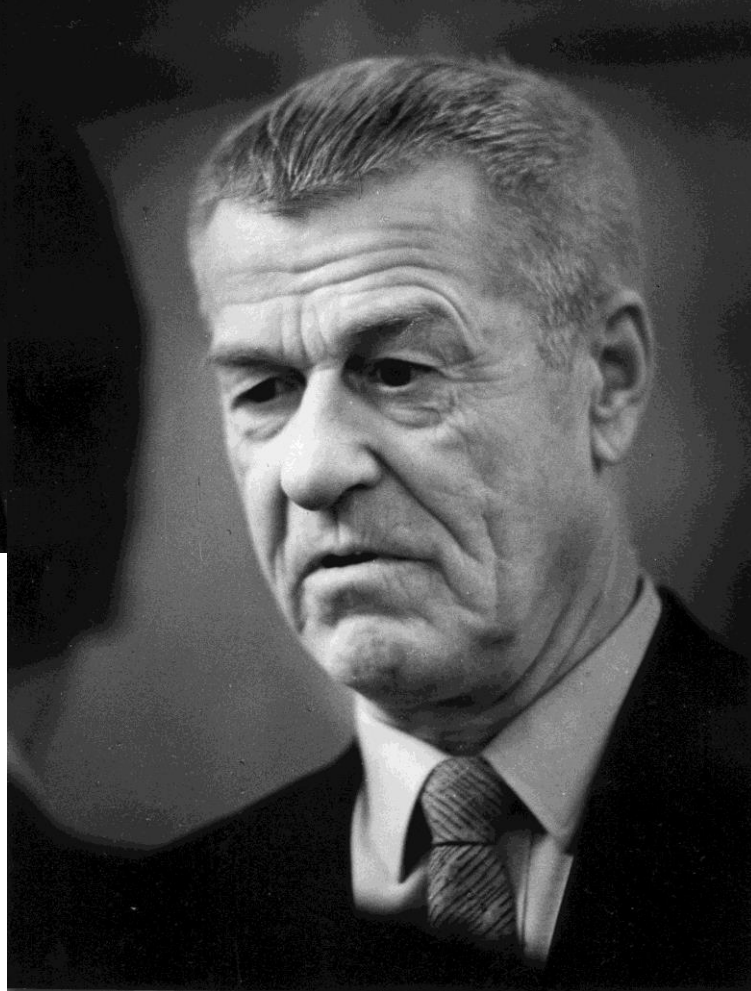
**Наталья Владимировна Бурмашева,
Евгений Юрьевич Просвиряков**

Уральский федеральный университет
имени первого президента России Б.Н. Ельцина,
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова УрО РАН,

evgen_pros@mail.ru

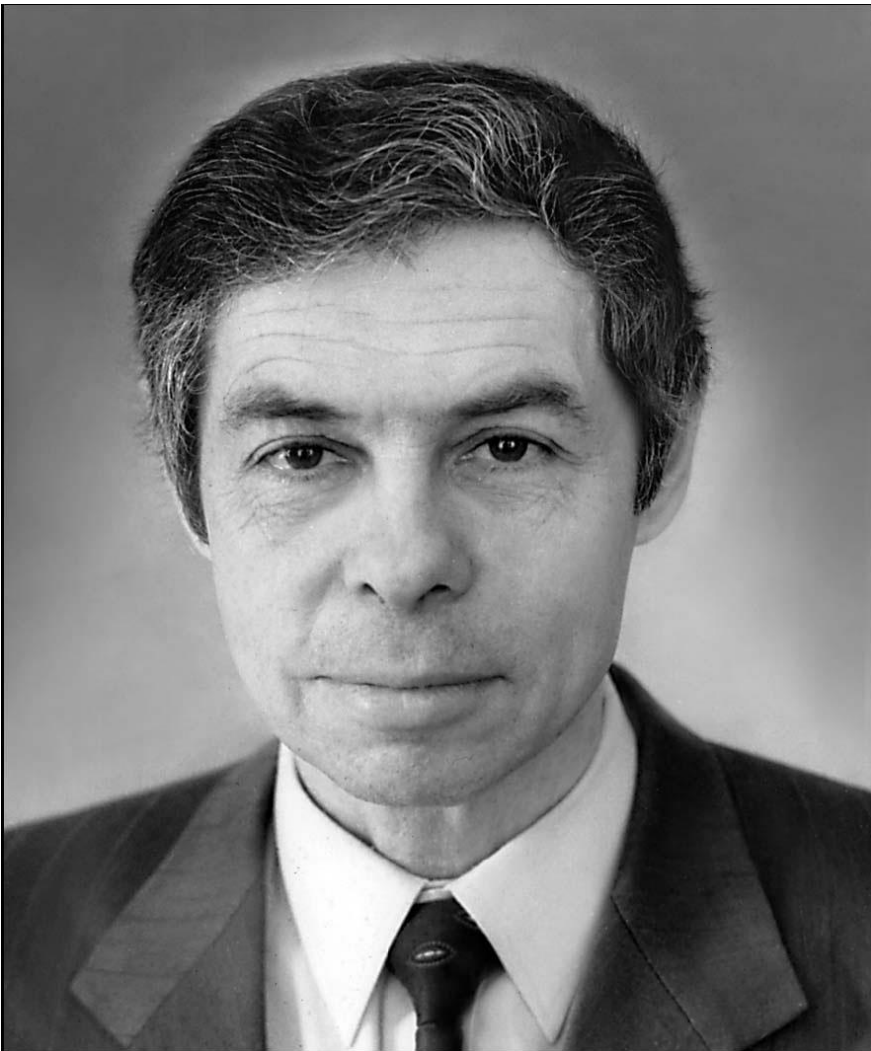


1987 год



1990 год

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА.



$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$



КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Семейство точных решений Линя-Сидорова-Аристова.

Поле скоростей представим следующим образом:

$$V_1 = U(x_3, t) + U_1(x_3, t)x_1 + U_2(x_3, t)x_2,$$

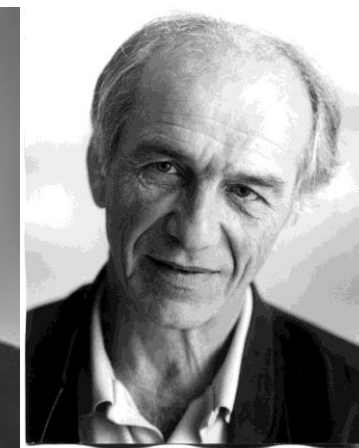
$$V_2 = W(x_3, t) + W_1(x_3, t)x_1 + W_2(x_3, t)x_2,$$

$$V_3 = w(x_3, t), \quad x_3 = z.$$

Поля давления и температуры описываются квадратичными формами:

$$P = P_0(x_3, t) + P_1(x_3, t)x_1 + P_2(x_3, t)x_2 + P_{11}(x_3, t)\frac{x_1^2}{2} + P_{12}(x_3, t)x_1x_2 + P_{22}(x_3, t)\frac{x_2^2}{2}$$

$$T = T_0(x_3, t) + T_1(x_3, t)x_1 + T_2(x_3, t)x_2 + T_{11}(x_3, t)\frac{x_1^2}{2} + T_{12}(x_3, t)x_1x_2 + T_{22}(x_3, t)\frac{x_2^2}{2}$$



1. Ershkov S.V. Prosviryakov E.Yu. Burmasheva N.V. Christianto Victor Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations // Fluid Dynamics Research. 2021. Vol. 53. 044501.
2. Ershkov, S.V.; Prosviryakov, E.Y.; Burmasheva, N.V.; Christianto, V. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review. *Symmetry* **2023**, *15*, 1825.
3. Горулева Л.С., Просвирыков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики для описания конвективных течений бинарных жидкостей // Химическая физика и мезоскопия. – 2023. – Т. 25. – №4. С.447-462.

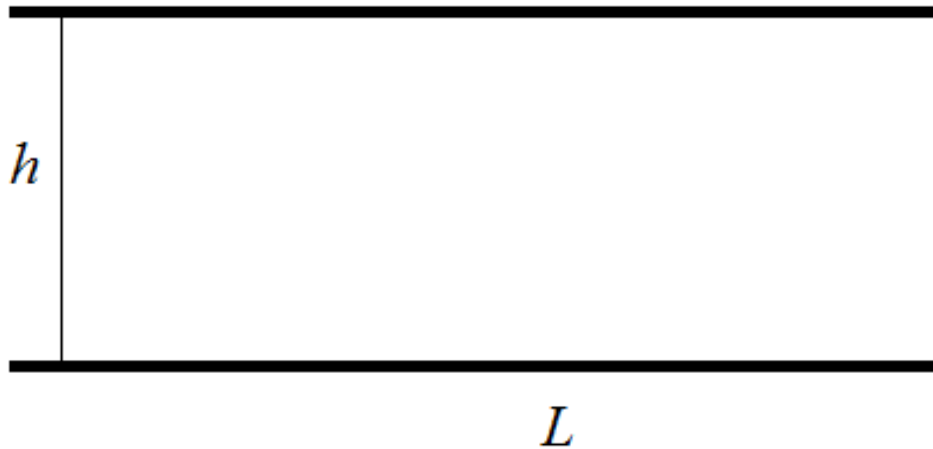
НЕОДНОРОДНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + F_x, \quad \text{КЛАССИЧЕСКИЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ}$$

КУЭТТА, СТОКСА, ПУАЗЕЙЛЯ, НУССЕЛЬТА

$$V_x = V_x(y, z, t)$$

Вязкие силы преобладают над силами инерции



$$\delta = \frac{h}{L} \ll 1$$

Крупномасштабные течения (приближение тонкого слоя) — для решения задач геофизической и астрофизической гидродинамики, климатологии и метеорологии

$$V_z = 0,$$

$$P = \text{const.}$$

Burmasheva N.V. Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to Navier–Stokes Equations Describing a Gradient Nonuniform Unidirectional Vertical Vortex Fluid Flow // Dynamics. 2022. No. 2. P. 175–186.

**Переопределенная система уравнений для описания
неоднородных течений типа Куэтта**

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

**Точное решение системы уравнений Навье-Стокса принадлежит
классу Линя-Сидорова-Аристова:**

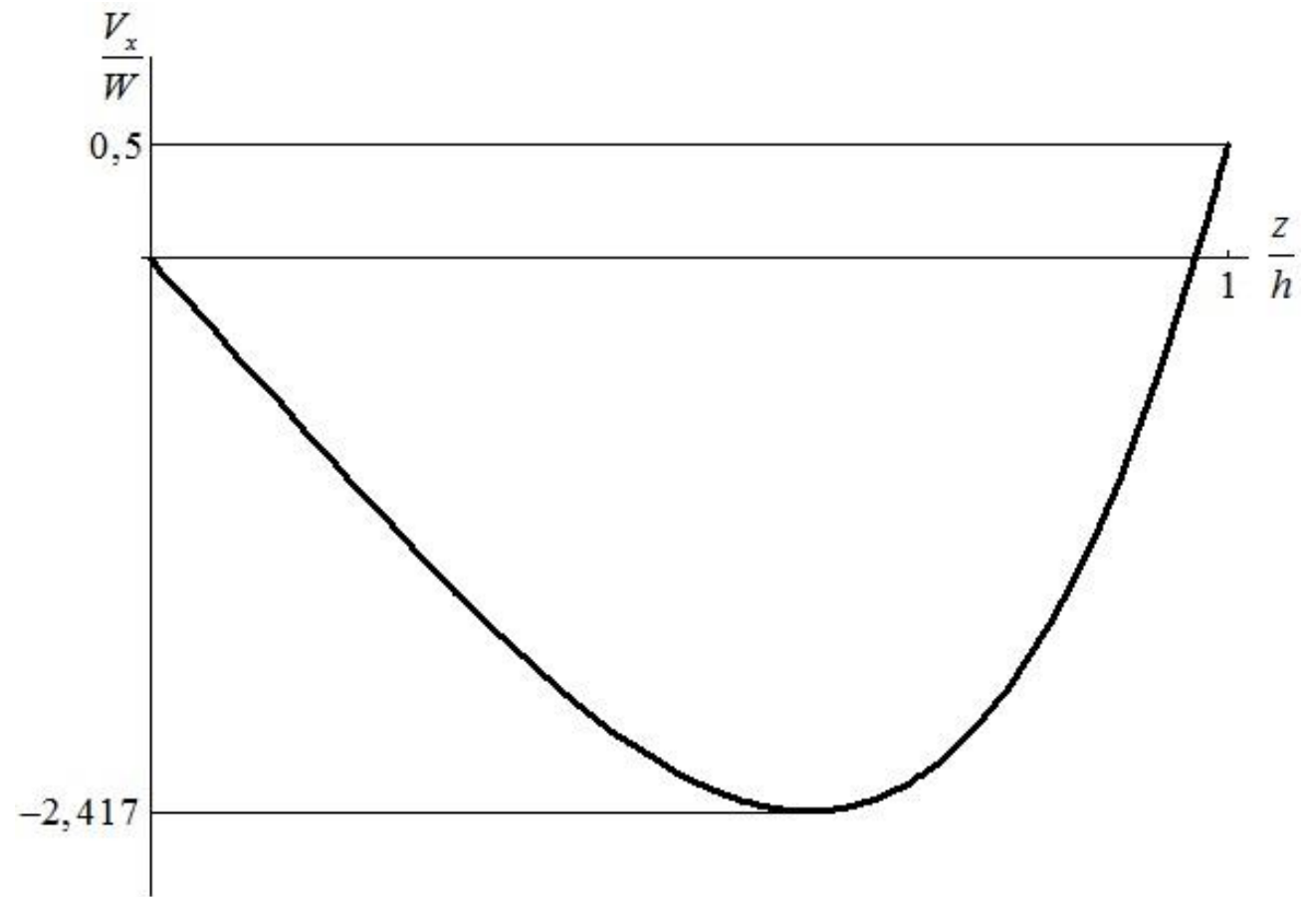
$$V_x = U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y, \quad V_y = V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y, \\ u_1^2 + v_1 u_2 = 0.$$

1. Аристов С.Н. Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 2 С. 177-182.
2. Аристов С.Н. Просвиряков Е.Ю. Волны Стокса в завихренной жидкости, Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 3. С. 309–318.
3. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 25-31.

Решение краевой задачи

$$U = \frac{\Omega W \sin \varphi h^2}{12\nu} \frac{z}{h} \left(\left(\frac{z}{h} \right)^3 - 1 \right) + W \cos \varphi \frac{z}{h},$$

$$u = \Omega \frac{z}{h}, \quad V = W \sin \varphi \frac{z}{h}.$$



**Переопределенная система уравнений для описания
неоднородных течений типа Пуазейля**

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -P_1 + \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = -P_2 + \nu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0.$$

**Точное решение системы уравнений Навье-Стокса принадлежит
классу Линя-Сидорова-Аристова:**

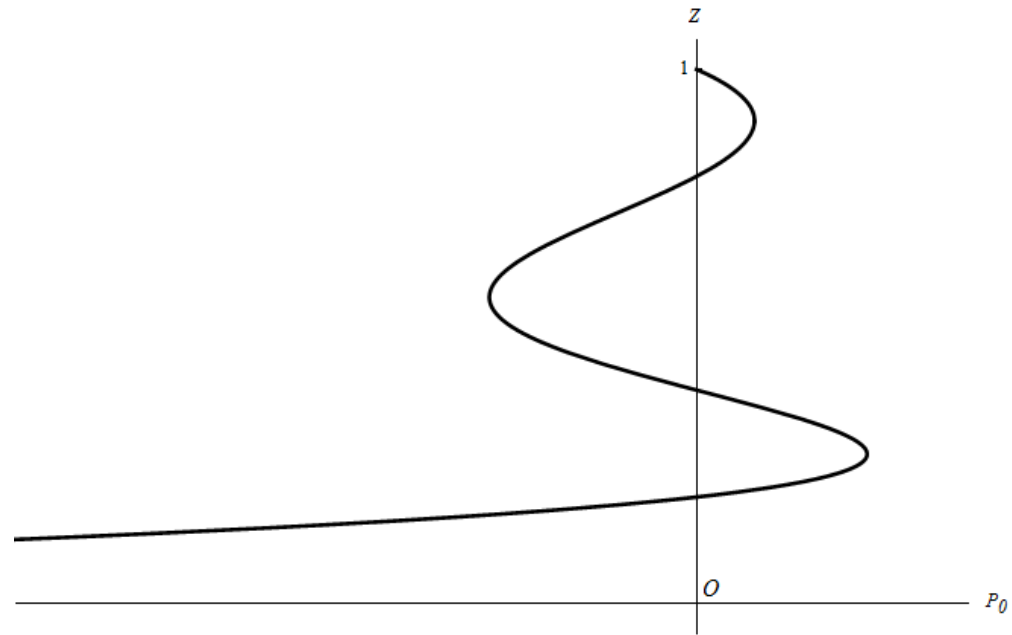
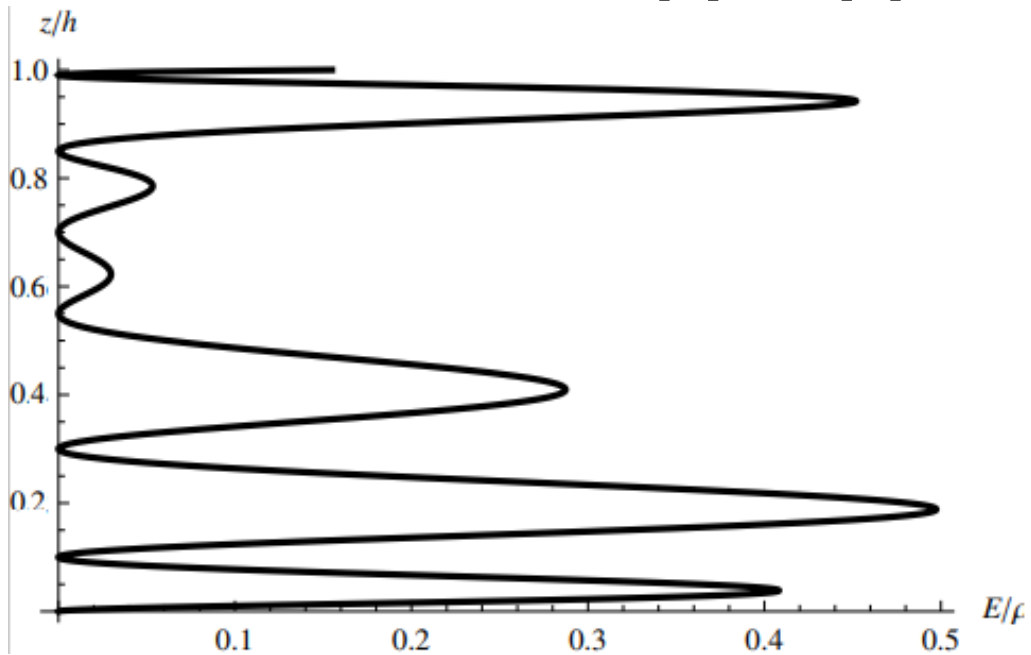
$$V_x = U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y, \quad V_y = V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y, \\ u_1^2 + v_1 u_2 = 0.$$

1. Burmasheva N.V. Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille Flow // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2022. Vol. 56. No. 5. P. 662–668.
2. Бурмашева Н.В. Дьячкова А.В. Просвирыков Е.Ю. Неоднородное течение Пуазейля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2022. № 77. С. 68–85.

Неоднородные сдвиговые течения в различных силовых полях

1. Бурмашева Н.В. Просвиряков Е.Ю. Точное решение уравнений Навье-Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. – № 2. С. 79-87.
2. Бурмашева Н.В. Просвиряков Е.Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // Известия Иркутского государственного университета. Серия “Математика”. 2020. Т. 32. С. 32-48.
3. Бурмашева Н.В. Просвиряков Е.Ю. Точные решения уравнений Обербека–Буссинеска для сдвиговых течений вязкой бинарной жидкости с учетом эффекта Соре // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2021. Т. 37. С. 17-30.
4. Burmasheva N.V. Prosviryakov E.Yu. Exact Solutions to the Navier – Stokes Equations for Describing the Convective Flows of Multilayer Fluids / Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2022. Vol. 18. - no. 3. P. 397-410.
5. Baranovskii E.S. Burmasheva N.V. Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to the Navier-Stokes equations with couple stresses // Symmetry-Basel. 2021. V. 13. No. 8. Article ID 1355.

ИЛЛЮСТРАЦИЯ СТРАТИФИКАЦИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ



Точные решения уравнений Навье-Стокса с нелинейной зависимостью поля скоростей от части координат

$$V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{u_k(z, t) y^k}{k!},$$

$$V_y = V(z, t),$$

$$V_z = 0.$$

Зубарев Н.М. Просвиряков Е.Ю. О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 6 (358). С. 65-71.

Обобщения и модификация

Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теоретические основы химической технологии, 2019, Т. 53, № 1, С. 112-120.

Привалова В.В. Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений Обербека-Буссинеска, описывающих несжимаемую жидкость // Теоретические основы химической технологии. 2022. Т. 56. № 3. С. 337–344.

Просвиряков Е.Ю., Михайлов С.А., Ледянкина О.А., Горулева Л.С. Точные решения уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска для описания течений бинарных жидкостей // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2023. – №2. – С 77-84.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ – УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

Система уравнений, описывающая неустановившееся течение вязкой несжимаемой жидкости с учетом внутреннего (локального) тепловыделения, обусловленного внутренним трением слоев по закону Ньютона (ньютоновская жидкость)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T + Q$$

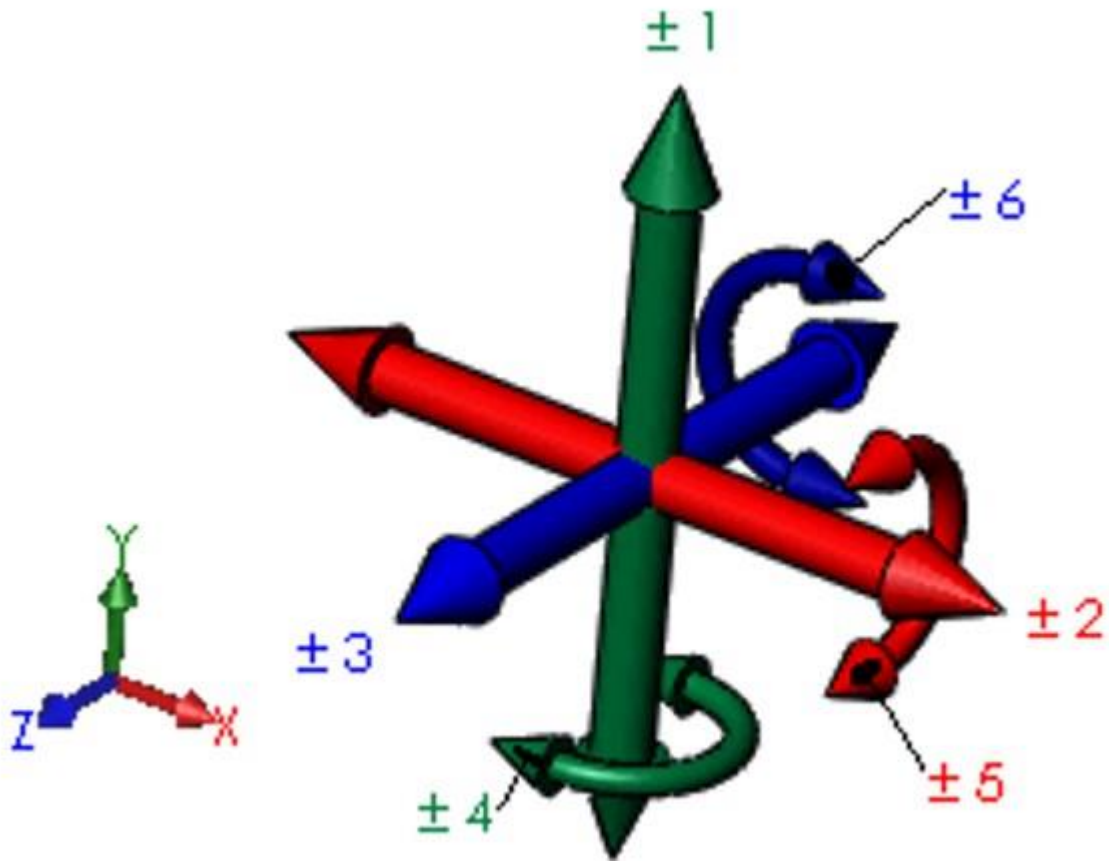
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

функция определяет диссипацию энергии жидкости (трансформацию механической энергии в тепловую); c_p – удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении

$$Q = \frac{\nu}{2c_p} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)^2$$

Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье-Стокса с учетом внутреннего тепловыделения // Химическая физика и мезоскопия, 2022, Т. 24, № 1, С. 82-92.

СТЕПЕНИ СВОБОДЫ



МНОГОМЕРНАЯ ГИДРОДИНАМИКА

$$n + \frac{n(n-1)}{2}$$

ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МОМЕНТНЫМИ (ПАРНЫМИ) КАСАТЕЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} - \mu \Delta \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

БИГАРМОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР!
***n*-азоксианизол (жидкие кристаллы)**

Baranovskii E.S. Burmasheva N.V. Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to the Navier-Stokes equations with couple stresses // Symmetry-Basel. 2021. V. 13. No. 8. Article ID 1355.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

$$V_x = U(z, t) + u_1(z, t)x + u_2(z, t)y, \quad V_y = V(z, t) + v_1(z, t)x + v_2(z, t)y,$$

$$P = P_0(z, t) + P_1(z, t)x + P_2(z, t)y + P_{11}(x_3, t)\frac{x^2}{2} + P_{12}(x_3, t)xy + P_{22}(x_3, t)\frac{y^2}{2}$$

УСЛОВИЕ СОВМЕСТИНОСТИ

$$u_1v_2 - u_2v_1 = \frac{P_{11} + P_{22}}{2}$$

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0$$

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА.

$$\frac{d(\rho \mathbf{V})}{dt} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{V} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0, \quad V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{u_k(z, t) y^k}{k!},$$

$$V_y = V(z, t),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T + Q. \quad V_z = 0,$$

$$\rho = \rho_0(z, t) + \rho_1(z, t) x + \rho_2(z, t) x.$$

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!

evgen_pros@mail.ru