

Модификация разрывного метода Галеркина с использованием базисных функций, зависящих от времени

М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин

XVII Международная конференция «Забабахинские научные чтения» (ЗНЧ-2025)
19 мая 2025 г. - 23 мая 2025 г.
г. Снежинск

ПРОБЛЕМА

Потеря точности в областях локализации ударных волн при расчетах схемами повышенного порядка аппроксимации.

В том числе и разрывным методом Галеркина (РМГ) с лимитерами.

ЦЕЛЬ

Разработка методики

- сохраняющая идеологию схем сквозного счета
- распознающая положение ударных волн
- эффективно подавляющая наличие нефизичных осцилляций
- сохраняющая точность методики в областях гладкости решения.

Использование базисных функций, зависящих от времени

Система уравнений Эйлера

$$\partial_t U + \nabla \cdot F(U) = 0 \quad (1)$$

Консервативные переменные U и компоненты потоковых функции $F(U)$, заданы в виде

$$U = (\rho, \rho u, E)^T$$

$$F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, (E + p)u)^T$$

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

Замыкаем систему уравнением состояния (в нашем случае уравнения состояния идеального газа).

Под обобщенным решением задачи (1) будем понимать кусочно-гладкие функции $U(x, t)$, которые могут иметь разрывы или разрывные производные на конечном числе кусочно-гладких линий на плоскости (x, t) , удовлетворяющие начальным и краевым условиям задачи, для которых для любой области D , с кусочно-гладкой границей справедливо интегральное тождество

$$\oint_{\partial D} U(x, t) dx - F(U(x, t)) dt = 0$$

Для обобщенного решения $U(x, t)$ системы (1) и для любой гладкой в области D функции $\varphi(x, t)$ в областях с кусочно-гладкой границей выполнено соотношение:

$$\begin{aligned} & - \oint_{\partial D} U(x, t) \varphi(x, t) dx - F(U(x, t)) \varphi(x, t) dt - \\ & - \int_D \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} F(U(x, t)) + \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} U(x, t) \right) dx dt = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$a = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \dots \leq x_{N+1/2} = b$$

На каждом интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ рассмотрим двумерное пространство

Базис выбираем в виде ортогональных полиномов:

$$\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1(x, t) = \begin{cases} (x - x_i)(1 - \alpha(t)) + \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_i, x_{i+1/2}], \\ (x - x_i)(1 - \alpha(t)) - \frac{\alpha(t)\Delta x}{2}, & x \in [x_{i+1/2}, x_i]. \end{cases} \quad (3)$$

На всем интервале $[a, b]$ эти функции образуют $2N$ мерное пространство E . и приближенное решение ищется как элемент этого пространства. Для его построения будем использовать процедуру, аналогичную технике метода Годунова.

В результате мы получим последовательность коэффициентов $U_{pi}(t^n)$, $p = 0, 1$, $t^n = n\Delta t$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим приближенное решение, непрерывно зависящее от времени t .

$$U_i(x, t) = U_{0i}(t) + U_{1i}(t)\varphi_{1i}(x, t)$$

Теорема 1.

- Коэффициенты $U_{pi}(t)$, $p=0,1$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(U_{pi}(t) \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_{pi}^2(x, t) dx \right) - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial x} F(U(x, t)) + \frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial t} U(x, t) \right) dx dt + \\ + \frac{1}{\Delta x} \left[\varphi_{pi}(x_{i+1/2}, t) F(U(x_{i+1/2}, t)) + [\varphi_{pi}(x_i^+, t) - \varphi_{pi}(x_i^-, t)] F(U(x_i, t)) - \right. \\ \left. - \varphi_{pi}(x_{i-1/2}, t) F(U(x_{i-1/2}, t)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

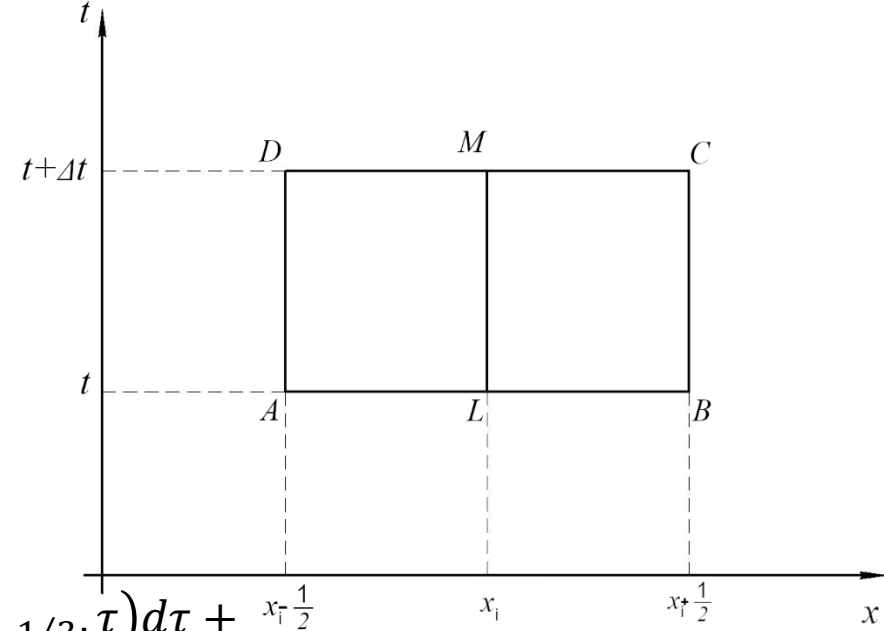
Где $U(x_{i-1/2}, t), U(x_{i+1/2}, t)$ получаются в результате решения задачи Римана с данными

$$U_{i-1}(x_{i-1/2}, t) \text{ и } U_i(x_{i-1/2}, t); \quad U_i(x_{i+1/2}, t) \text{ и } U_{i+1}(x_{i+1/2}, t)$$

Рассмотрим на плоскости (x,t) прямоугольную область

$U(x, t)$ - точное решение задачи (1)

с начальными данными $U_p(x, 0)$



$$\begin{aligned}
 & \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} U(x, t) \varphi_{pi}(x, t) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} U(x, t) \varphi_{pi}(x, t) dx - \\
 & - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, \tau)) \varphi_{pi}(x_{i+1/2}, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i-1/2}, \tau)) \varphi_{pi}(x_{i-1/2}, \tau) d\tau + \\
 & - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) \varphi_{pi}(x_i^+, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) \varphi_{pi}(x_i^-, \tau) d\tau - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t + \Delta t) \varphi_{pi}(x, t + \Delta t) dx - \\
 & - \int_{ALMD} \left(\frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial x} F(U(x, t)) + \frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial t} U(x, t) \right) dx d\tau - \int_{LBCM} \left(\frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial x} F(U(x, t)) + \frac{\partial \varphi_{pi}(x, t)}{\partial t} U(x, t) \right) dx d\tau = o(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

Запишем равенство (2) для $\varphi = \varphi_0$

$$\begin{aligned}
 & U_0(t) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, \tau)) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i-1/2}, \tau)) d\tau + \\
 & - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) d\tau - U_0(t + \Delta t) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx = o(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

или

$$U_0(t)\Delta x - F(U(x_{i+1/2}, t))\Delta t + F(U(x_{i-1/2}, t))\Delta t - U_0(t + \Delta t)\Delta x = o(\Delta t^2) \quad (5)$$

Разделив равенство (5) на $\Delta t \Delta x$ перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{U_0(t + \Delta t) - U_0(t)}{\Delta t} + \frac{F(U_{i+1/2}) - F(U_{i-1/2})}{\Delta x} = 0$$

- Запишем равенство для $\varphi = \varphi_1(x, t)$

$$\begin{aligned}
& \left(U_1(t) \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \varphi_1^2(x, t) dx + U_1(t) \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \varphi_1^2(x, t) dx - \right. \\
& - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, \tau)) \varphi_1(x_{i+1/2}, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i-1/2}, \tau)) \varphi_1(x_{i-1/2}, \tau) d\tau + \\
& - \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) \varphi_1(x_i^+, \tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_i, \tau)) \varphi_1(x_i^-, \tau) d\tau - \\
& \left. - U_1(t + \Delta t) \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \varphi_1^2(x, t + \Delta t) dx - U_1(t + \Delta t) \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \varphi_1^2(x, t + \Delta t) dx - \right. \\
& - \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varphi_1(x, \tau)}{\partial x} F(U(x, \tau)) + \frac{\partial \varphi_1(x, \tau)}{\partial \tau} (U_0(\tau) \varphi_0 + U_1(\tau) \varphi_1(x, \tau)) \right) dx d\tau - \\
& \left. - \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial \varphi_1(x, \tau)}{\partial x} F(U(x, \tau)) + \frac{\partial \varphi_1(x, \tau)}{\partial \tau} (U_0(\tau) \varphi_0 + U_1(\tau) \varphi_1(x, \tau)) \right) dx d\tau = o(\Delta t^2)
\end{aligned}$$

Уравнение для второй базисной функции

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U_1(t)}{\partial t} \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} \varphi_1^2(x, t) dx + U_1(t) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial \alpha} \varphi_1(x, t) dx + \\
 & + \frac{1}{\Delta x} \left[\varphi_{pi}(x_{i+1/2}, t) F(U(x_{i+1/2}, t)) + [\varphi_{pi}(x_i^+, t) - \varphi_{pi}(x_i^-, t)] F(U(x_i, t)) - \varphi_{pi}(x_{i-1/2}, t) F(U(x_{i-1/2}, t)) \right] - \\
 & - \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i} \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} F(x, t) dx - \int_{x_i}^{x_i + \Delta x/2} \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} F(x, t) dx = 0
 \end{aligned}$$

1) Первое уравнение

$$\frac{\partial U_0(t)}{\partial t} + \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (6)$$

2) Второе уравнение

$$\frac{\partial U_1(t)}{\partial t} \frac{\Delta x^3}{12} (1 + \alpha + \alpha^2) + U_1(t) \frac{\partial \alpha}{\partial t} (1 + 2\alpha) \frac{\Delta x^3}{24} - \quad (7)$$

$$- \int_{x_c - \Delta x/2}^{x_c} F(x, t)(1 - \alpha) dx - \int_{x_c}^{x_c + \Delta x/2} F(x, t)(1 - \alpha) dx -$$

$$- F^*(x_i) \alpha \Delta x + F^*(x_{i-1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} + F^*(x_{i+1/2}) \alpha \frac{\Delta x}{2} = 0$$

Алгоритм определения α :

1 На каждом шаге по времени **решаем задачу Римана** в точках

$$MMax_{i-1/2}, MMax_i, MMax_{i+1/2}.$$

2 Вычисляем:

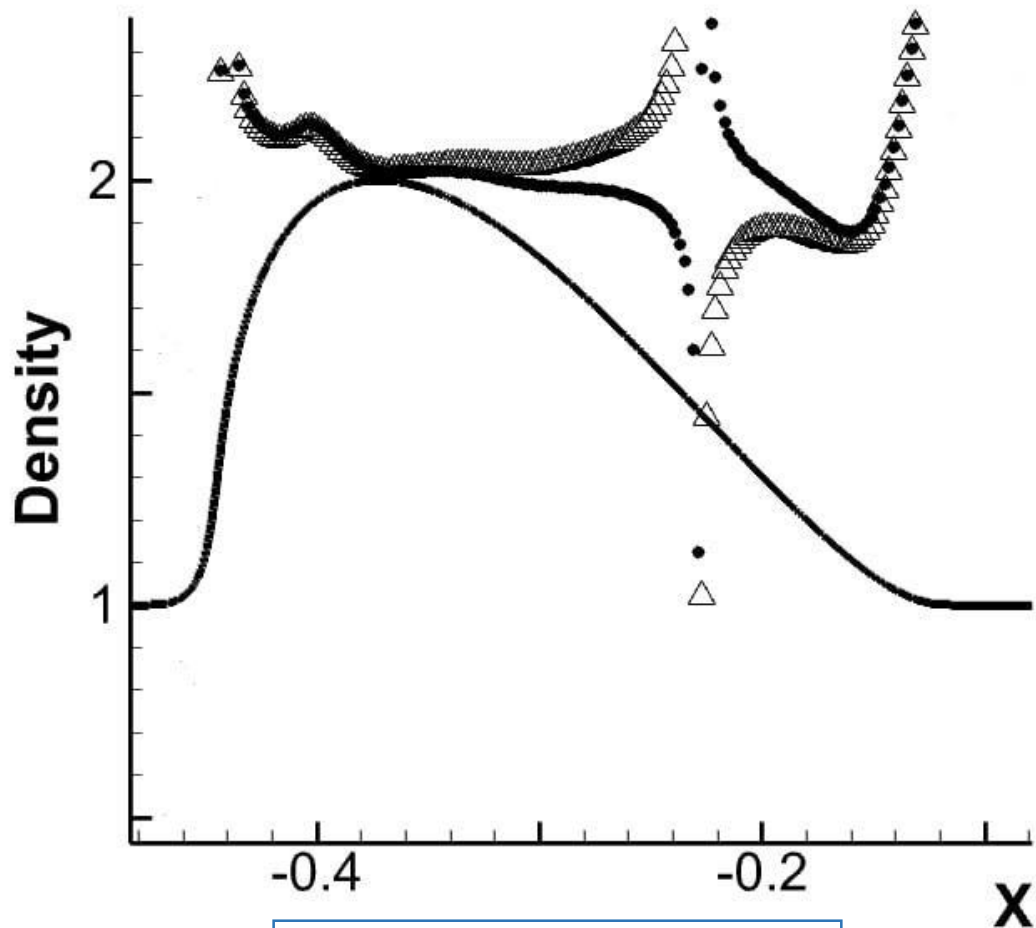
- $MMax_i$ — максимальное число

Маха, образовавшихся ударных волн

если $MMax_i < M1$, то $\alpha_i^{n+1} = 0$

если $MMax_i > M2$, то $\alpha_i^{n+1} = 1$

если $M1 < MMax_i < M2$, то $\alpha_i^{n+1} = \frac{MMax_i - M1}{M2 - M1}$



$$r = \log_3 \frac{|\delta U_1(T, a, b)|}{|\delta U_2(T, a, b)|}$$

$$\delta U_k(T, a, b) = U_k(T, a, b) - u(x, T)$$

ЗАДАЧА 1

Распределение плотности в начальный момент выберем в виде бесконечно гладкой функции:

$$\rho = \begin{cases} 1 + e^{2-2\frac{l^2}{l^2-x^2}}, & |x| < l, \quad x \in [-1, 1], \quad l = 0.2, \quad \gamma = 5/3 \\ 1, & \text{else} \end{cases}$$

Остальные гидродинамические параметры определяются из условий постоянства энтропии и инварианта Римана

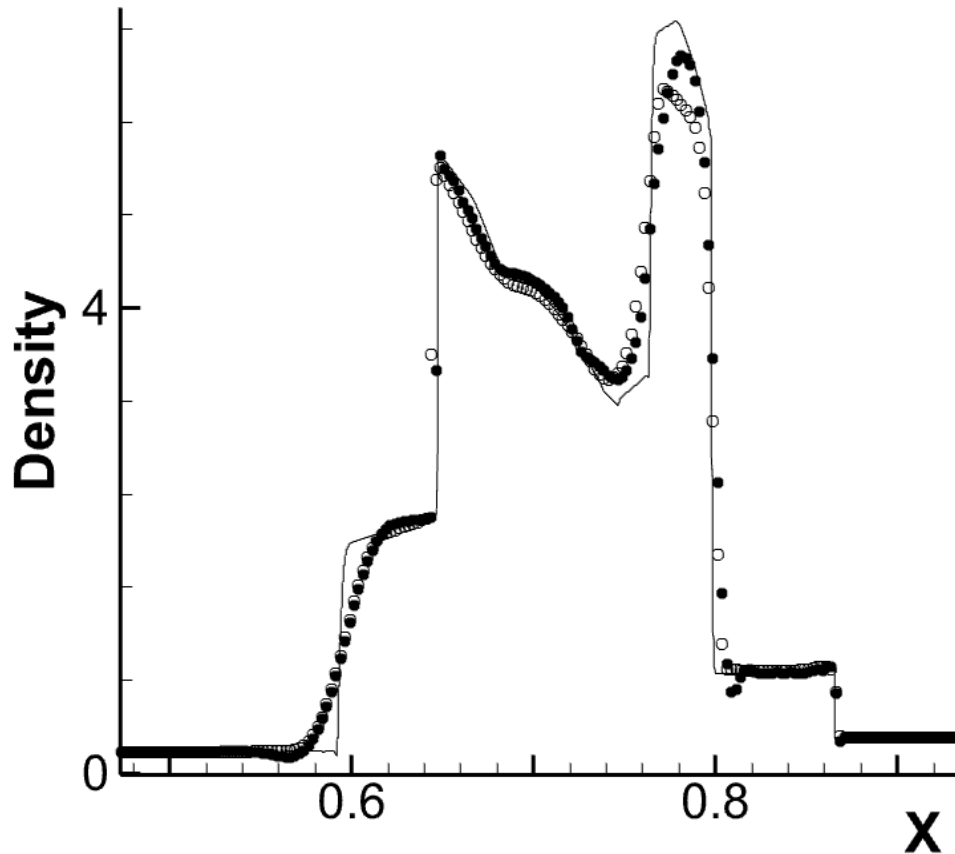
$$S = \frac{P}{\rho^\gamma} \quad R^+ = u + \frac{2c}{\gamma - 1}$$

На границах области были заданы постоянные граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho(-1, t) &= 1, \quad u(-1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(-1, t) = 6, \\ \rho(1, t) &= 1, \quad u(1, t) = -\sqrt{10}, \quad E(1, t) = 6. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 2

WOODWARD-COLELLA BLAST WAVES



- Взаимодействия двух ударных волн

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 10^3), & 0 \leq x \leq 0,1 \\ (1, 0, 10^{-2}), & 0,1 \leq x \leq 0,9 \\ (1, 0, 10^2), & 0,9 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- Расчет ведется до момента времени

$T=0.038$.

Профили плотности, $N_x=400$

черные точки – модифицированный РМГ,

кружки – классический РМГ,

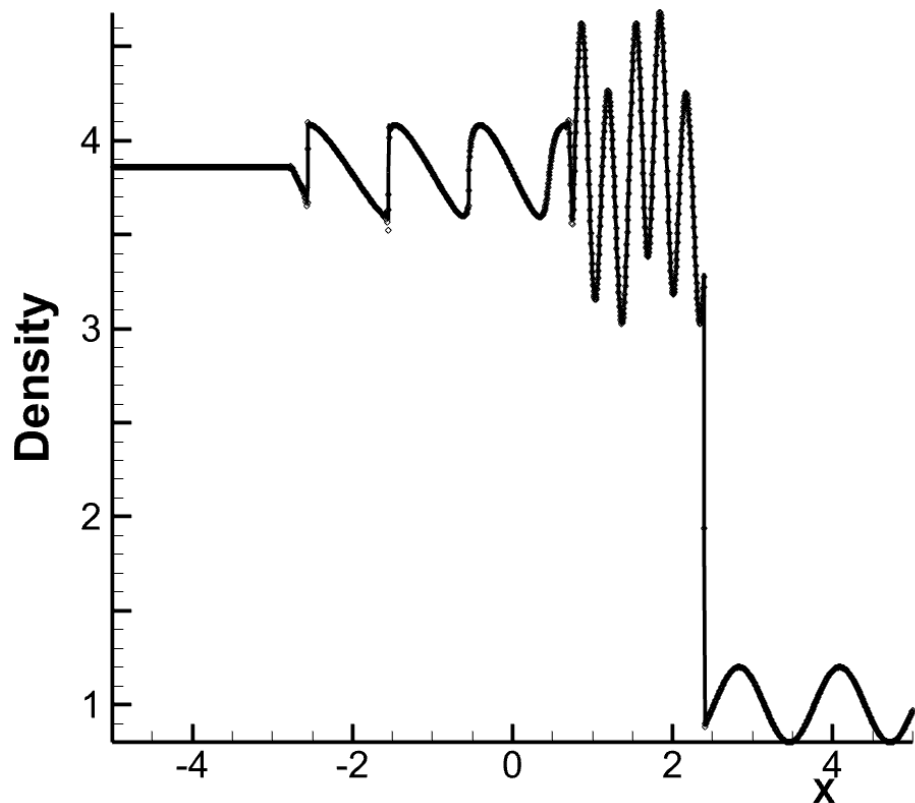
«точное решение» – расчет выполнен на сетке $N_x=16000$ ячеек

ЗАДАЧА 3

SHOCK ENTROPY WAVE INTERACTION

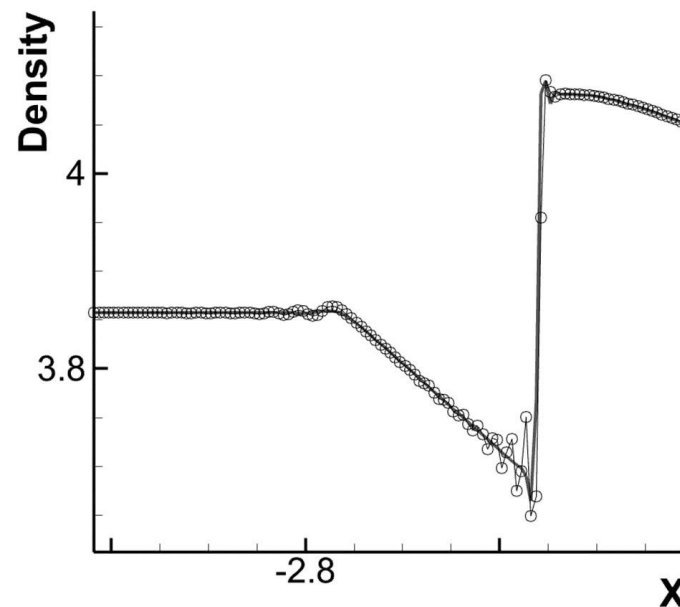
- взаимодействие ударной волны с
энтропийным возмущением

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857, 2.629, 10.333), & -5 \leq x \leq -4 \\ (1 + 0.2\sin(5x), 0, 1), & -4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



Профили плотности, $N_x=2000$.

черная линия – модифицированный РМГ,
кружки – классический РМГ.



Выводы

- Разработана модификация разрывного метода Галеркина, с использованием базисных функций, зависящих от времени.
- Использование таких базисных функций, позволяет естественным образом устойчиво рассчитывать сильные разрывы и одновременно обеспечивать выполнение энтропийного неравенства.
- Ключевым моментом данной схемы является алгоритм определения коэффициента α , отвечающего за точность определения положения разрывов численного решения и, соответственно, качество вычислительной схемы.
- Серия выполненных расчетов позволяет говорить о возможности применения предложенной схемы для решения задач с наличием областей высоких градиентов решения.

Спасибо за внимание!