УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ТЯЖЕЛОЙ ТВЕРДОЙ ПРИМЕСЬЮ

О.Н. ДЕМЕНТЬЕВ

1. Рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость, содержащую примесь тяжелых твердых частиц. Жидкость и примесь предполагаются взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом сплошными средами, взаимодействием между частицами пренебрегается. Взаимодействие между фазами при их относительном движении подчиняется закону Стокса. Объемная доля частиц настолько мала, что можно пренебречь эйнштейновской поправкой к вязкости жидкости. Частицы предполагаются сферическими, недеформируемыми, одинаковой массы m и радиуса r; плотность материала частиц ρ_1 много больше плотности жидкости ρ. Уравнения свободной конвекции несжимаемой жидкости с тяжелой примесью в приближении Буссинеска (см. [1-3]), записанные в безразмерной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\nabla\right)\vec{u} = -\nabla p + \Delta\vec{u} - \frac{a}{\tau_\nu}\left(\vec{u}_p - \vec{u}\right) + GrT\vec{\gamma},$$

$$\frac{\partial \vec{u}_p}{\partial t} + \left((\vec{u}_p + \vec{u}_s)\nabla\right)\vec{u}_p = \frac{1}{\tau_\nu}\left(\vec{u}_p - \vec{u}\right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{u}\nabla\right)T = -\frac{\Delta T}{P} + \frac{ab}{\tau_t}\left(T_p - T\right),$$

$$\frac{\partial T_p}{\partial t} + (\vec{u}_p + \vec{u}_s)\nabla T = -\frac{1}{\tau_\nu}\left(\vec{u}_p - \vec{u}\right),$$

$$div\,\vec{u} = 0,\ \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{P} div\left(N(\vec{u}_p + \vec{u}_s)\right) = 0,$$

$$\tau_\nu = \frac{2}{9} r^2 \frac{\rho_1}{\rho}, \tau_t = \frac{3P\tau_\nu b}{2}, a = \frac{mN}{\rho}, Ga = \frac{gh^3}{\nu^2}, \vec{u}_S = -Ga\tau_\nu\vec{\gamma},$$

$$P = \frac{\nu}{\chi}, \tau_t = \frac{3P\tau_\nu b}{2}, b = \frac{c_1}{c}, Gr = (1+a)\frac{g\beta\Theta h^3}{\nu^2}. \tag{1}$$

В (1) приняты следующие обозначения: $\vec{u}$ - скорость; T - температура; p - давление жидкости, отсчитываемое от перенормированного за счет присутствия оседающих частиц гидростатического давления; c - теплоемкость жидкости при постоянном давлении; β, ν, χ - коэффициент объемного расширения жидкости, ее кинематическая вязкость и температуропроводность; $\vec{g} = -\vec{\gamma} g$ - ускорение свободного падения. Величины с индексом p относятся к облаку частиц, причем $\vec{u}_p$ - скорость, приобретаемая частицами в результате их взаимодействия с движущейся жидкостью, отсчитывается от скорости оседания частиц $\vec{u}_s$; c_1- теплоемкость материала частиц; N - число частиц в единице объема. Величины τ_v и τ_t - безразмерные времена и представляют собой соотвественно: τ_v - время, необходимое для того, чтобы скорость частиц относительно жидкости уменьшилась в e раз по сравнению с ее исходным значением; τ_t - время, необходимое для уменьшения разности температур жидкости и частиц также в e раз; Ga, P, Gr - числа Галилея, Прандтля и Грасгофа. В качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, давления и температуры выбраны соответственно: h, h^2/ν, ν/h, $\rho\nu^2/h^2$, Θ, где h - ширина слоя жидкости, Θ – полуразность температур между границами слоя.

2. Рассмотрим горизонтальный бесконечный слой жидкости, ограниченный параллельными плоскостями $z = 0$, $z = 1$; границы предполагаются свободными, т.е. на них исчезают касательные напряжения. Через верхнюю границу в слой поступают частицы, концентрация которых однородна, нижняя граница подогревается. Частицы оседают, поэтому в невозмущенном состоянии в слое имеется поперечное движение примеси с однородной вертикальной скоростью u_s. Найдем стационарные распределения температур несущей среды T_0 и облака частиц T_{p0} при отсутствии конвективного движения рассматриваемой двухфазной системы (индекс 0 отличает стационарное решение системы (1)) с граничными условиями: $T_0 = 1$ при $z = 0$; $T_0 = T_{p0} = -1$ при $z = 1$. Частицы поступают в слой, имея температуру его верхней границы. Распределения температур в слое несущей среды и облаке частиц при стационарном поперечном движении примеси имеют вид:

$$T_0 = a_1(e^{m_1(z-1)} - m_4) + a_2(e^{m_2(z-1)} - m_5) - 1;$$
$$T_{p0} = a_1 m_4(e^{m_1(z-1)} - 1) + a_2 m_5(e^{m_2(z-1)} - 1) - 1, \qquad (2)$$

где

$$a_1 = 2/((1-e^{-m_1})(m_3 - 1)), a_2 = 2/((1-e^{-m_2})(1/m_3 - 1)),$$
$$m_{1,2} = -1/(2\tau_t u_s) \pm \sqrt{1/(2\tau_t u_s)^2 + Pab/\tau_t},$$
$$m_3 = (1-e^{-m_2})(1-m_4)/((1-e^{-m_1})(1-m_5)),$$
$$m_4 = m_1/(Pabu_s), m_5 = m_2/(Pabu_s).$$

В предельном случае взвешенных частиц ($u_s = 0$) получим линейное по вертикали распределение температур $T_{p0} = T_0 = -2z + 1$. Как видно из (2), при отличной от нуля скорости оседания частиц u_s распределения температур жидкости (газа) и облака частиц отличаются от линейных. При увеличении скорости оседания частиц, а также с ростом их массовой концентрации a и относительной теплоемкости b искажение линейного распределения температуры жидкости увеличивается. При дальнейшем росте перечисленных параметров у нижней границы формируется пограничный слой, внутри которого сосредоточено основное изменение температуры несущей среды.

3. Для исследования конвективной устойчивости равновесия слоя среды, содержащей оседающие частицы, рассмотрим возмущенные поля скоростей, температур, давления и числа частиц в единице объема: $\vec{u}$,

$\vec{u}_p+\vec{u}_s, T_0+T, T_{p0}+T_p, p_0+p, N_0+N,$ где $\vec{u}, \vec{u}_p, T, T_p, p, N$ – малые возмущения. Уравнения для возмущений можно получить из (1), производя линеаризацию по возмущениям. Исключая из этих уравнений обычным образом давление, *x, y* - компоненты скорости жидкости и облака частиц, можно получить уравнения для вертикальных компонент возмущений скоростей $u_z(x, y, z, t)$, $u_{pz}(x, y, z, t)$ и температур $T(x,y,z,t)$, $T_p(x,y,z,t)$. Будем рассматривать нормальные возмущения вида

$$u_z(x,y,z,t)=v(z)e^{-\lambda t+i(k_1x+k_2y)}, u_{pz}(x,y,z,t)=v_p(z)e^{-\lambda t+i(k_1x+k_2y)},$$

$$T(x,y,z,t)=\Theta(z)e^{-\lambda t+i(k_1x+k_2y)}, T_p(x,y,z,t)=\Theta_p(z)e^{-\lambda t+i(k_1x+k_2y)}, \qquad (3)$$

где k_1 *и* k_2 - вещественные волновые числа вдоль направлений *x* и *y*; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ - комплексный декремент возмущений. В результате из (1) получим с учетом вида возмущений (3) безразмерные уравнения для амплитуд возмущений:

$$\left(v^{IV}-2k^2v''+k^4v\right)+\left(v''-k^2v\right)(\lambda-\frac{a_0}{\tau_v})-Grk^2\theta+$$

$$+\frac{a_0}{\tau_v}[\frac{1}{u_s\tau_v}\left((\lambda-\frac{1}{\tau_v})\frac{v}{u_s}+v'\right)+\left((\lambda-\frac{1}{\tau_v})^2\frac{1}{u_s^2}-k^2\right)v_p],$$

$$u_sv_p'-(\lambda-\frac{1}{\tau_v})v_p-\frac{v}{\tau_v}=0,$$

$$\frac{1}{P}(\theta''-k^2\theta)-(\frac{ab}{\tau_t}-\lambda)\theta-\frac{v}{P}T_0'+\frac{ab}{\tau_t}\theta_p=0,$$

$$u_s\theta_p'-(\frac{1}{\tau_t}-\lambda)\theta_p+\frac{v_p}{P}T_{p0}'-\frac{\theta}{\tau_t}=0, \qquad (4)$$

где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.

Граничные условия

$v = v'' = \Theta = 0$ при $z = 1$; $v_p = \Theta_p = 0$ при $z = 1$. (5)

Предполагаем, что на верхней границе слоя возмущения скорости и температуры облака частиц исчезают. Краевая задача (4), (5) определяет спектр декрементов возмущений и границы устойчивости равновесия слоя жидкости (газа), содержащей частицы примеси. Декремент λ зависит от независимых параметров задачи: чисел Грасгофа, Прандтля и Галилея (или скорости оседания частиц), массовой концентрации примеси, волнового числа и времен релаксации. Из условия $\lambda_r = 0$ определяется граница устойчивости равновесия.

Рассмотрим изотермический ($T_0 = T_{p0} = const$) слой запыленной среды (в этом случае $\Theta = 0$, $\Theta_p = 0$), тяжелые твердые частицы оседают поперек слоя с однородной вертикальной скоростью u_s, однако жидкость остается неподвижной. В предельном случае взвешенных частиц ($u_s \to 0$) система уравнений (4) существенно упрощается. Тогда гидродинамические декременты рассматриваемой двухфазной системы будут определяться выражением

$$\lambda_n = \frac{1}{2\tau_v}(1 + a + \tau_v\lambda_{*n} \pm \sqrt{(1 + a + \tau_v\lambda_{*n})^2 - 4\tau_v\lambda_{*n}}), \lambda_* = \lambda(1 + \frac{a}{\tau_v\lambda}). \qquad (6)$$

Таким образом, так как декременты возмущений оказываются вещественными и положительными, то возмущения затухают монотонно, а рассматриваемое состояние устойчиво.

В противоположном предельном случае достаточно больших скоростей оседания частиц $|u_s| >> 1$, то есть в несущих средах с малой вязкостью или для тяжелых частиц, аналогично можно показать, что запыленная среда устойчива монотонно. Численное решение задачи об устойчивости изотермического горизонтального слоя жидкости с примесью при произвольных значениях скорости оседания частиц показало, что нормальные возмущения затухают монотонно, такой слой устойчив. Для решения общей краевой задачи (4), (5) применялся метод пошагового интегрирования Рунге-Кутта-Мерсона с ортогонализацией получаемых векторов-решений по Грамму-Шмидту на каждом шаге интегрирования; ортонормировка проводилась к максимальному по модулю (на данном шаге) вектору-решению (см. [4, 5]).

4. Определим границы устойчивости равновесия. Влияние оседающих частиц примеси на устойчивость неравномерно нагретого слоя жидкости характеризуется, в частности, зависимостью минимального критического числа Грасгофа от величины массовой концентрации частиц. С увеличением массовой концентрации примеси a у нижней границы слоя начинает формироваться температурный пограничный слой (происходит "сдувание" распределения температуры газа). В результате уменьшается эффективная толщина стратифицированного слоя газа ($h_{eff} < h$). Характерная же разность температур 2Θ остается при этом фиксированной и минимальное критическое число Грасгофа, определенное по полуширине слоя, при этом увеличивается по мере уменьшения h_{eff}, т.е. с ростом a. Увеличение массовой концентрации от $a = 0.07$ до $a = 0.13$ приводит к возрастанию минимального критического числа Грасгофа от $Gr_m \approx 195$ до $Gr_m \approx 309$ (параметры задачи $P = 0.73$, $\tau_v = 0.00345$, $\tau_t = 0.0102$, $Ga = 47$, $b = 2.7$ соответствуют древесным частицам в слое воздуха) при критическом значении числа Грагофа для чистой жидкости $Gr_m \approx 170$. Критическое значение волнового числа $k_m \approx 1.6$ с ростом a меняется незначительно, оставаясь меньше соответствующего чистой жидкости ($k_m \approx 2.2$). С ростом скорости частиц также наблюдается усиление искажающего влияния примеси на распределение температуры несущей среды. Стабилизирующий эффект воздействия частиц на устойчивость равновесия при этом возрастает. В слое воздуха толщиной 2 см движение древесных частиц со скоростью 15 см/с повышает устойчивость почти в 4 раза. Однако, при больших значениях скорости оседания дальнейшее ее увеличение приводит к незначительному искажению устанавливающегося распределения температуры несущей среды и, значит, к малому росту стабилизирующего эффекта.

В заключение следует отметить, что влияние оседающих частиц на устойчивость равновесия неравномерно нагретого горизонтального слоя жидкости (газа) со свободными границами во многом сходно с влиянием примеси на устойчивость слоя жидкости с твердыми границами. Это относится к характеру изменений спектра возмущений неподвижного слоя жидкости, а также к причинам повышения конвективной устойчивости равновесия в результате образования температурного пограничного слоя у нижней границы.

Библиографический список

1. Дементьев О.Н. Конвективная устойчивость среды, содержащей тяжелую твердую примесь. Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1976. No 3. с.105-115.
2. Dementiev O. Stability of steady-state flows of a liquid with a heavy impurity. Zeitschrift fur Angevandte Math. und Mech. ICIAM95-special issue, 1996. v. V. p. 113-115.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 156 с.
5. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 351 с.