

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ТИПА ТОРНАДО

Ирина Юрьевна Крутова

СФТИ НИЯУ МИФИ

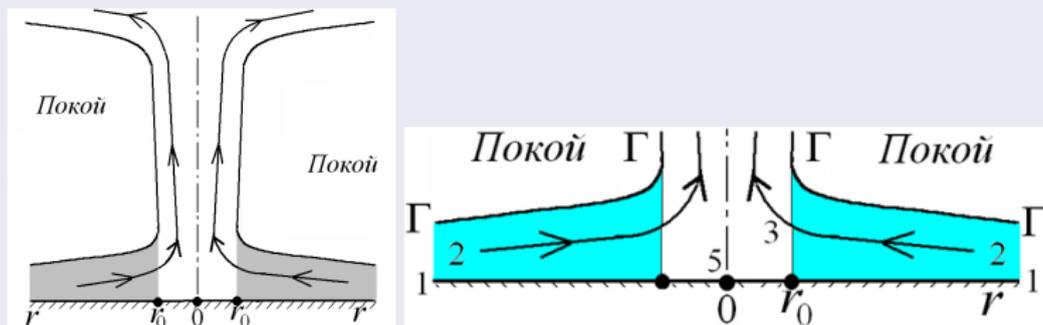
2008 год: профессор С. П. Баутин предложил теорию возникновения восходящего закрученного потока (ВЗП) газа от поверхности Земли. Баутин С.П. "Торнадо и сила Кориолиса". Новосибирск: Наука, 2008.



2018 год: в докладе исследователя Я. Хаузер 13.12.2018 на заседании Американского географического союза представлены прямые доказательства возникновения торнадо на поверхности Земли до обнаружения вращения на высотах.

# Введение

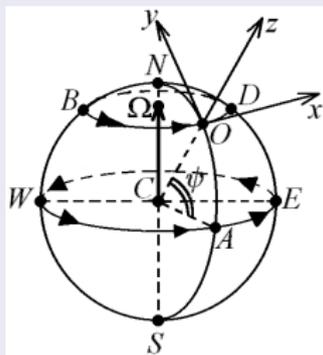
В основу представленных исследований положена предложенная профессором С. П. Баутиным схема возникновения и устойчивого функционирования восходящего закрученного потока газа.



На рисунке приведена схема восходящего закрученного потока, где  $r$  есть расстояние, отсчитываемое вдоль поверхности Земли от оси восходящего закрученного потока.

# Математическая модель

Будем полагать Землю шаром, у которого ось вращения совпадает с земной осью юг-север. На рисунке это схематично изображено с помощью сферы, имеющей центр в точке  $C$ , у которой северный и южный полюсы помечены точками  $N$  и  $S$  соответственно. Также рассматривается сечение сферы по экватору с диаметрально противоположными точками  $W$  и  $E$ . Пусть на сфере задана точка  $O$ , лежащая, например, в северном полушарии, но не на полюсе  $N$ .



# Математическая модель

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе (1):  $t$  – время;  $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$  – скорость звука газа;  $\rho$  – плотность газа;  $u, v, w$  – радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно;  $a = 2\Omega \sin \psi$ ;  $b = 2\Omega \cos \psi$ .

# Задача о течении газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

Для системы (1) на плоскости  $z = 0$  ставятся следующие начальные данные:

$$\begin{cases} c(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = c_0(t, r, \varphi), \\ u(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = u_0(t, r, \varphi), \\ v(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = v_0(t, r, \varphi), \\ w(t, r, \varphi, z)|_{z=0} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

**Теорема 1** *Задача (1), (2) есть характеристическая задача Коши стандартного вида с данными на характеристике кратности два, имеющая в некоторой окрестности точки  $(t = 0, r = r_{in}, \varphi = \varphi_0, z = 0)$ ,  $\varphi_0 = \text{const}$  в случае аналитичности всех входных данных единственное аналитическое решение при выполнении необходимых условий разрешимости характеристическая задача Коши и задании двух доп. условий.*

# Задача о течении газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

## Дополнительные условия

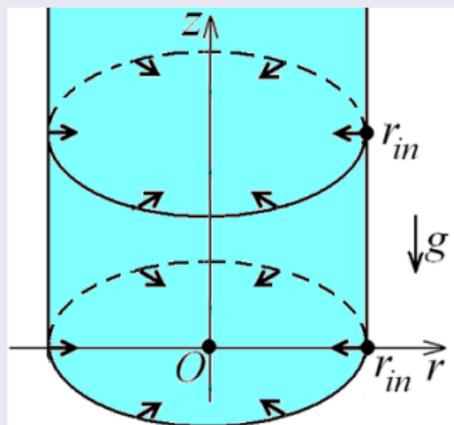
$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z); \\ v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z); \\ r_{in} = \text{const} > 0, \end{cases} \quad (3)$$

с аналитическими функциями  $u^o(t, \varphi, z)$ ,  $v^o(t, \varphi, z)$ , согласованными с условиями (2) при  $z = 0$ ,  $r = r_{in}$ :

$$\begin{cases} u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u^o(t, \varphi, z)|_{z=0}, \\ v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = v^o(t, \varphi, z)|_{z=0}. \end{cases} \quad (4)$$

# Задача о течении газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

Решение задачи (1)–(4) описывает течение газа в окрестности непроницаемой плоскости  $z = 0$ , когда через поверхность вертикального цилиндра заданного ненулевого радиуса  $r = r_{in}$  осуществляется заданный приток газа (см. рисунок, на котором область искомого течения затемнена).



# Задача о течении газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

**В частности,** условия (3) можно брать такими:

$$u(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = u_{in} = \text{const} < 0; \quad v(t, r, \varphi, z)|_{r=r_{in}} = 0 \quad (5)$$

при соответствующих условиях согласования

$$u_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = u_{in}, \quad v_0(t, r, \varphi)|_{r=r_{in}} = 0. \quad (6)$$

Приведенные условия (5) передают заданный на поверхности цилиндра  $r = r_{in}$  постоянный приток газа во внутреннюю область, ограниченную этим цилиндром. При этом на поверхности цилиндра притока  $r = r_{in}$  газ закрутку не имеет. Заметим, что в случае заданного притока газа внутрь цилиндра  $r = r_{in}$  обязательно надо будет вводить сток газа, например, при каком-то  $r = r_0, 0 < r_0 < r_{in}$ .

# Задача о течении газа в окрестности непроницаемой горизонтальной плоскости

Из теоремы следует, что решение поставленной характеристической задачи Коши представимо в виде бесконечного сходящегося ряда по степеням  $z$ :

$$\mathbf{U}(t, r, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t, r, \varphi) \frac{z^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(t, r, \varphi) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}(t, r, \varphi, z)}{\partial z^k} \right|_{z=0}, \quad (7)$$

где вектор  $\mathbf{U}$  имеет в качестве координат искомые функции  $s$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

# Необходимые условия разрешимости поставленной характеристической задачи Коши

Необходимые условия разрешимости возникают в процессе построения решения рассматриваемой характеристической задачи Коши в виде сходящегося бесконечного ряда (7). Если в системе (1) положить  $z = 0$  и учесть начальные условия (2), то получаются такие четыре соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} + w_1 \right) = 0, \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = av_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -au_0, \\ \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_1 = bu_0 \cos \varphi - bv_0 \sin \varphi - g. \end{array} \right.$$

# Необходимые условия разрешимости поставленной характеристической задачи Коши

Из первого и четвертого уравнения определяются коэффициенты  $w_1$  и  $c_1$  ряда (7):

$$w_1 = -\frac{2}{(\gamma-1)c_0} \left( c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} \right) - u_{0r} - \frac{u_0}{r} - \frac{v_{0\varphi}}{r}, \quad (8)$$

$$c_1 = \frac{(\gamma-1)}{2c_0} (bu_0 \cos \varphi - bv_0 \sin \varphi - g).$$

А второе и третье полученные после подстановки в систему (1) значения  $z = 0$  являются такими соотношениями:

$$\begin{cases} u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{0r} = av_0, \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -au_0 \end{cases} \quad (9)$$

# Необходимые условия разрешимости поставленной характеристическая задача Коши

Приравняем коэффициент  $w_1$  нулю

$$w_1 = 0 \quad (10)$$

и, следовательно, положим равным нулю выражение из правой части первого из соотношений (8). После умножения полученного равенства на дробь  $[-(\gamma - 1)c_0/2]$  получается следующее соотношение:

$$c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} \right) = 0.$$

Это соотношение является дифференциальной формой закона сохранения массы у течения с параметрами  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ , расположенного в плоскости  $z = 0$ .

# Решение характеристической задачи Коши

В результате получается система трех уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{0\varphi} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} + \frac{v_{0\varphi}}{r} \right) = 0; \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} + \frac{v_0}{r} u_{0\varphi} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0; \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} + \frac{v_0}{r} v_{0\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{0\varphi} = -a u_0 \end{array} \right.$$

для трех функций  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$ .

Решения полученной системы уравнений являются начальными слагаемыми ряда (7).

# Решение характеристической задачи Коши

Исходя из вида последней полученной системы далее предполагается, что искомые  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  не зависят от  $\varphi$  [4–7], то есть функции  $c_0(t, r)$ ,  $u_0(t, r)$ ,  $v_0(t, r)$  определяются из следующей системы уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) = 0; \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0; \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} = -a u_0. \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициент  $c_1$  определяется из второго соотношения в формулах (8). Коэффициент  $w_1$  определяется равенством (10).

# Решение характеристической задачи Коши

При последующем дифференцировании системы (1) по  $z$  и подстановки  $z = 0$  будет учитываться нулевые значения следующих коэффициентов:

$$w_0 = w_1 = 0; \quad c_{0\varphi} = u_{0\varphi} = v_{0\varphi} = 0. \quad (12)$$

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $c_2, u_1, v_1, w_2$  необходимо систему (1) продифференцировать по  $z$ , положить  $z = 0$  и учесть то, что значения  $\mathbf{U}_0$  и  $c_1, w_1$  считаются известными, в том числе учесть равенства (12):

$$\begin{cases} c_{1t} + u_0 c_{1r} + u_1 c_{0r} + \frac{v_0}{r} c_{1\varphi} + \frac{(\gamma-1)}{2} c_1 (u_{0r} + \frac{u_0}{r}) + \\ + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 (u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2) = 0; \\ u_{1t} + u_1 u_{0r} + u_0 u_{1r} + \frac{v_0}{r} u_{1\varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_1 c_{0r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{1r} = av_1; \\ v_{1t} + u_1 v_{0r} + u_0 v_{1r} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{u_0 v_1}{r} + \frac{v_0}{r} v_{1\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0}{r} c_{1\varphi} = -au_1; \\ \frac{2}{(\gamma-1)} c_1^2 + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_2 = bu_1 \cos \varphi - bv_1 \sin \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

# Решение характеристической задачи Коши

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $c_3, u_2, u_2, w_3$  необходимо систему (1) продифференцировать по  $z$  дважды, положить  $z = 0$  и учесть, что значения  $U_0, U_1$  и  $c_2, w_2$  считаются заданными и соответствующим образом зависят от  $\varphi$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{2t} + u_2 c_{0r} + 2u_1 c_{1r} + u_0 c_{2r} + \frac{1}{r}(2v_1 c_{1\varphi} + v_0 c_{2\varphi}) + w_2 c_1 + \\ + \frac{(\gamma-1)}{2} c_2 (u_{0r} + \frac{u_0}{r}) + (\gamma-1) c_1 (u_{1r} + \frac{u_1}{r} + \frac{v_{1\varphi}}{r} + w_2) + \\ + \frac{(\gamma-1)}{2} c_0 (u_{2r} + \frac{u_2}{r} + \frac{v_{2\varphi}}{r} + w_3) = 0; \\ u_{2t} + u_2 u_{0r} + 2u_1 u_{1r} + u_0 u_{2r} + \frac{2v_1 u_{1\varphi}}{r} + \frac{v_0 u_{2\varphi}}{r} - \frac{2v_1^2}{r} - \frac{2v_0 v_2}{r} + w_2 u_1 + \\ + \frac{2}{(\gamma-1)} c_2 c_{0r} + \frac{4}{(\gamma-1)} c_1 c_{1r} + \frac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_{2r} = av_2 - bw_2 \cos \varphi; \\ v_{2t} + u_2 v_{0r} + 2u_1 v_{1r} + u_0 v_{2r} + \frac{u_2 v_0}{r} + 2\frac{u_1 v_1}{r} + \frac{u_0 v_2}{r} + \\ + 2\frac{v_1}{r} v_{1\varphi} + \frac{v_0}{r} v_{2\varphi} + w_2 v_1 + \\ + \frac{4}{(\gamma-1)} \frac{c_1}{r} c_{1\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} \frac{c_0}{r} c_{2\varphi} = -au_2 + bw_2 \sin \varphi; \\ w_{2t} + u_0 w_{2r} + \frac{1}{r} v_0 w_{2\varphi} + \frac{2}{(\gamma-1)} (3c_1 c_2 + c_0 c_3) = bu_2 \cos \varphi - bv_2 \sin \varphi. \end{array} \right. \quad (14)$$

# Решение характеристической задачи Коши

Чтобы получить уравнения для коэффициентов  $c_4, u_3, u_3, w_4$  необходимо систему (1) продифференцировать по  $z$  трижды, положить  $z = 0$  и учесть, что значения  $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$  и  $c_3, w_3$  считаются заданными и соответствующим образом зависят от  $\varphi$ .

По этому алгоритму получаем требуемое количество слагаемых для ряда (7) достаточное для анализа решения поставленной характеристической задачи Коши.

# Уравнения для коэффициентов $c_0$ , $u_0$ , $v_0$

В нестационарном случае система уравнений для коэффициентов  $c_0$ ,  $u_0$ ,  $v_0$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_{0t} + u_0 c_{0r} + \frac{(\gamma - 1)}{2} c_0 \left( u_{0r} + \frac{u_0}{r} \right) = 0; \\ u_{0t} + u_0 u_{0r} - \frac{v_0^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{0r} = a v_0; \\ v_{0t} + u_0 v_{0r} + \frac{u_0 v_0}{r} = -a u_0. \end{cases} \quad (15)$$

В стационарном случае, когда  $\partial/\partial t = 0$ , решение системы (15), зависит только от переменной  $r$ :

$$c_0 = c_0(r); \quad u_0 = u_0(r); \quad v_0 = v_0(r),$$

и в этом случае решение получаем из системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

# Построение коэффициентов $c_1$ , $w_1$

Как в нестационарном, так и в стационарном случаях коэффициент  $w_1$  полагается равным нулю

$$w_1 = 0. \quad (16)$$

Из второго соотношения в формуле (8) в нестационарном случае получаются такие равенства:

$$c_1 = c_1(t, r, \varphi) \equiv c_{10}(t, r) + c_{11}(t, r) \cos \varphi + c_{12}(t, r) \sin \varphi, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} c_{10}(t, r) &= -\frac{g(\gamma - 1)}{2c_0(t, r)}; \\ c_{11}(t, r) &= \frac{b(\gamma - 1)u_0(t, r)}{2c_0(t, r)}; \\ c_{12}(t, r) &= -\frac{b(\gamma - 1)v_0(t, r)}{2c_0(t, r)}. \end{aligned} \quad (18)$$

В стационарном случае имеют место следующие формулы:

$$c_1 = c_1(r, \varphi) \equiv c_{10}(r) + c_{11}(r) \cos \varphi + c_{12}(r) \sin \varphi, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} c_{10}(r) &= -\frac{g(\gamma - 1)}{2c_0(r)}; \\ c_{11}(r) &= \frac{b(\gamma - 1)u_0(r)}{2c_0(r)}; \\ c_{12}(r) &= -\frac{b(\gamma - 1)v_0(r)}{2c_0(r)}. \end{aligned} \quad (20)$$

# Уравнения для коэффициентов $u_1, v_1$

Второе и третье уравнения системы (13)

$$u_{1t} + u_1 u_{0r} + u_0 u_{1r} + \frac{v_0}{r} u_{1\varphi} - \frac{2v_0 v_1}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_1 c_{0r} + \frac{2}{(\gamma - 1)} c_0 c_{1r} = a v_1; \quad (21)$$

$$v_{1t} + u_1 v_{0r} + u_0 v_{1r} + \frac{u_1 v_0}{r} + \frac{u_0 v_1}{r} + \frac{v_0}{r} v_{1\varphi} + \frac{2}{(\gamma - 1)} \frac{c_0}{r} c_{1\varphi} = -a u_1 \quad (22)$$

в нестационарном случае являются для коэффициентов  $u_1, v_1$  линейной системой уравнений с частными производными. Линейность этих уравнений, а также вид коэффициента  $c_1$  (см. формулы (22)–(25)), позволяет разделить переменные и находить коэффициенты  $u_1, v_1$  в следующей форме

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(t, r) + u_{11}(t, r) \cos \varphi + u_{12}(t, r) \sin \varphi, \\ v_1 &= v_{10}(t, r) + v_{11}(t, r) \cos \varphi + v_{12}(t, r) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

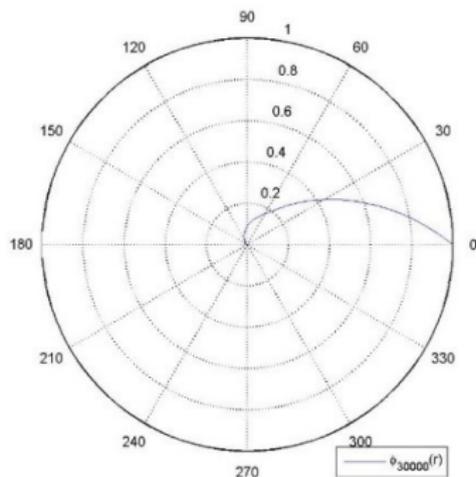
По этому алгоритму получаем требуемое количество слагаемых для ряда (7) достаточное для анализа решения поставленной характеристической задачи Коши. Это решение построено в виде начальных отрезков бесконечных рядов: для функций  $u$  и  $v$  при степенях по  $z^3$  включительно, для функций  $s$ ,  $w$  при степенях по  $z^4$  включительно.

Численное построение решений этих уравнений осуществляется модифицированным методом характеристик.

## Классификация торнадо по шкале Фудзиты

Класс торнадо	Скорость ветра, м/с	Ширина следа, м	Средняя длина пути, км	Среднее время жизни, мин
<i>F0</i>	19 – 32	5 – 15	1.9	2.4
<i>F1</i>	33 – 50	16 – 50	4.2	5.2
<i>F2</i>	51 – 70	51 – 160	8.7	10.8
<i>F3</i>	71 – 92	161 – 508	16.1	20.0
<i>F4</i>	93 – 116	547 – 1448	43.8	54.4
<i>F5</i>	117 – 142	1609 – 4989	57.1	71.0

## Результаты расчетов для торнадо класса F3.



- Построено решение конкретной характеристической задачи Коши с начальными данными на непроницаемой горизонтальной плоскости  $z = 0$ ;
- Построенные конечные отрезки рядов применяются для приближенного описания течений газа в придонных частях торнадо и тропического циклона;
- Рассчитаны мгновенные линии тока для нестационарного случая трехмерного течения политропного газа.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

*IUKrutova@mephi.ru*