Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи об источнике распространения волн

Губер Алексей Владимирович
Шишленин Максим Александрович

XVII Международная конференция «Забабахинские научные чтения»

ИМ СО РАН

20 мая 2025 г.

Содержание

Актуальность

Восстановление источников акустических волн является актуальной и практически важной задачей:

1. медицинская акустическая томография (источник локализован, точный вид сигнала неизвестен);
2. морская акустика (внутренние волны, волны цунами и пр.);
3. геофизика (источники землетрясений, микросейсмический мониторинг, при условии, что параметры среды известны).

Постановка прямой задачи

Рассмотрим некоторый волновой процесс из пунктов 1, 2, 3 в области $\Omega = \{(x, y) : x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$:

$$u_{tt} = \mathrm{div}(c^2(x, y)\nabla u), \qquad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

$$u\big|_{t=0} = q(x, y), \qquad u_t\big|_{t=0} = 0,$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

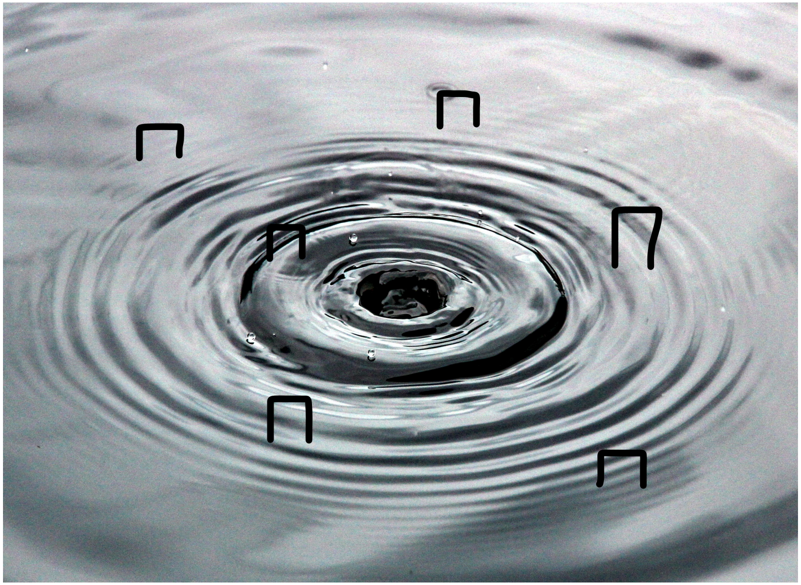
Здесь $c(x, y)$ – скорость распространения волн, $u(x, y, t)$ – давление.

Постановка обратной задачи

Обратная задача состоит в нахождении функции $q(x, y)$ из дополнительной информации:

$$u(x_n, y_n, t) = f_n(t), \qquad n = \overline{1, N}.$$

Здесь (x_n, y_n) – координаты приёмников, N – количество приёмников.



Цель

Цель

Реализовать основные методы решения поставленной обратной задачи об источнике волн и провести их сравнительный анализ.

Цель

Цель

Реализовать основные методы решения поставленной обратной задачи об источнике волн и провести их сравнительный анализ.

Рассматриваемые методы:

- матричный метод;
- модифицированный матричный метод с Tensor-Train разложением;
- PINN;
- градиентный метод.

Матричный метод

Метод заключается в сведении дискретной задачи к СЛАУ большой размерности с плохо обусловленной матрицей:

$$\mathbf{A}_{total}\vec{Q} = \vec{F}.$$

Здесь матрица $\mathbf{A}_{total}$ имеет размер $(N_x + 1)(N_y + 1) \times N_t N$, N – количество приёмников.

Ссылка

М. А. Шишленин. Матричный метод в задачах определения источников колебаний. Сиб. электрон. матем. изв., 11 (2014), С.161–С.171.

Матричный метод

Эта СЛАУ может быть решена методом усечённого SVD:

$$\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T\vec{q} = \vec{f}$$

$$\Sigma\vec{z} = \mathbf{U}^T\vec{f} = \vec{g}$$

Тогда вектор $\vec{z}$ может быть найден: $z_j = \frac{g_j}{\sigma_j}$ и если $\sigma_j = 0$, тогда $z_j = 0$.

Матричный метод

С другой стороны решение СЛАУ $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ может быть получено методом сопряжённых градиентов:

$$\vec{p}^{(0)} = 0, s = 1$$

$$\vec{r}^{(s)} = \begin{cases} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}\vec{x}^{(s)} - \vec{b} \right), \text{ если } s = 1, \\ \vec{r}^{(s-1)} + \dfrac{\vec{q}^{(s-1)}}{\left(\vec{p}^{(s-1)}, \vec{q}^{(s-1)} \right)}, \text{ если } s \geq 2, \end{cases} \quad (1)$$

$$\vec{p}^{(s)} = \vec{p}^{(s-1)} + \frac{\vec{r}^{(s)}}{\left(\vec{r}^{(s)}, \vec{r}^{(s)} \right)}$$

$$\vec{q}^{s} = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}\vec{p}^{(s)} \right),$$

Матричный метод

$$\vec{x}^{(s+1)} = \vec{x}^{(s)} - \frac{\vec{p}^{(s)}}{\left(\vec{p}^{(s)}, \vec{q}^{(s)}\right)},$$

$$s = s + 1.$$

Ссылка

Lukyanenko, D.; Shinkarev, V.; Yagola, A. Accounting for Round-Off Errors When Using Gradient Minimization Methods. Algorithms 2022, 15, 324. https://doi.org/10.3390/a15090324

Матричный метод

Исходя из предположения, что все операции выполняются корректно, имеем

$$\vec{x}^{res} = \vec{x}^{(N_t N+1)}.$$

Но можно учесть ошибку арифметических операций и использовать её в критерии остановки алгоритма:

$$||\vec{r}^{(s)}||^2 > \sigma_s^2 \Delta^2,$$

где σ_s^2 – дисперсия ошибки $||\vec{r}^{(s)}||^2$ и $\Delta = 10^{-16}$.

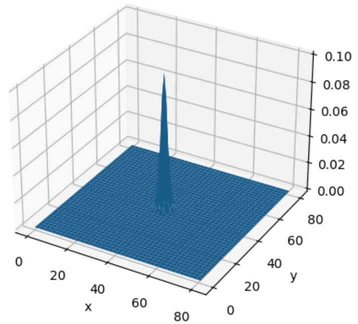


Рис. 1: Начальное условие

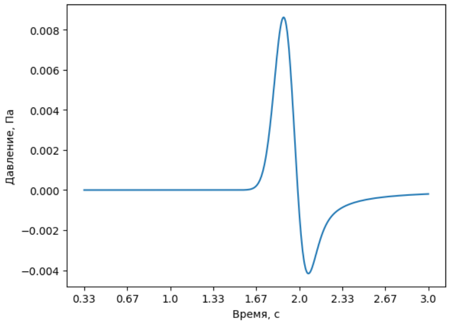


Рис. 2: Дополнительная информация (показания приёмника)

Матричный метод

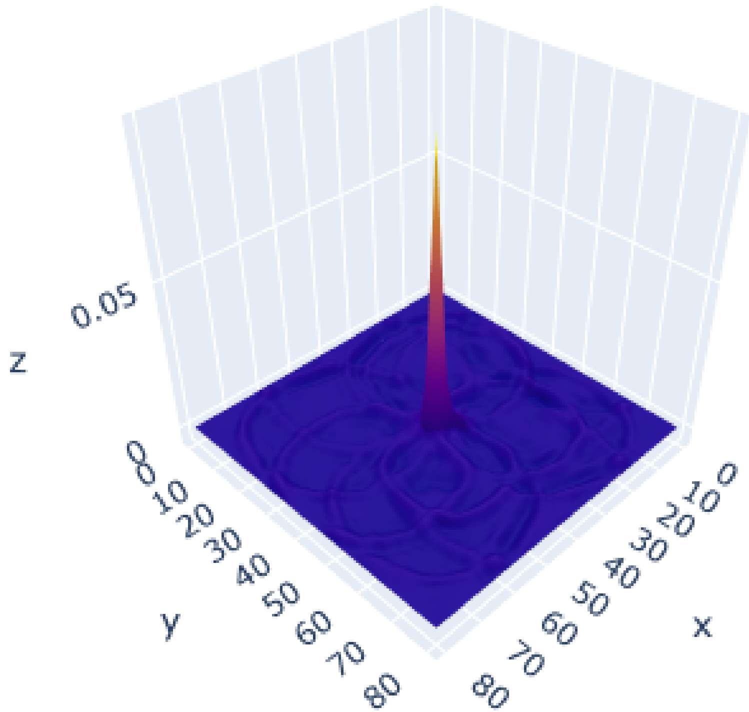


Рис. 3: Решение, полученное матричным методом

Матричный метод. Tensor-Train разложение

Определение

Тензор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(i_1, \ldots, i_d)$ – это многомерный массив, где $i_k = \overline{1, n_k}$.

Определение

Разложение вида $\mathbf{A}(i_1, \ldots, i_d) \approx \mathbf{G}_1(i_1) \cdot \cdots \cdot \mathbf{G}_d(i_d)$, где матрица $\mathbf{G}\ _k(i_k)$ имеет размер $r_{k-1} \times r_k$ называется Tensor-Train разложением (форматом).

Ссылка

Oseledets, Ivan. (2011). Tensor-Train Decomposition. SIAM J. Scientific Computing. 33. 2295-2317. 10.1137/090752286.

Матричный метод. Tensor-Train разложение

Возможные операции над тензорами в этом формате:

1. сложение;
2. умножение;
3. округление;
4. восстановление по $O(dnr^2)$ элементам.

Матричный метод. Tensor-Train разложение

Операция	Сложность
Сложение тензоров	$O(dnr^2 + dr^4)$
Многомерная свертка	$O(dnr + dr^3)$
Поэлементное произведение	$O(dnr^4)$
Скалярное произведение	$O(dnr^2 + dr^4)$
Норма	$O(dnr^2 + dr^4)$

Рис. 4: Сложность операций над тензорами

PINN

Физически обусловленные нейронные сети (PINN) представляют собой тип аппроксиматоров функций общего назначения, которые могут внедрять знания о любых физических законах, управляющих заданным набором данных, в процесс обучения и могут быть описаны с помощью уравнений в частных производных.

PINN

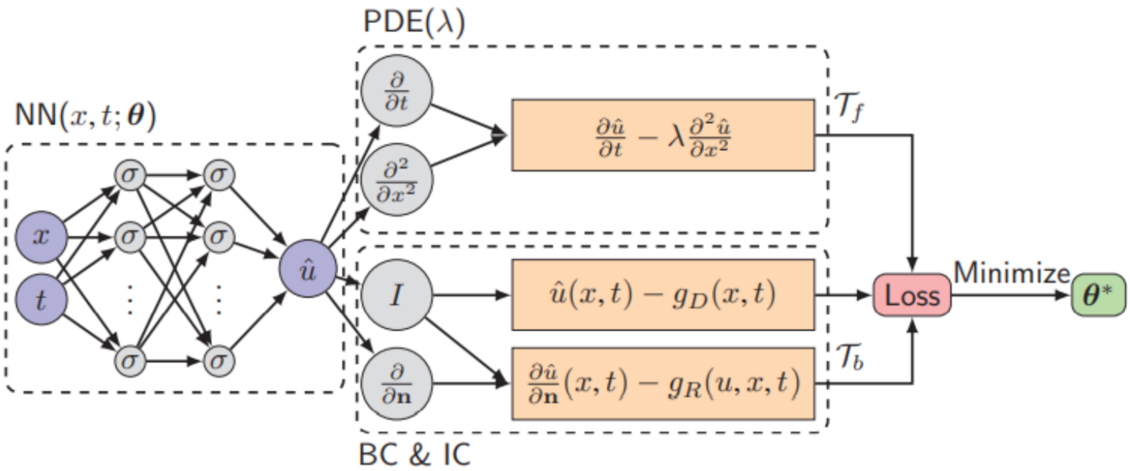


Рис. 5: PINN.

В таком виде эта модель не позволяет определить начальные условия, как нам надо.
Пусть решение уравнения имеет вид

$$\Phi(x, t, \theta) = A(x, y, t) + Z(x, y, t)F(x, t, \theta).$$

Функция $A(x, y, t)$ должна удовлетворять начальным и граничным условиям и $Z(x, y, t) = 0$ на границе. Значит, искомая функция $q(x, y)$ может быть представлена в виде нейронной сети в функции $Z(x, y, t)$.

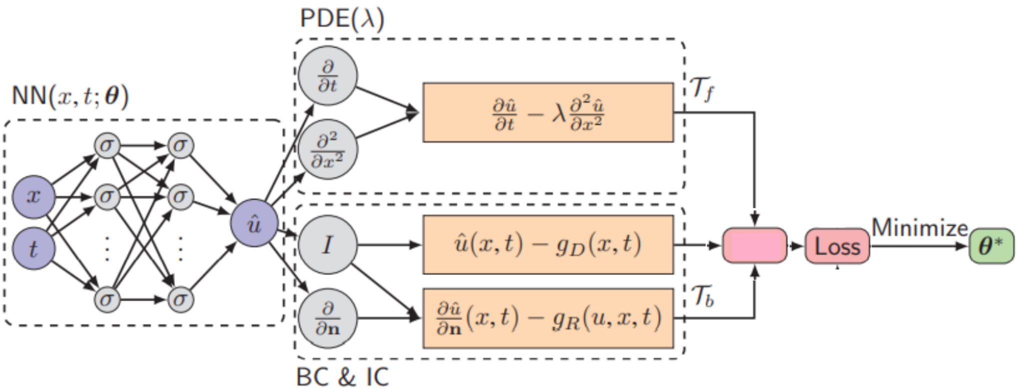


Рис. 6: Модифицированный PINN

PINN

Результат – решение обратной задачи требует > 10 тыс. точек и 60 тыс. итераций, $\mathrm{MSE} = 10^{-7}$.

PINN

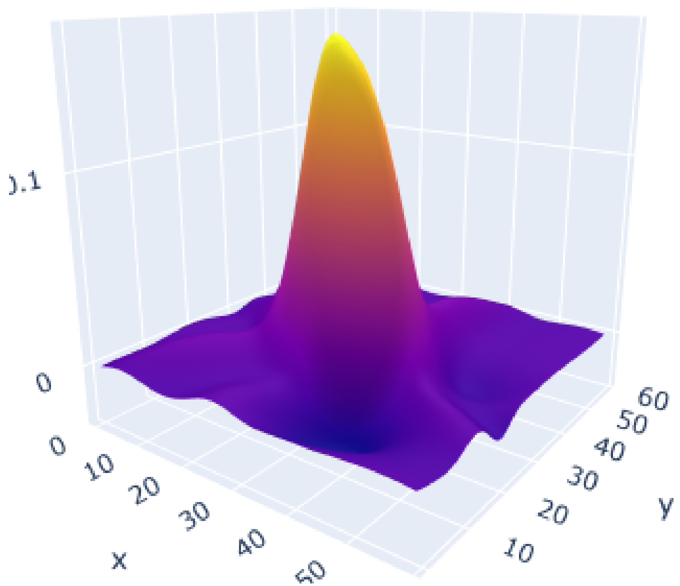


Рис. 7: Решение обратной задачи, полученное PINN (DeepXDE)

Ссылка

Sirignano, J., Spiliopoulos, K. (2018). DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. Journal of Computational Physics, 375, 1339-1364.

Градиентный метод

Решение обратной задачи сводится к минимизации функционала

$$J(q) = \int_0^T \sum_{i=0}^{N} \left[u(x_i, y_i, t, q) - f_i(t)\right]^2 dt \to \min_q .$$

Тогда решение может быть получено итеративно:

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \alpha_n J'(q^{(n)}),$$

где $q^{(0)}$ – начальное приближение, α_n – параметр спуска.

Градиентный метод

В нашем случае имеем

$$J'(q) = c^{-2}(x,y)\varphi_t\big|_{t=0},$$

где φ – решение сопряжённой задачи

$$c^{-2}(x,y)\varphi_{tt} - \Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} 2\left[u(x_i, y_i, t) - f_i(t)\right]\delta(x - x_i, y - y_i),$$

$$\varphi\big|_{t=T} = 0,$$

$$\varphi_t\big|_{t=0} = 0,$$

$$\varphi\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Градиентный метод

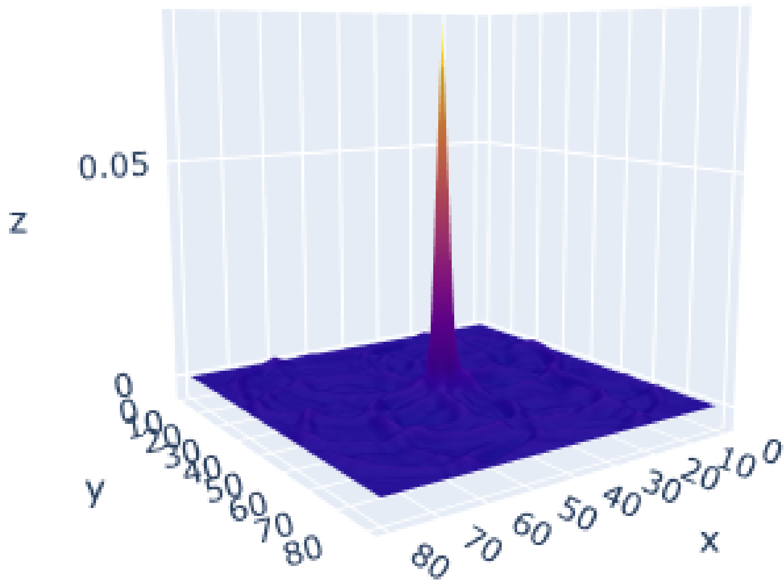


Рис. 8: Решение обратной задачи, полученное градиентным методом

Результаты

Метод	ит.	$N_{x,y}$	N_t	Время, с	Ошибка
Matrix (SVD)	-	80	90	786	0.006
Matrix (CG)	-	80	90	377	0.006
TT	-	80	90	128	0.007
PINN	70000	-	-	7826	0.028
Gradient	10000	80	90	365	0.011

Таблица 1: Результаты расчётов

AMD Ryzen 9 5900X, NVIDIA GeForce RTX 4070

Q&A

alexej.guber@yandex.ru