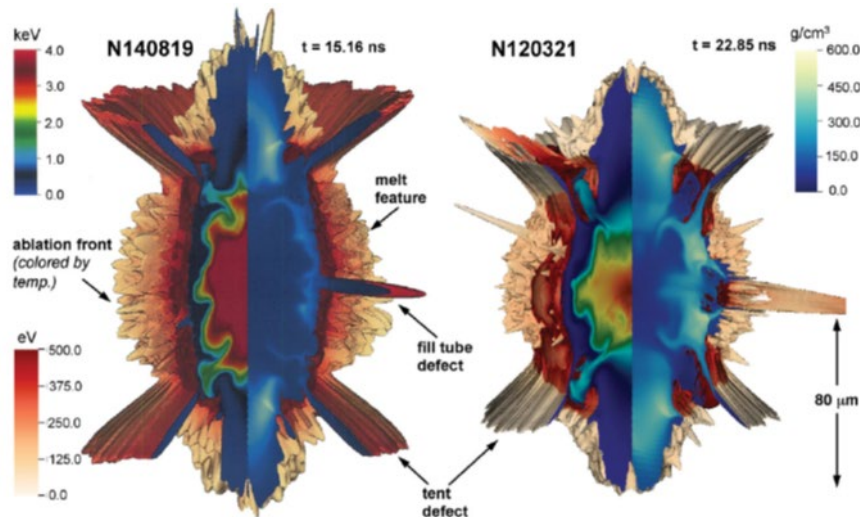




РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

О сохранении сферической симметрии на сферической сетке в декартовой системе координат при расчете газодинамических течений эйлеровыми конечно-объёмными схемами

Михайлов Никита Анатольевич,
Глазырин И.В., Фролова Н.Л., Чижков М.Н.



Clark et al. Phys. Plasmas 23, 056302 (2016).

Caramana E.G., Walen P.P. Numerical preservation of symmetry properties of continuum problems // J. Comput. Phys. 1998. V. 141. P. 174–198.

Margolin L., Shashkov M. Using a curvilinear grid to construct symmetry-preserving discretizations for Lagrangian gas dynamics // J. Comput. Phys. 1999. V. 149. P. 389–417.

Kenamond M., Bement M., Shashkov M. Compatible, total energy conserving and symmetry preserving arbitrary Lagrangian-Eulerian hydrodynamics in 2D rz-cylindrical coordinates // J. Comput. Phys. 2014. V. 268. P. 154–185.

Guo S., Zhang M., Zhou H., Xiong J., Zhang S. A symmetry preserving scheme for three-dimensional Lagrangian radiation hydrodynamic simulations of ICF capsule implosion. // Computer and Fluids. 2019. V. 195. 104317.

Численное моделирование сжатия мишеней ICF предъявляет высокие требования к качеству алгоритмов.

Несимметричность сжатия мишеней существенно влияет на характеристики ДТ-топлива.

В чем причина развития возмущений в численных расчетах?

- Несферичность облучения
- Конструктивные элементы
- Численные эффекты ?



Предпочтительны численные схемы, сохраняющие симметрию.

Эйлеров подход преобладающий для 3D расчетов газодинамических течений в мишенях ICF



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Система уравнений ГД в декартовой с.к.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho \mathbf{v}) + \nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \nabla \cdot ((\rho E + p) \mathbf{v}) = 0,$$

ρ – плотность, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)'$ – скорость

p – давление, $E = \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + e$

$e(\rho, p)$ – внутренняя энергия

Общий вид эйлеровых КО-схем

$$\rho_i^{n+1} - \rho_i^n = -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j \rho_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i},$$

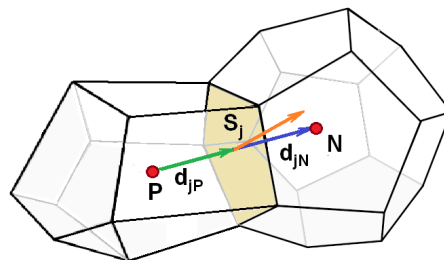
$$\rho_i^{n+1} \mathbf{v}_i^{n+1} - \rho_i^n \mathbf{v}_i^n = -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j \mathbf{v}_j \rho_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i} - \Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j p_j \mathbf{n}_j}{V_i},$$

$$\rho_i^{n+1} E_i^{n+1} - \rho_i^n E_i^n = -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j (\rho_j E_j + p_j) (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i}.$$

Эйлеровы коды для ICF: RAGE, FLASH, FLAG,...

Getings M., Weaver R., Clover M., Betlach T., Byrne N., Coker R., Dendy E., Hueckstaedt R., New K., Oakes W.R., Ranta D., Stefan R. The RAGE radiation-hydrodynamic code // Computational Science and Discovery. 2008. 1 (1).

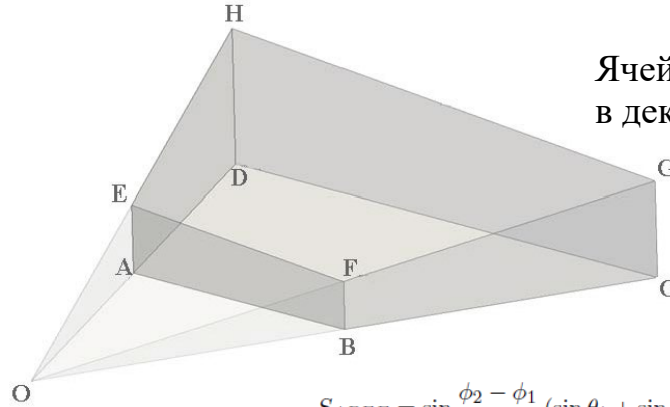
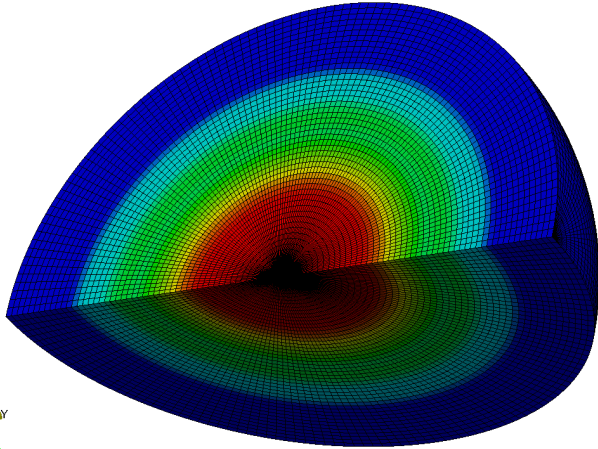
Fryxell B., Olson K., Ricker P., Timmes F.X., Zingale M., Lamb D.Q., MacNeice P., Rosner R., Truran J.W., Tufo H. FLASH: An adaptive mesh hydrodynamics code for modeling astrophysical thermonuclear flashes // Astrophysical Journal Supplement. 2000. V. 131. P. 273–334.



Сферическая сетка



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ



Ячейка сферической сетки
в декартовой с.к.

$$V = \frac{2}{3}(r_2^3 - r_1^3) \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} (\sin \phi_1 + \sin \phi_2) s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1),$$

где

$$s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1) = \sqrt{p \left(p - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} \right) \times} \\ \times \sqrt{\left(p - \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} \right) (p - s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1))}, \\ p = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} + \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}} + s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1) \right).$$

$$S_{ABFE} = \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) r_1^2 s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1),$$

$$S_{DCGH} = \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) r_2^2 s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1),$$

где

$$s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1) = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} - \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)^2},$$

$$S_{BCGF} = (r_1 + r_2) \sin \theta_1 \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \times \\ \times \sqrt{(r_2 - r_1)^2 - (r_2^2 - r_1^2) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}},$$

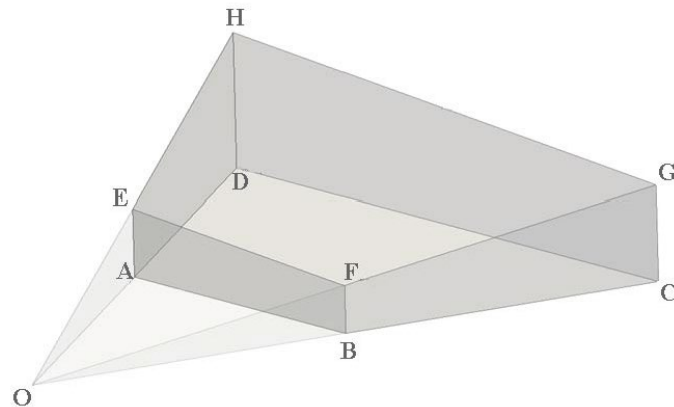
$$S_{ADHE} = (r_1 + r_2) \sin \theta_2 \sin \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \times \\ \times \sqrt{(r_2 - r_1)^2 - (r_2^2 - r_1^2) \sin^2 \theta_2 \sin^2 \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}},$$

$$S_{ABCD} = S_{EFGH} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1).$$

Достаточные условия сохранения сферической симметрии на сферической сетке



$$\begin{aligned}\varrho_i^{n+1} - \varrho_i^n &= -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j \varrho_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i}, \\ \varrho_i^{n+1} \mathbf{v}_i^{n+1} - \varrho_i^n \mathbf{v}_i^n &= -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j \mathbf{v}_j \varrho_j (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i} - \Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j p_j \mathbf{n}_j}{V_i}, \\ \varrho_i^{n+1} E_i^{n+1} - \varrho_i^n E_i^n &= -\Delta t_n \frac{\sum_{j \in \{B\}_i} S_j (\varrho_j E_j + p_j) (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}_j)}{V_i}.\end{aligned}$$



Теорема. Если на сферическом сетке в схеме

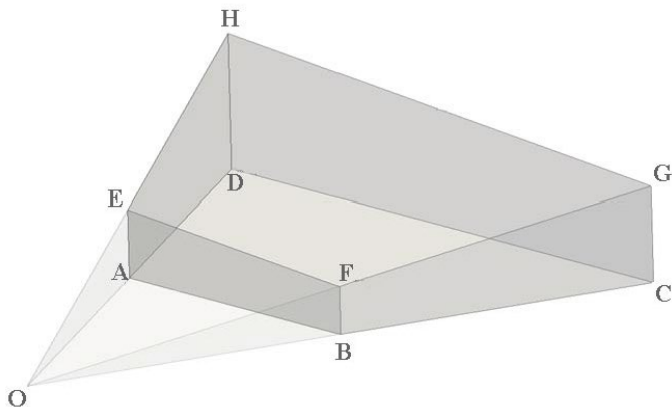
1. значения скалярных величин $\varrho_j, |\mathbf{v}_j|, p_j$ на гранях $ABFE$ и $DCGH$ не зависят от угловых координат ячейки, значения p_j на гранях $BCGF, ADHE, ABCD, EFGH$ совпадают,
2. вектор скорости $\mathbf{v}_j$ коллинеарен с нормальми к граням $ABFE$ и $DCGH$ при независимой от угловых координат ячейки направленности по отношению к центру и перпендикулярен к нормальм к граням $BCGF, ADHE, ABCD, EFGH$,
3. отношения площадей граней $ABFE$ и $DCGH$ к объему ячейки не зависят от угловых координат ячейки,

то схема (2.2) сохраняет сферическую симметрию на сферическом сетке.

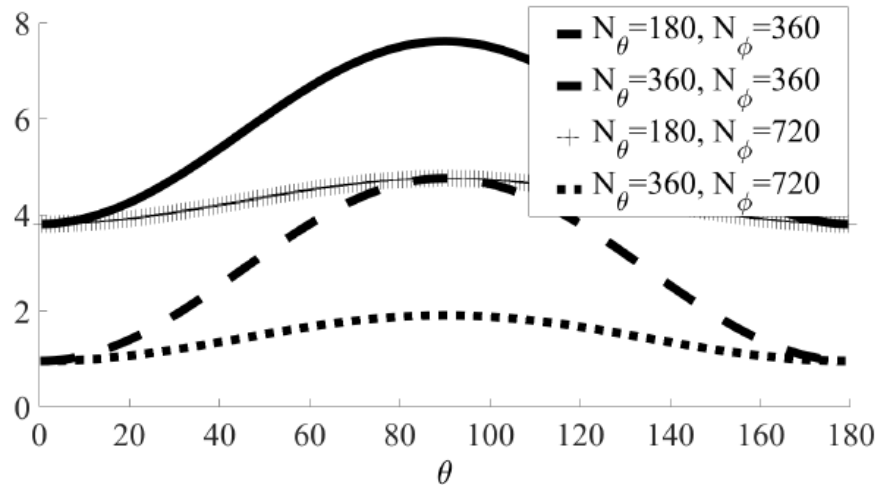
Достаточные условия сохранения сферической симметрии на сферической сетке

$$\frac{S_{ABFE}}{V_i} = \frac{3r_1^2 s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{(r_2^3 - r_1^3) 2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)},$$

$$\frac{S_{DCGH}}{V_i} = \frac{3r_2^2 s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{(r_2^3 - r_1^3) 2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}$$



$$\left(\frac{s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)} - 1 \right) * 10^5$$



Обеспечение геометрического условия



РФАЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Подход I:

$$V_i^* = V_i \frac{s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}$$

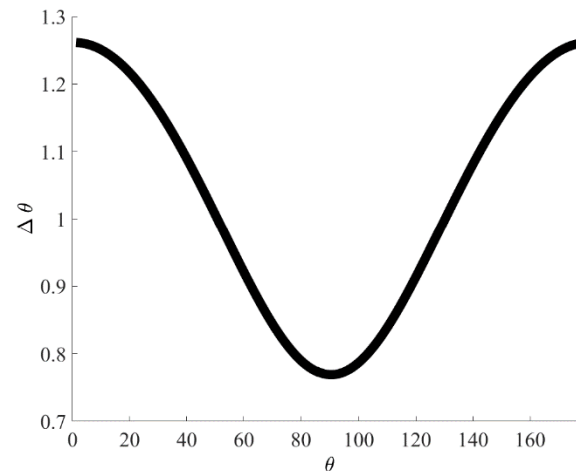
или

$$S_{ABFE}^* = S_{ABFE} \frac{2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)},$$

$$S_{DCGH}^* = S_{DCGH} \frac{2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}.$$

Подход II:

При равномерном разбиении по азимутальному углу выбор такого разбиения по полярному углу, чтобы $\frac{s_1(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}{2s_2(\theta_1, \theta_2, \phi_2 - \phi_1)}$ был одинаковым для всех ячеек.



Разбиение области $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$ на 180 интервалов при $\Delta\phi = 1^\circ$

Численный пример в 3D эйлеровом коде*



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Сферическая задача о распаде разрыва:

	$0 < r < 0.5$	$0.5 \leq r < 1$
ϱ	1	0.125
p	1	0.1
$\mathbf{v}$	0	0

$$e = \frac{p}{\varrho(\gamma-1)}, \quad \gamma = 1.4$$

Конечное время $t = 0.15$

По азимутальному углу и радиусу разбиение равномерное на $N_\phi = 120$ и $N_r = 100$ интервалов

По полярному углу область разбивается на $N_\theta = 60$ интервалов

- а) равномерное
- б) неравномерное с линейной разгонкой в 4 раза ($\frac{\Delta\theta_{180}}{\Delta\theta_1} = 4$)
- в) неравномерное, обеспечивающее выполнение условия 3 теоремы

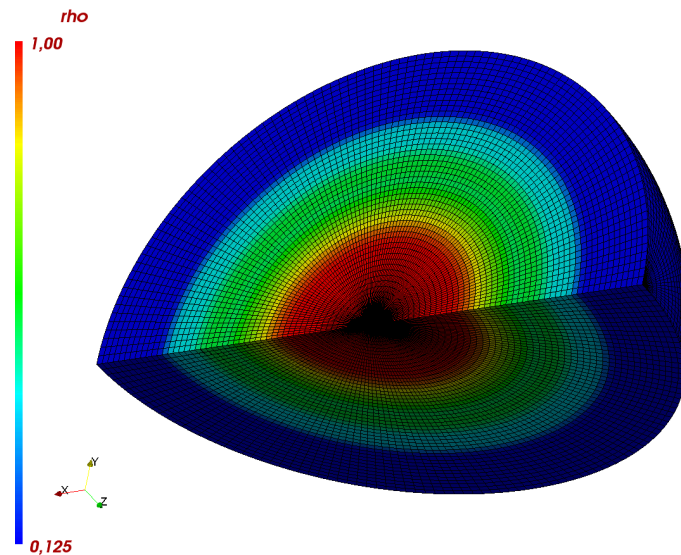
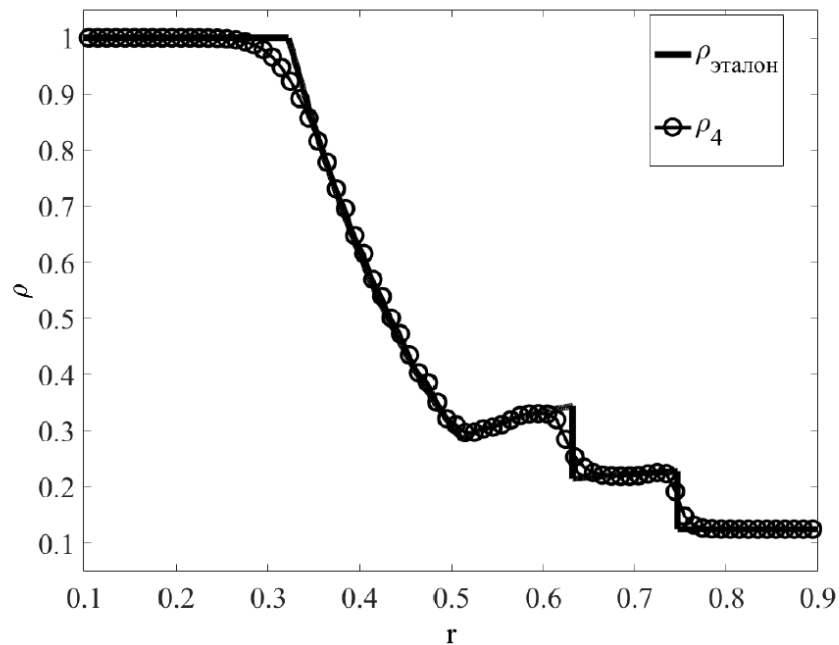
Проведено четыре расчета: 1) на сетке а) с коррекцией объёмов множителем (4.14), 2) на сетке а) без коррекции объёмов, 3) на сетке б) с коррекцией объёмов и 4) на сетке в) без коррекции объёмов.

* Глазырин И.В., Михайлов Н.А. Конечно-объёмная схема для многокомпонентных сжимаемых течений на неструктурированной сетке в трехмерной программе Фокус // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021, Т. 61, № 6.

Распределение плотности



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

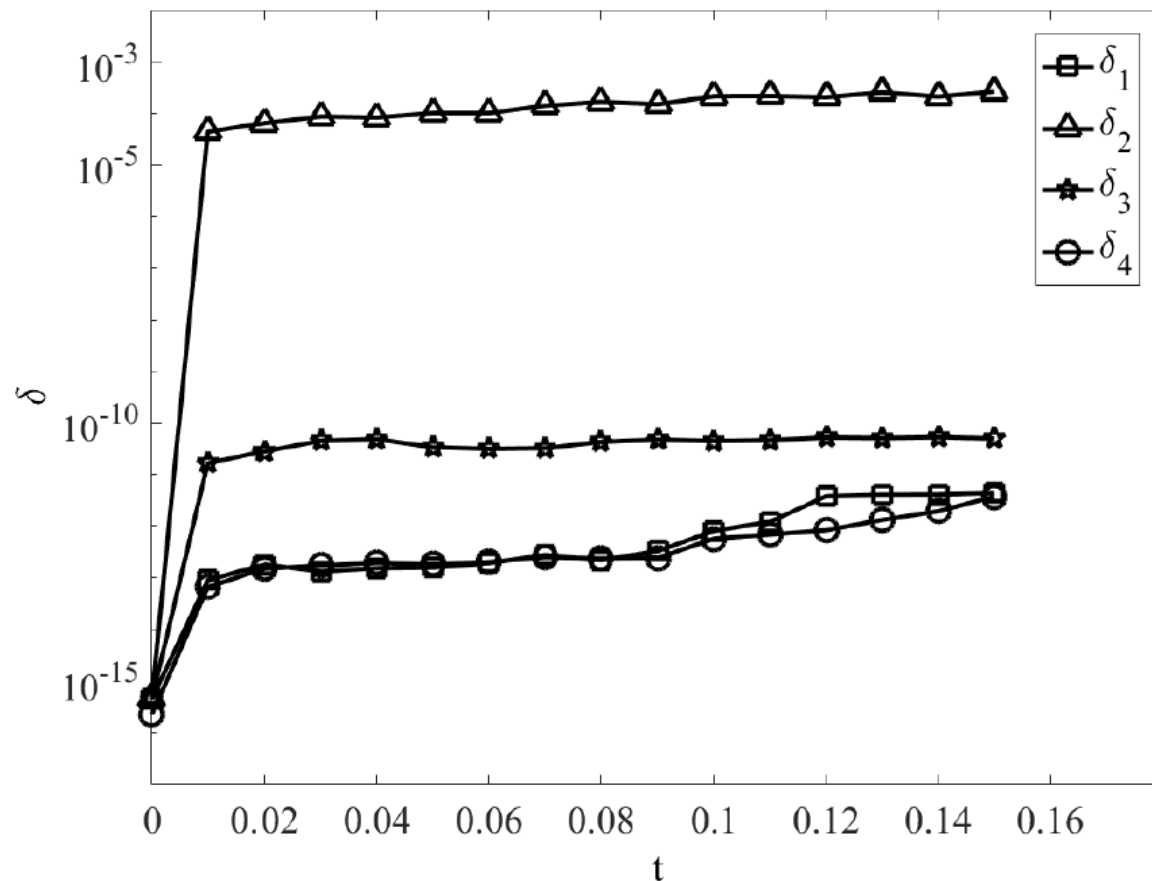


Распределение по радиусу усредненной по углам плотности на конечный момент времени в расчете 4) в сравнении с эталоном.

Отклонение от сферичности



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ



$$\delta = \max_{r_i} \max_{\theta_j, \phi_k} |\rho_{ijk} - \bar{\rho}_i|, \quad \bar{\rho}_i = \frac{\sum_{\theta_j, \phi_k} \rho_{ijk} V_{ijk}}{\sum_{\theta_j, \phi_k} V_{ijk}}.$$

- ❑ Сформулированы достаточные условия для сохранения эйлеровыми схемами сферической симметрии на сферической сетке в декартовой системе координат.
- ❑ Предложены подходы к обеспечению условий теоремы и продемонстрирована их работа на сферической задаче о распаде разрыва.

Радиальные, но несферические сетки?

С доказательством теоремы и деталями можно будет ознакомиться в статье:

Глазырин И.В., Михайлов Н.А., Фролова Н.Л., Чижков М.Н. О сохранении сферической симметрии на сферической сетке в декартовой системе координат при расчете газодинамических течений эйлеровыми конечно-объемными схемами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2025. В печати.

**Спасибо
за внимание!**

