

Мультифрактальный анализ количественных характеристик явления динамического разрушения, диспергирования металлов и развитой турбулентности

А. Я. Учаев, Н. И. Сельченкова

**Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-
исследовательский институт экспериментальной физики**

e-mail: otd4@xpd.vniief.ru

Критическое поведение нелинейных систем различной физической природы связано с явлениями самоорганизации, динамического хаоса и со стохастической неустойчивостью. Такие процессы возникают в явлениях динамического разрушения и диспергирования металлов, развитой турбулентности в атмосфере, в жидкостях, при пластических течениях в металлах. Результаты исследований явления динамического разрушения и диспергирования металлов на основе методов неравновесных процессов позволяют рассматривать эти явления как критический переход в эволюции неравновесных систем. Этому переходу предшествует возникновение в системах масштабно-инвариантных пространственно-временных диссипативных иерархических структур, возникающих через каскад бифуркаций. Тем самым эти явления следует интерпретировать, как мультифрактальные процессы. Скейлинговые соотношения позволяют сформулировать прогностические признаки поведения динамических нелинейных систем по мере приближения к критическим точкам.

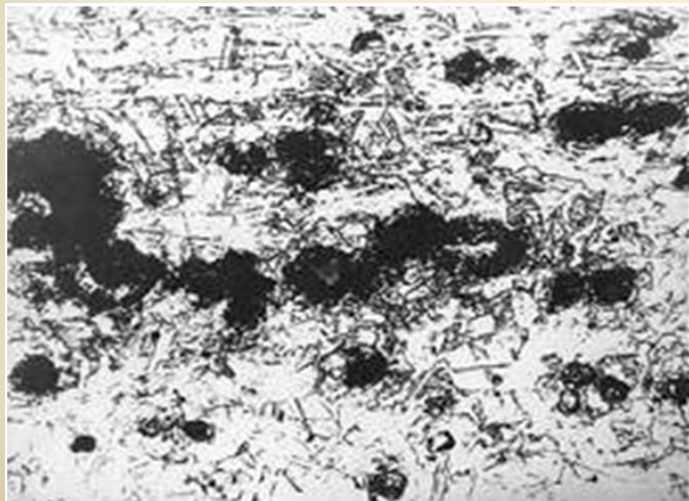
Однако, в настоящее время строгая, математически обоснованная теория явления динамического разрушения конденсированных сред, также как, и турбулентности пока отсутствуют, что делает необходимым для их описания применение феноменологических подходов и скейлинговых соотношений. В основе хаотического поведения динамических систем, степенных законов распределения фрактальных объектов лежит понятие самоподобия, которое является одной из форм симметрии. Симметрия – инвариантное поведение системы при каких либо преобразованиях, например, одна из форм симметрии – инвариантность относительно геометрических преобразований. Универсальность простого движения является линейность физических систем и инвариантность при трансляциях в пространстве и во времени, описывающих их поведение

Однако, в большинстве существующих явлений линейность нарушается и вместо периодического движения возникает апериодическое, хаотическое движение, не обладающее инвариантностью при аддитивных сдвигах, и проявляющее инвариантность при мультипликативных изменениях масштаба. В общем случае одно из следствий самоподобия – возникновение объектов с определенной структурой.

Откликом системы на внешнее воздействие, согласно принципу Ле Шателье-Брауна, являются процессы, которые стремятся ослабить внешнее воздействие. Количественной характеристикой этого принципа является обобщенная восприимчивость; в механических системах – это сжимаемость. Например, в явлении динамического разрушения, сжимаемость связана с возникающим каскадом центров разрушения, который является фрактальным кластером.

$$dE = TdS - PdV$$

$$\frac{T}{dV} = \frac{P}{dS} \quad P < 0, \quad dV < 0$$



Параметры нагружения

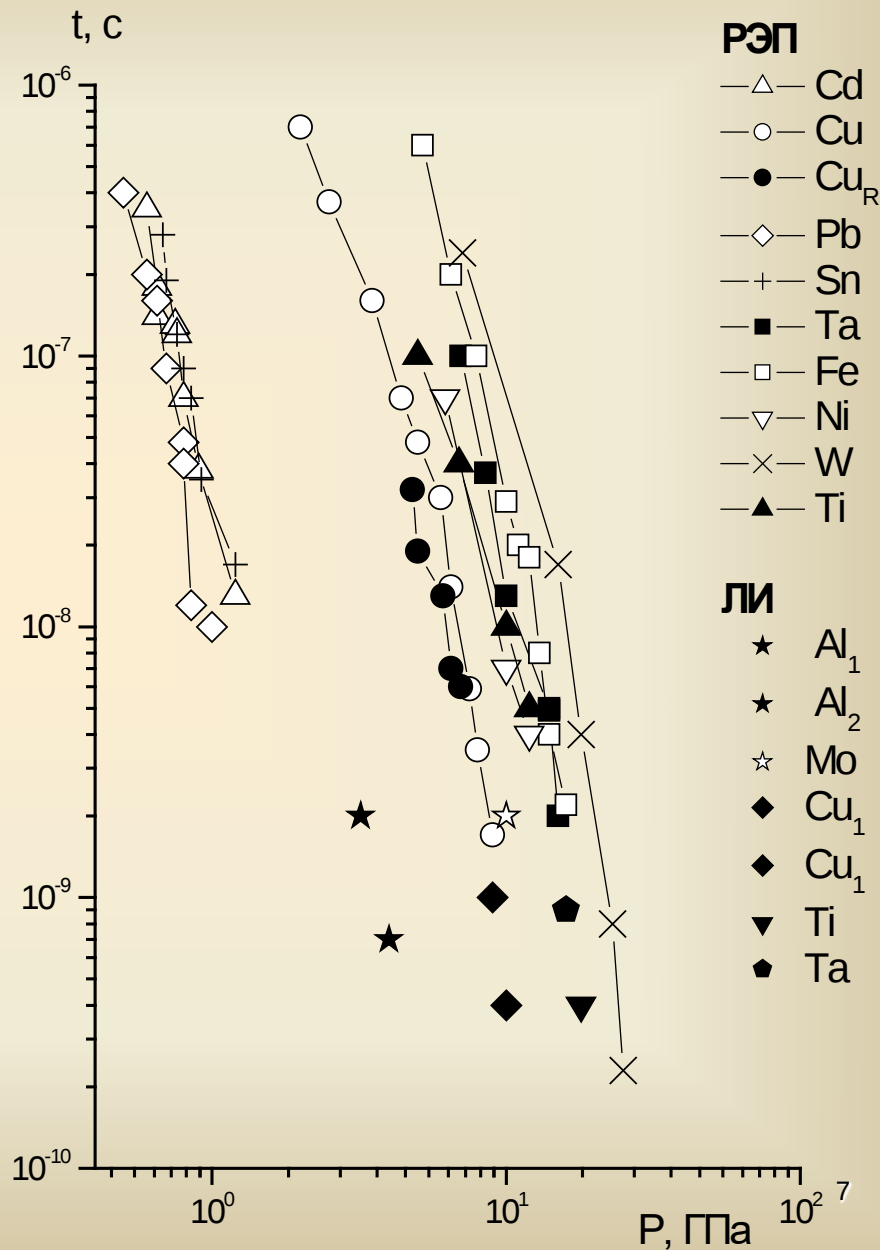
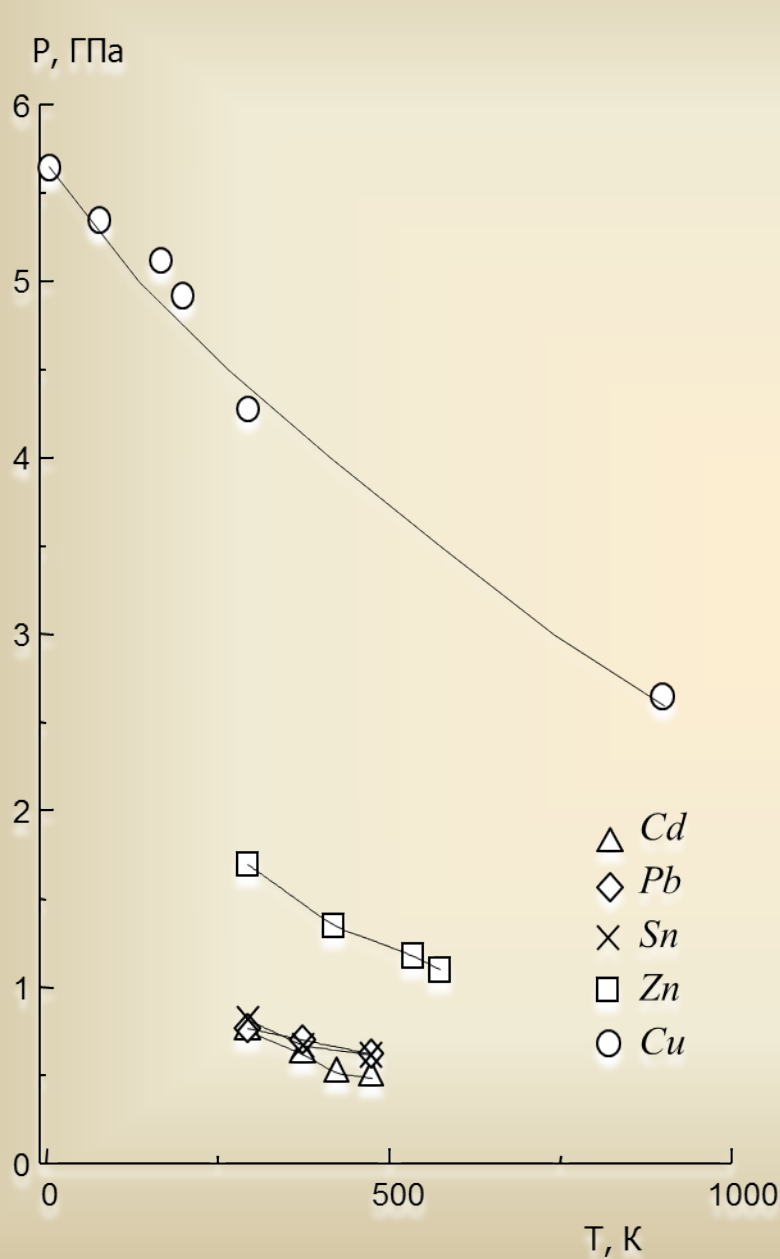
Релятивистские электронные пучки (РЭП)

- Начальная температура
($T \sim 4 \text{ К} \div 0,8 \text{ Т пл.}$)
- Плотность поглощенной энергии
 $dE / dm \sim 10 \div 10^3 \text{ Дж / г}$
- Давление $P - 1 \div 100 \text{ ГПа}$
- Скорость ввода энергии
 $dT / dt \sim 10^{12} \text{ К / с}$
($dE / dt \sim 10^{11} \text{ Дж / (г·с)}$)
- Диапазон долговечности
 $t \sim 10^{-6} \div 10^{-10} \text{ с}$
- $\tau_i \sim 1 \text{ нс}$

Импульсы лазерного излучения (ЛИ)

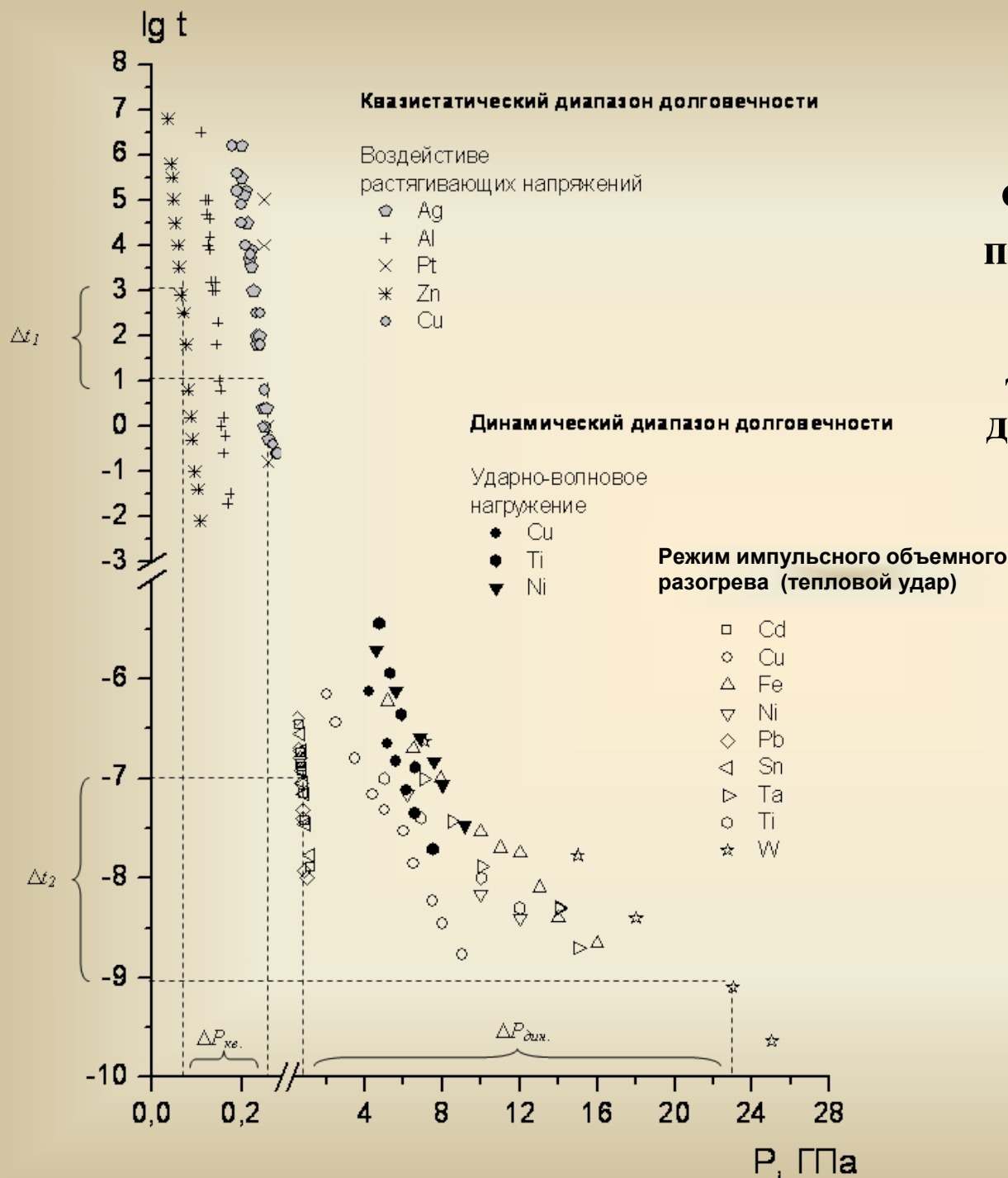
- Энергия одиночного импульса $E \sim 100 \div 1000 \text{ мДж}$
 - Плотность мощности
 $\frac{dE}{dm} > 10^{13} \text{ Вт / см}^2$ ($d \sim 0,1 \text{ мм}$)
 - Длительность импульса
 $t_0 \sim 10^{-10} \div 10^{-12} \text{ с}$
 - Диапазон долговечности
 $t \sim 10^{-9} \div 10^{-10} \text{ с}$
 $\tau_i \sim 10 \text{ пс}$
- $J \sim 10^{15} \text{ Вт / см}^2$
- $\tau_i \sim 40 \text{ фс}$

Температурно-временные закономерности процесса динамического разрушения при воздействии теплового удара

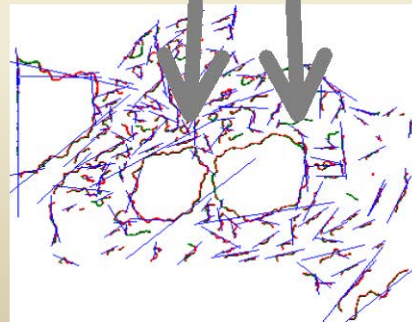


**Временные зависимости
долговечности металлов
от критического давления,
приводящего к разрушению,
в квазистатическом и в
динамическом диапазонах
долговечности (t в секундах)**

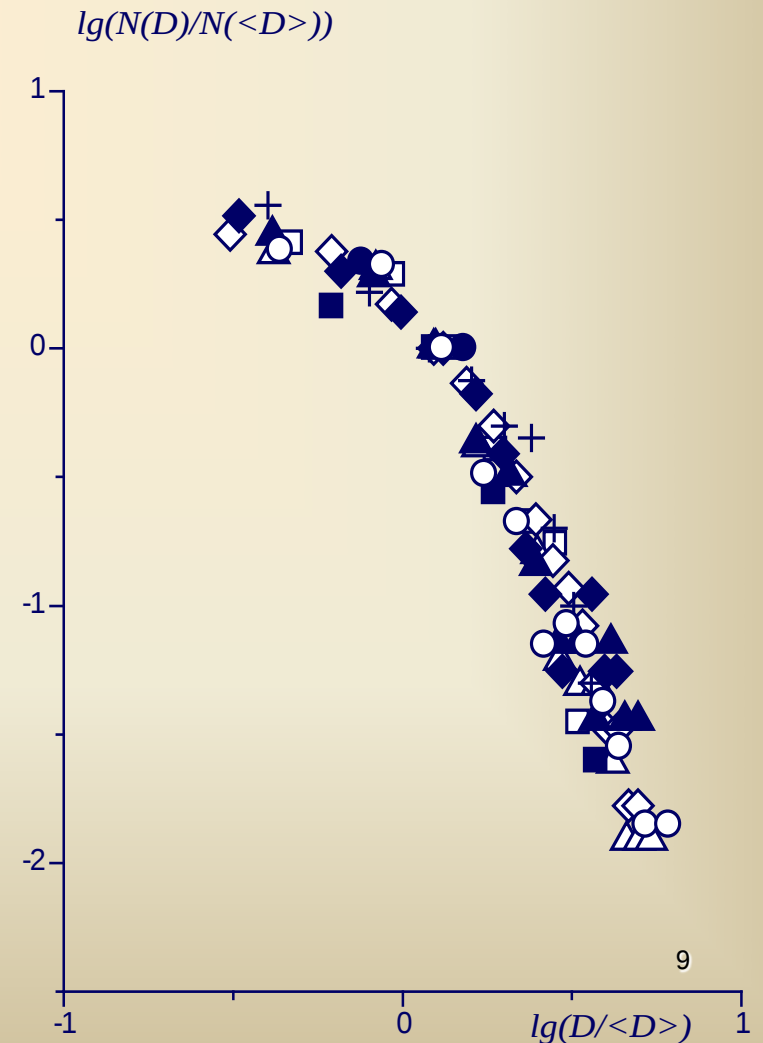
$$\Delta t_1 = \Delta t_2; \Delta P_{\text{дин}} > \Delta P_{\text{кв}}$$



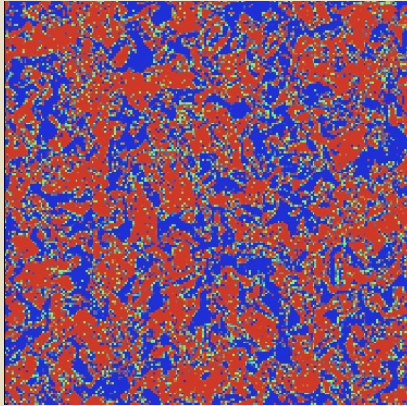
Структурирование полос скольжений кристаллической решетки вокруг центров разрушений и касательные к полосам скольжения



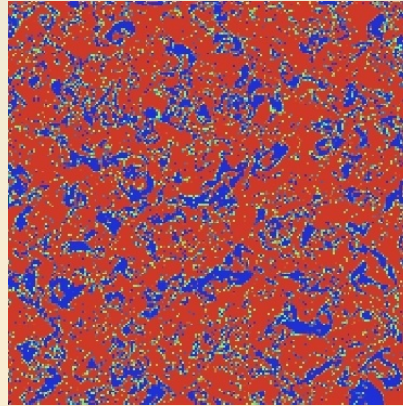
Распределение центров разрушения по размерам в *Fe* ($\Delta=4\cdot 10^{-4}\text{м}$) и *Cu* ($\Delta=10^{-3}\text{м}$) образцах



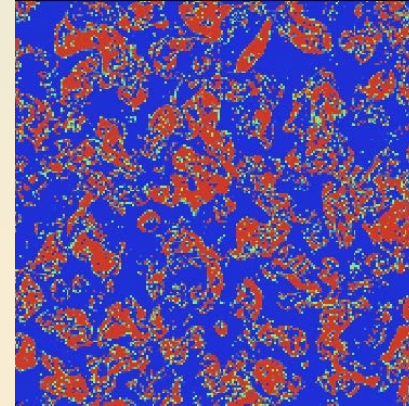
Растровые изображения картин гравитационного турбулентного перемешивания двух несжимаемых жидкостей разной плотности (три слоя на разной высоте от границы раздела жидкостей $h_1 < h_2 < h_3$)



h_1

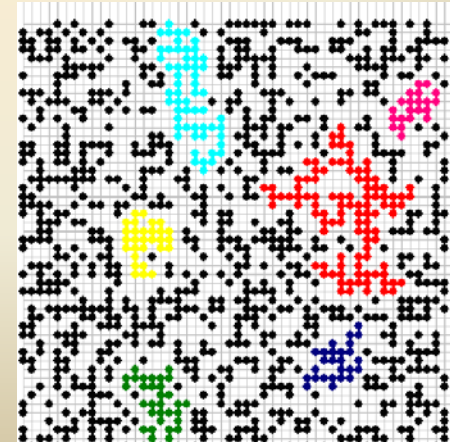
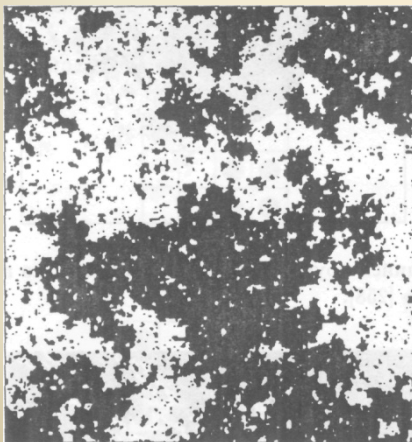


h_2

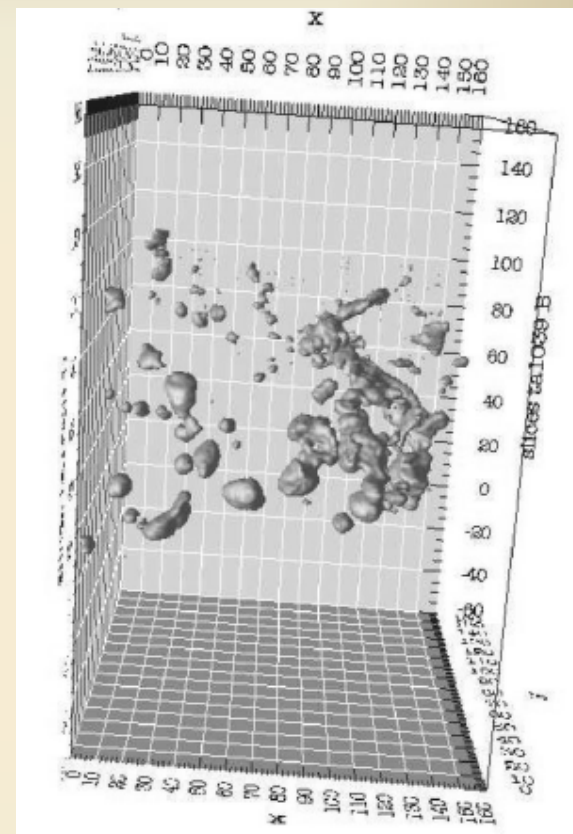
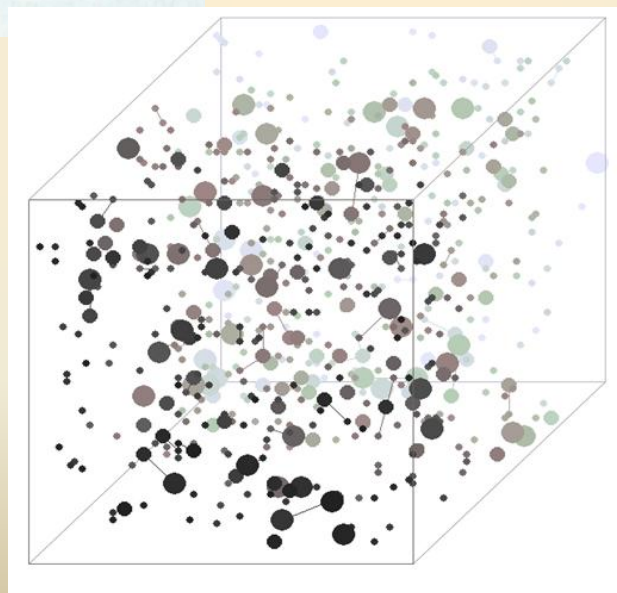
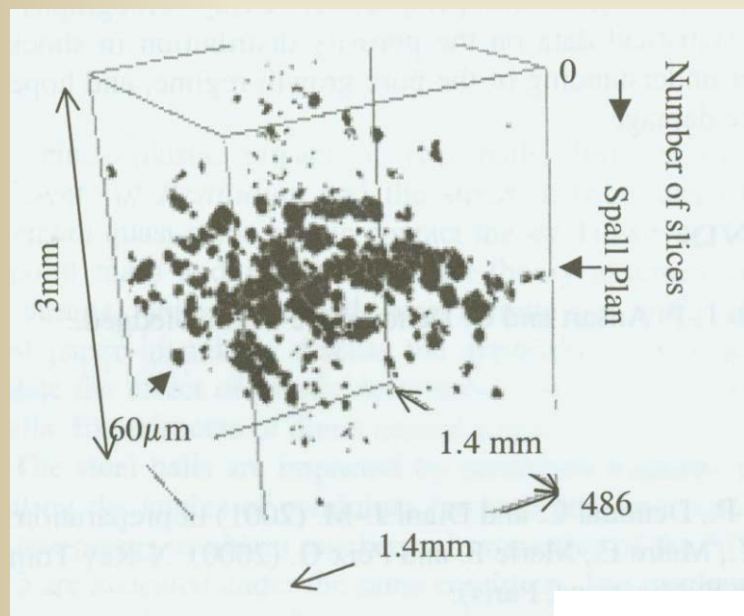


h_3

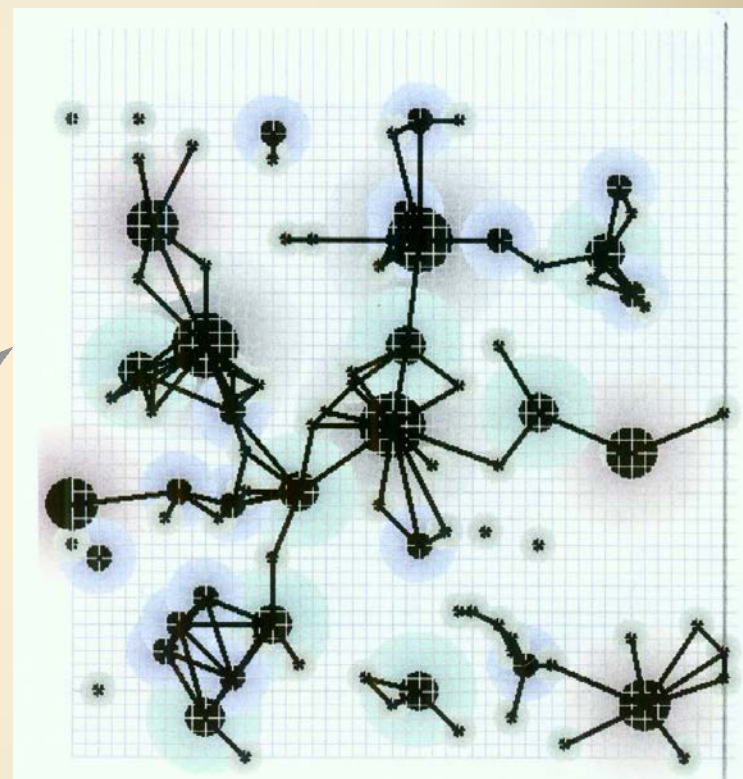
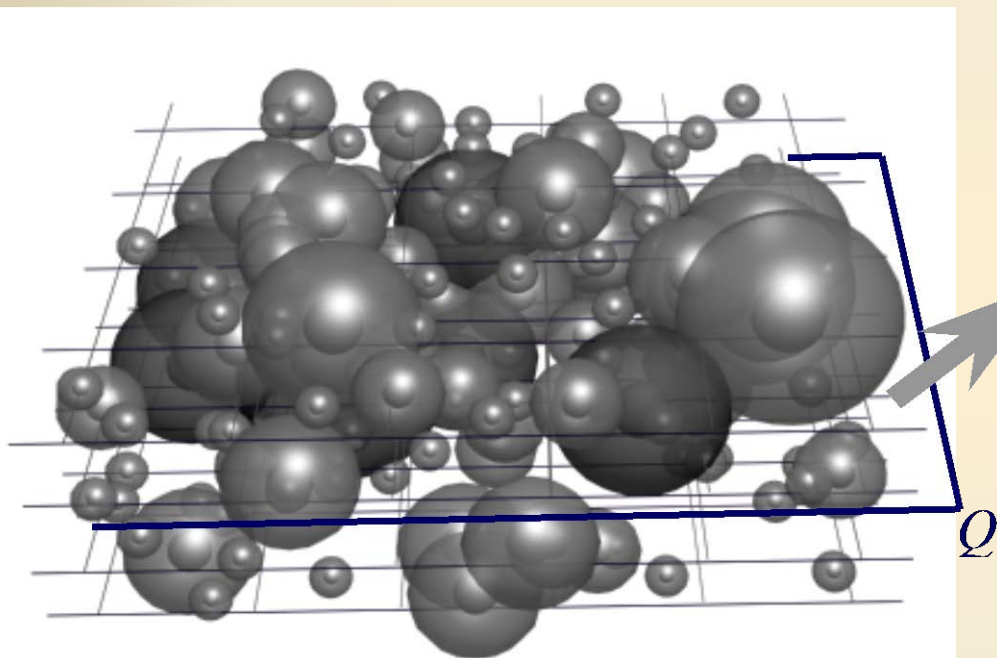
Примеры подобия возникновения бесконечных кластеров различной природы вблизи критической точки



**Восстановленная трехмерная область разрушения в медном образце (а);
трехмерная визуализация восстановленного танталового образца (б);
объемный перколяционный кластер (модельный расчет) (в)**



Объемный перколяционный кластер каскада центров разрушения (а); перколяционный компьютерный шлиф, который получен сечением плоскостью Q объемного (б)



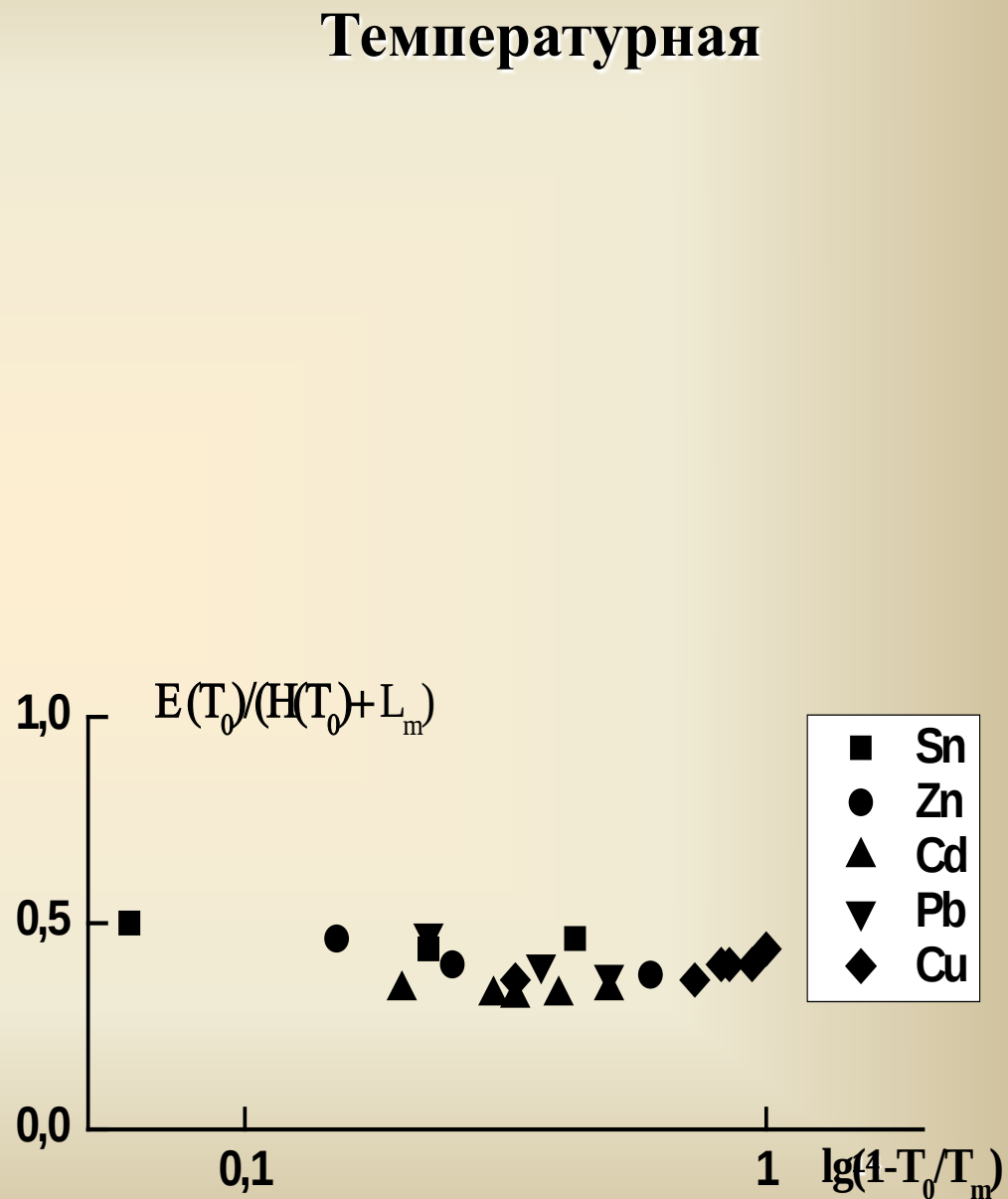
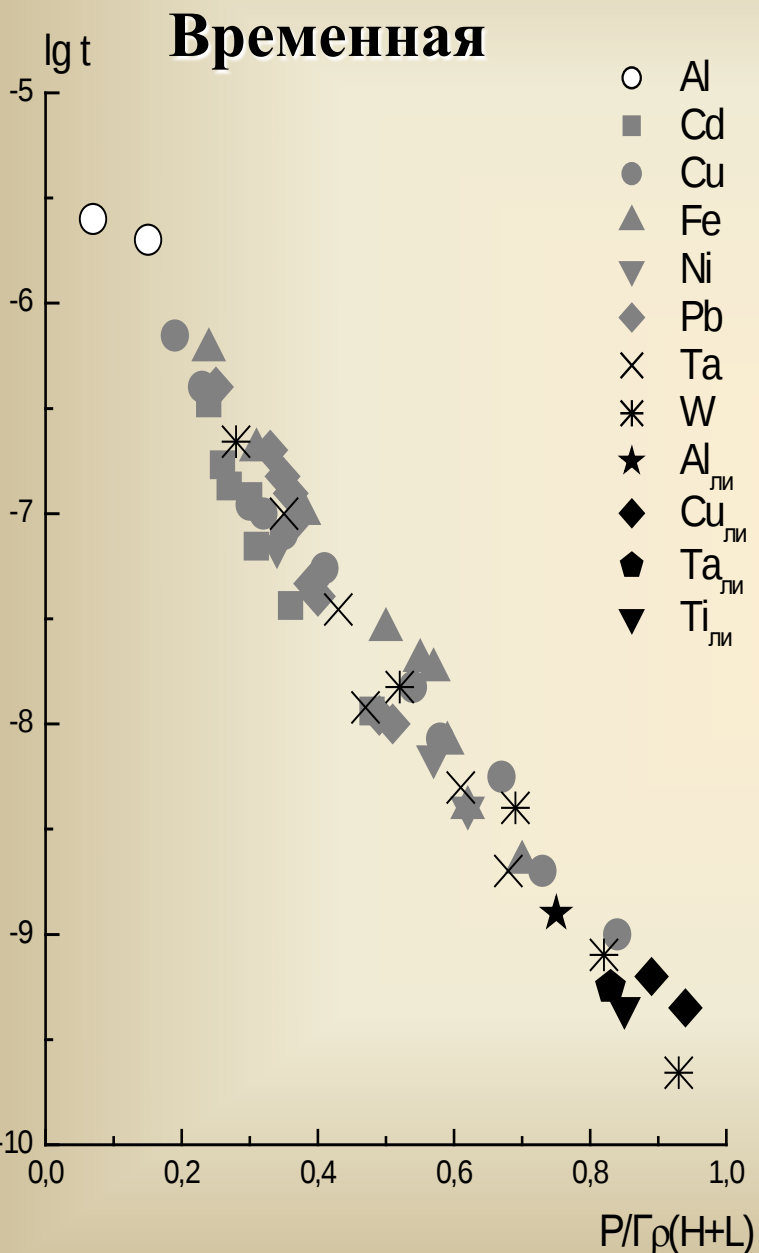
Временная зависимость критического давления и долговечности

$$P^\gamma(t) \cdot t_r = \text{const},$$

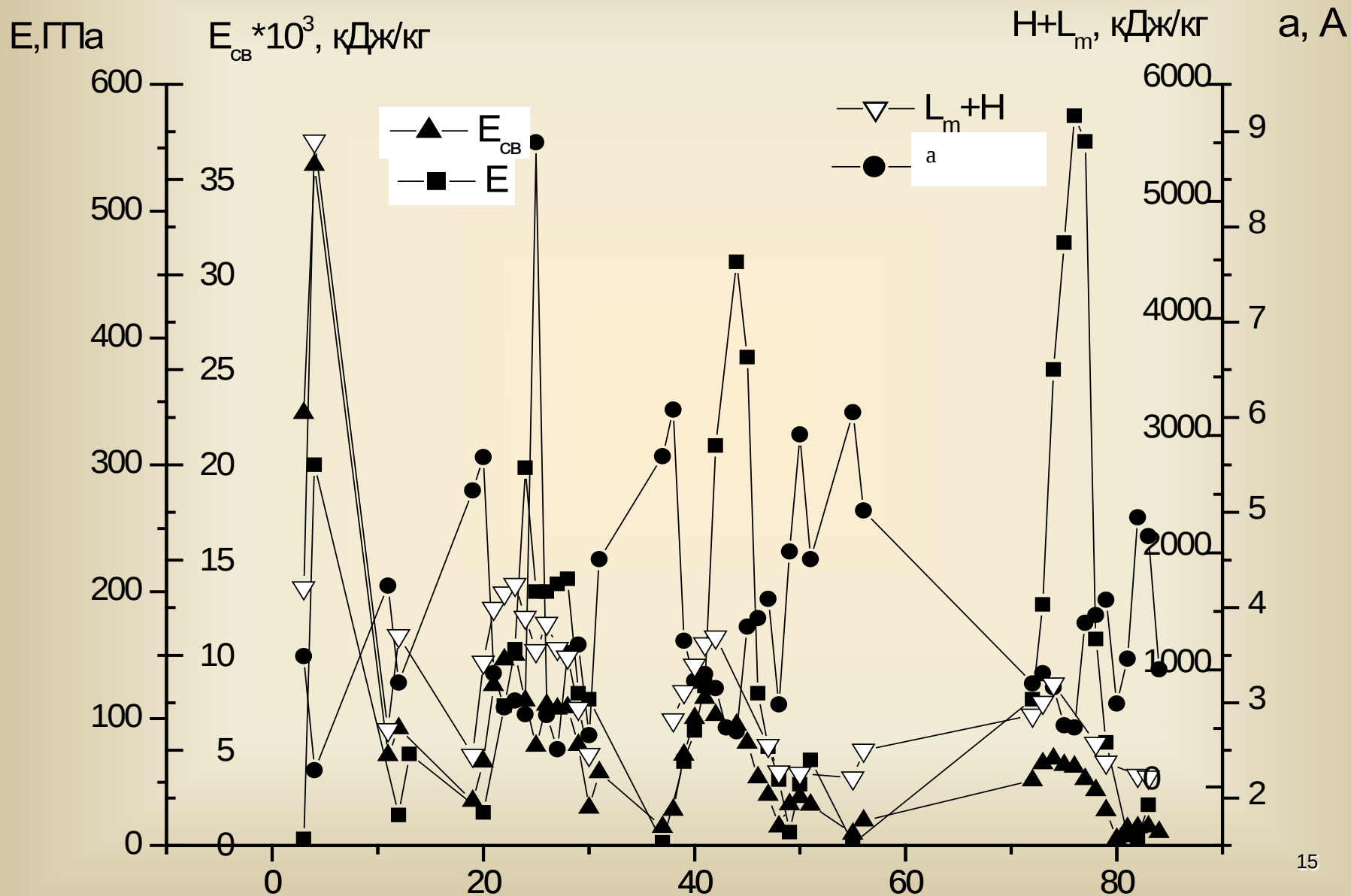
$$\left(\frac{P}{H + L} \right)^\gamma t = \text{const} \qquad \left(\frac{P}{H + L} \right) = I(P)$$

где $\gamma = 3,8$ для всех исследованных материалов в диапазоне долговечности $t \sim 10^{-6} \div 10^{-10}$ с; t_r - время разрушения

Зависимости процесса динамического разрушения металлов при воздействии РЭП, ЛИ:

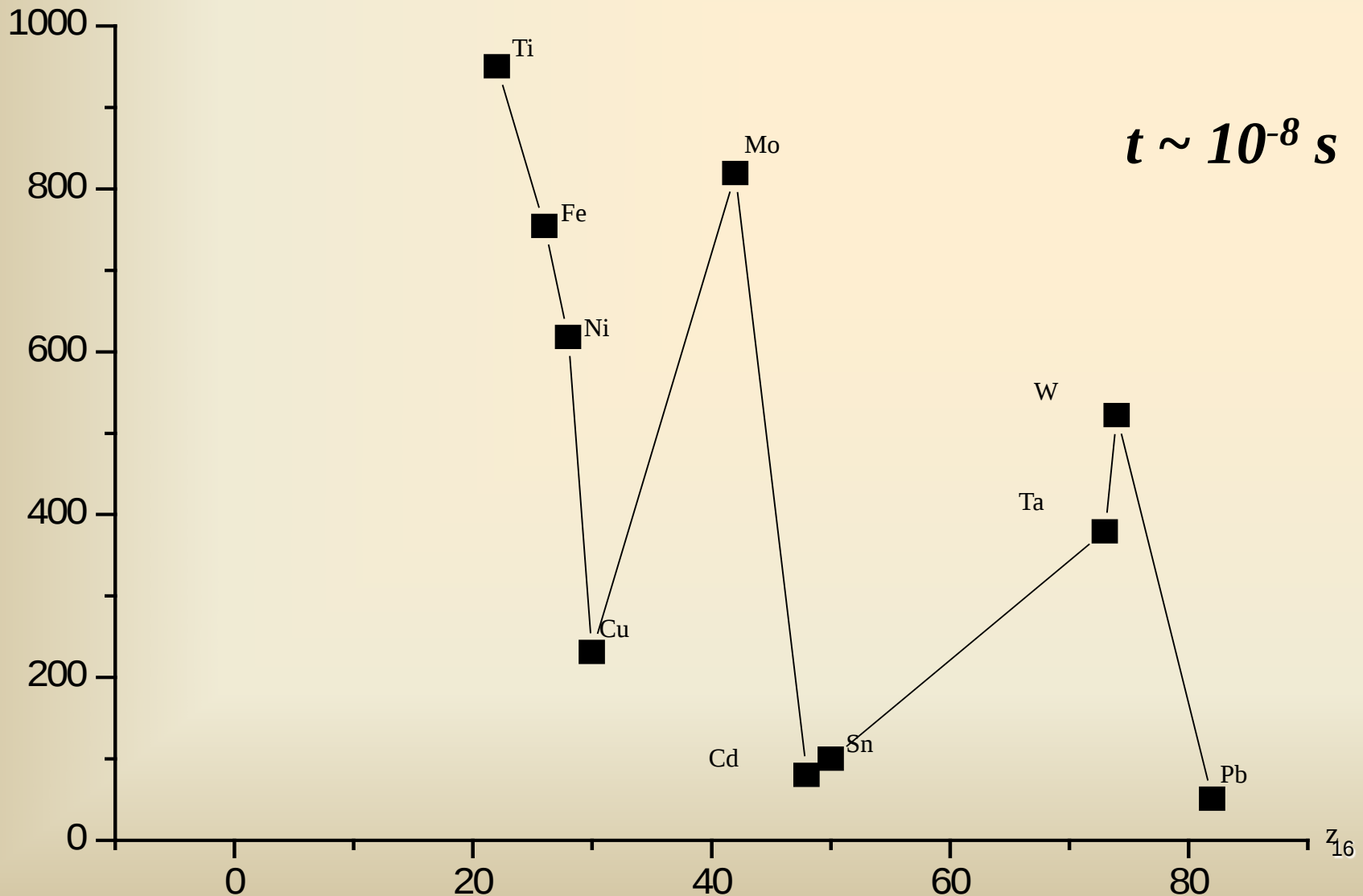


Зависимость физических параметров от порядкового номера металла z

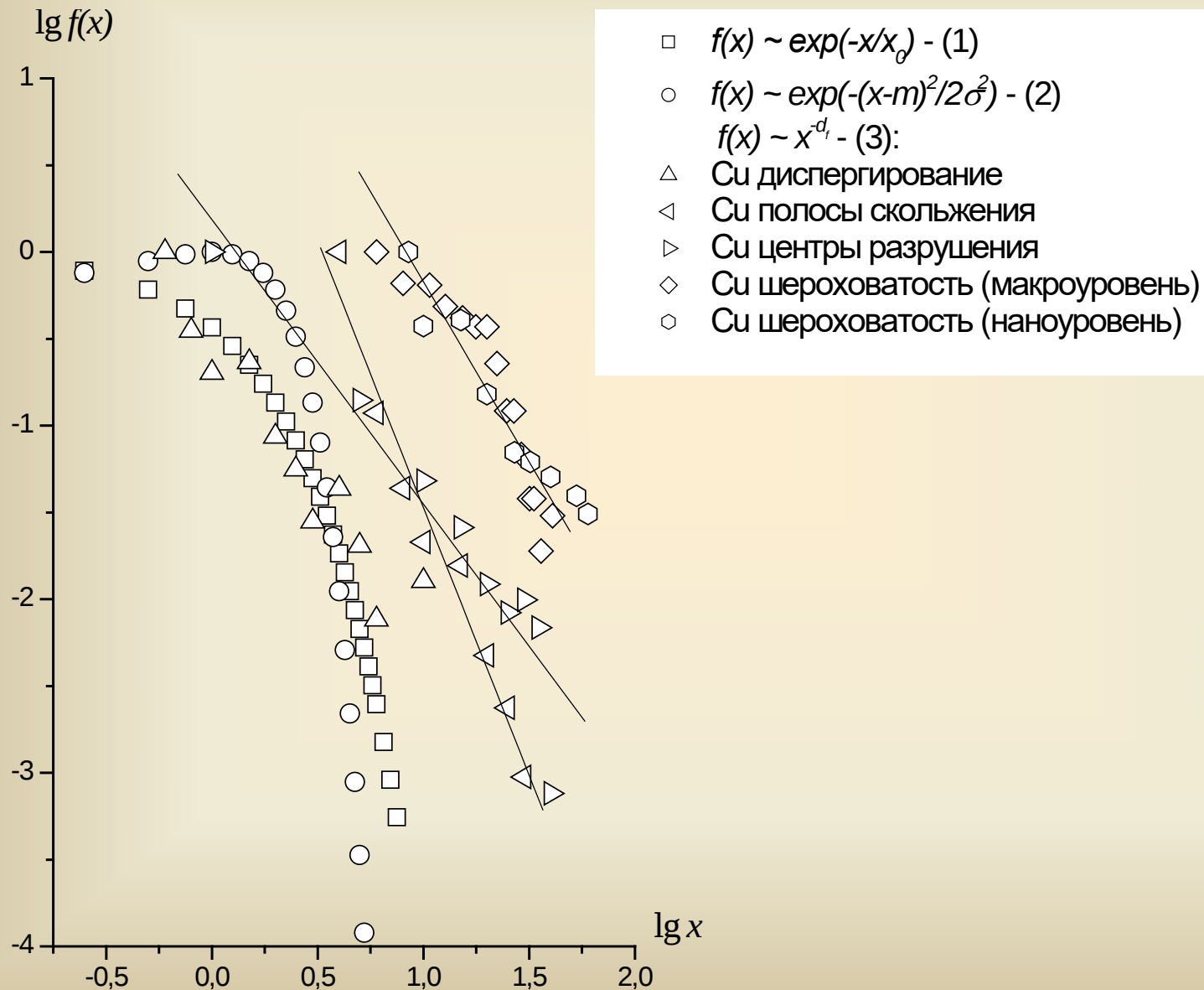


Зависимость критического давления, приводящего к разрушению ряда металлов, от порядкового номера при долговечности $t \sim 10^{-8} \text{ s}$

$E_{кр}, \text{Дж/г}$



Распределение вероятностей величин, характеризующие физические процессы в двойном логарифмическом масштабе



Для построения графика нормального распределения среднее значение m и дисперсия σ выбирались равными единице, $x \in [0 \div 10]$; для экспоненциального распределения $x \in [0 \div 10]$; $x_0 = 1$.

Разница между нормальным и степенным распределением носит принципиальный характер. Если статистика системы описывается нормальным распределением, то 99,7 % событий отклонятся от среднего значения не более чем на 3σ (так называемое правило трех сигм), а вне диапазона 5σ находятся всего лишь 10^{-6} событий. Поэтому можно пренебречь редкими событиями вне интервала 3σ .

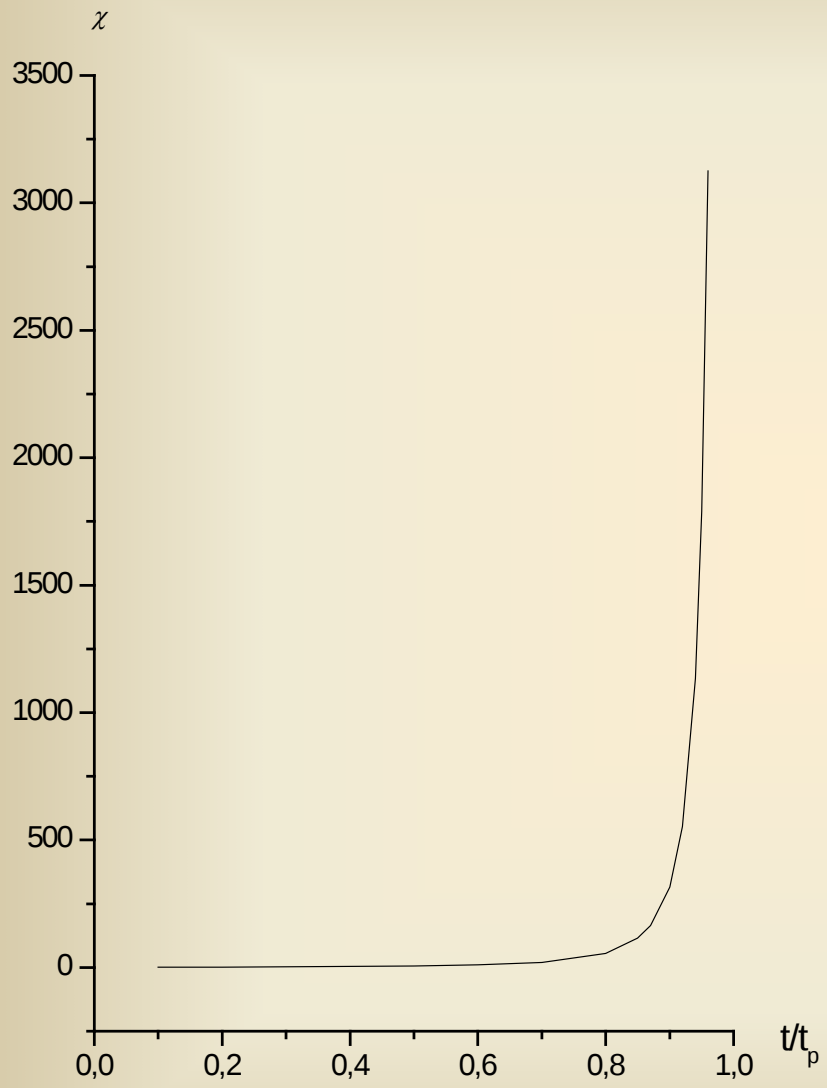
При степенном распределении плотность вероятности на хвостах распределения существенно больше, чем при нормальном распределении и редкими событиями пренебречь нельзя.

Природа степенных законов распределения определяется взаимосвязью релаксационных процессов на различных масштабных временных уровнях. Вероятность события $P(x)$ от величины x имеет вид $P(x) \sim x^{-\alpha}$ на графике в координатах $\lg x$, $\lg P(x)$ будет лежать на одной прямой для всех значений x .

Энергетические параметры металлов и параметры нагружения

Элемент	ат. №	$\frac{H_{\dot{\gamma}} + L_{\ddot{\epsilon}}}{\dot{I}_{\ddot{\epsilon}}}$	$E_{кр}, \text{Дж/Г}$ при $t \sim 10^{-8} \text{ с}$	$\frac{E_{\ddot{\epsilon}}}{\dot{I}_{\dot{\gamma}} + L_{\ddot{\epsilon}}}$ при $t \sim 10^{-8} \text{ с}$	$\frac{E_{\ddot{\epsilon}}}{\dot{I}_{\ddot{\epsilon}}}$ при $t \sim 10^{-8} \text{ с}$
Al	13	0,151	—	—	—
Ti	22	0,16	950	0,537	0,086
Fe	26	0,18	754	0,585	0,105
Co	27	0,16	—	—	—
Ni	28	0,15	618	0,533	0,080
Cu	29	0,144	394	0,575	0,083
Zn	30	0,157	—	—	—
Mo	42	0,18	819	0,537	0,097
Cd	48	0,18	80	0,494	0,089
Sn	50	0,12	100	0,525	0,063
Ta	73	0,186	379	0,495	0,092
W	74	0,165	522	0,570	0,094
Pb	82	0,116	51	0,510	0,059
U ²³⁸	92	0,12	94,38	0,56	0,07

Временная зависимость восприимчивости на масштабе времени разрушения



По определению:

$$K = V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial V^2} \right) = \frac{\varphi''}{a}$$

φ - парный потенциал,
 a – межатомное расстояние

$$K = N K_{am}$$

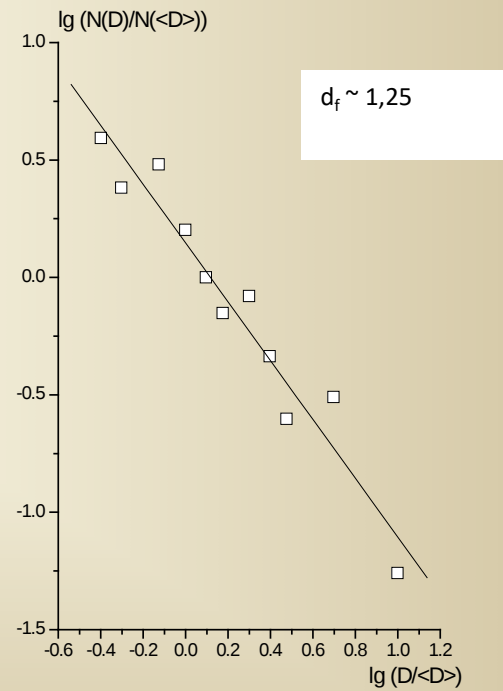
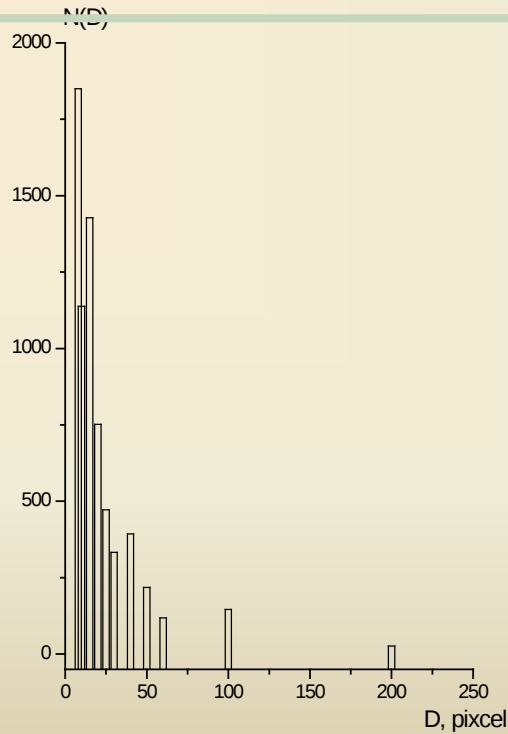
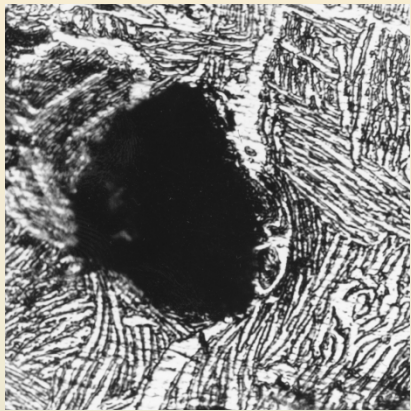
$N = 1/a^2$ – число атомов в cm^2

$$K' = (N-n_p) K_{am} , \qquad n_p \sim \frac{N^{2/3}(t)\overline{D}^2}{a^2}$$

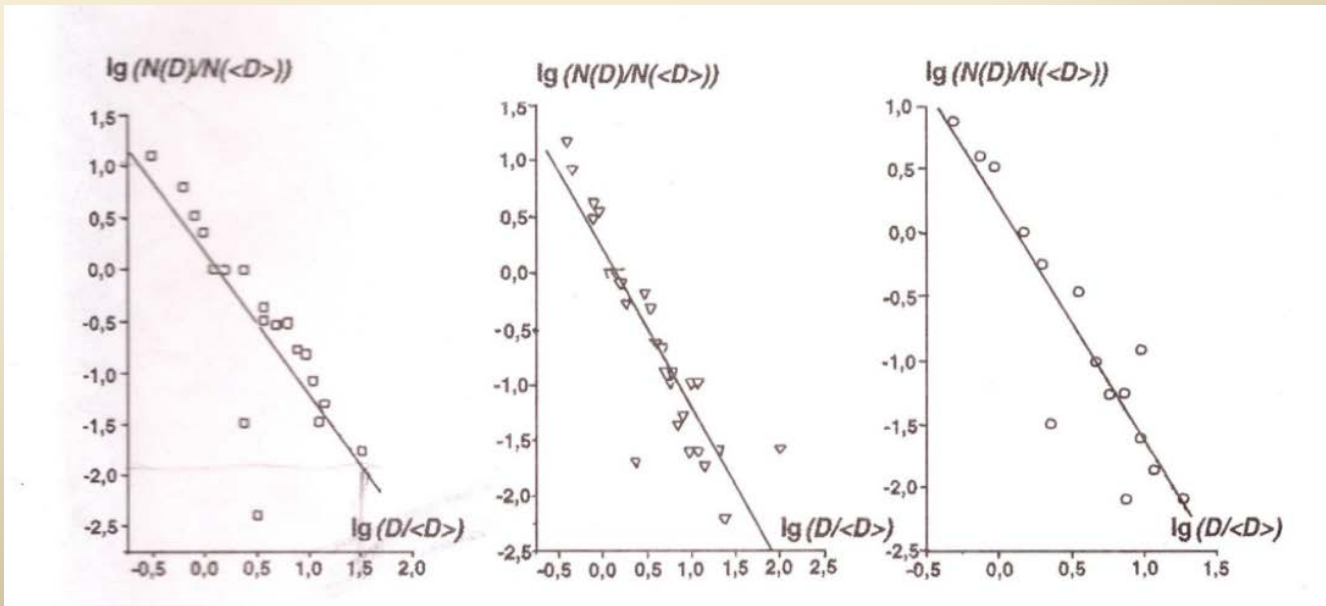
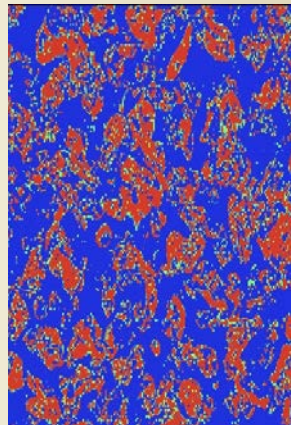
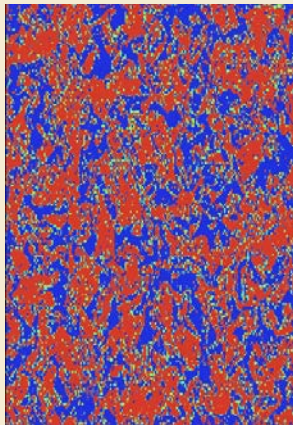
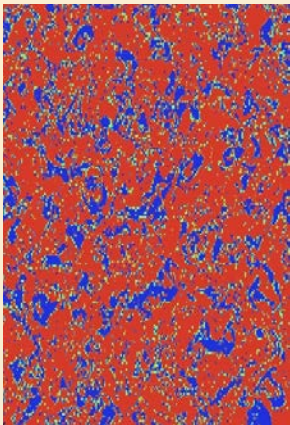
$$\chi \sim A \frac{1}{(1 - N^{2/3}_p \overline{D}^2)} , \qquad \chi \sim \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{t_p}\right)^{2,53}}$$

Шлиф образца из Ti ($T_0 \sim 800\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\times 500$) и результаты математической обработки полос скольжения (ударно-волновое нагружение)

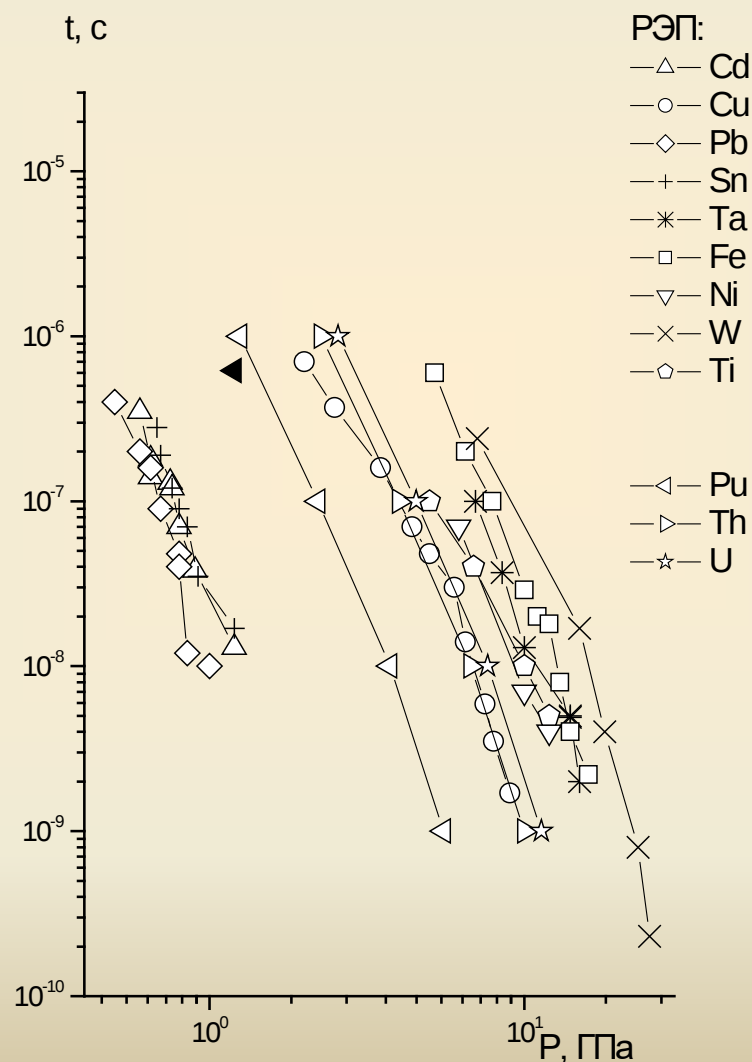
шлиф образца из Ti	распределение полос скольжения по размерам	фрактальная размерность полос скольжения
--------------------	--	--



Картины гравитационного турбулентного перемешивания двух несжимаемых жидкостей и результаты математической обработки

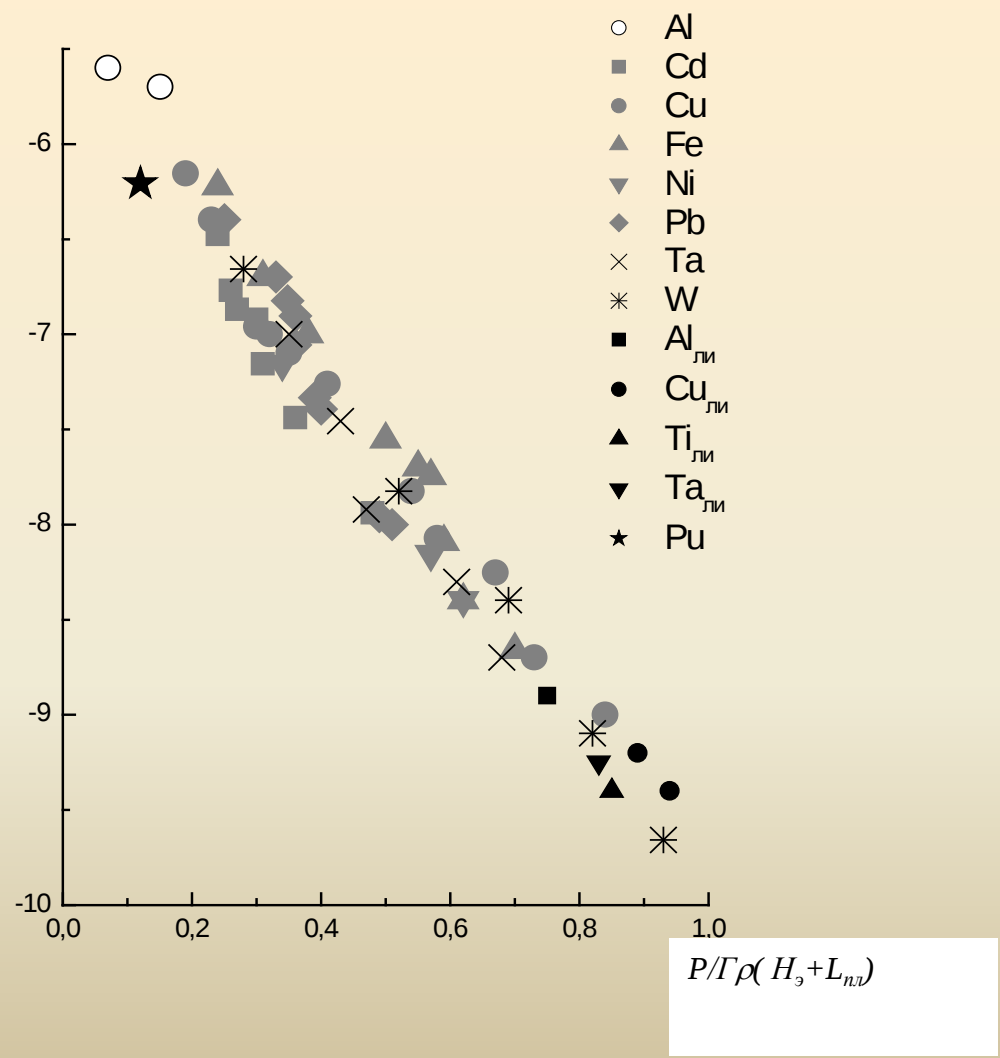


Временные зависимости процесса динамического разрушения ряда металлов (экспериментальные данные) при воздействии релятивистских электронных пучков и спрогнозированные временные зависимости металлов Pu, Th, U (расчет)



Временные зависимости процесса динамического разрушения ряда металлов при воздействии релятивистских электронных пучков и лазерного излучения в универсальных координатах:

$lg t, P/\Gamma\rho(H_э+L_{пл})$



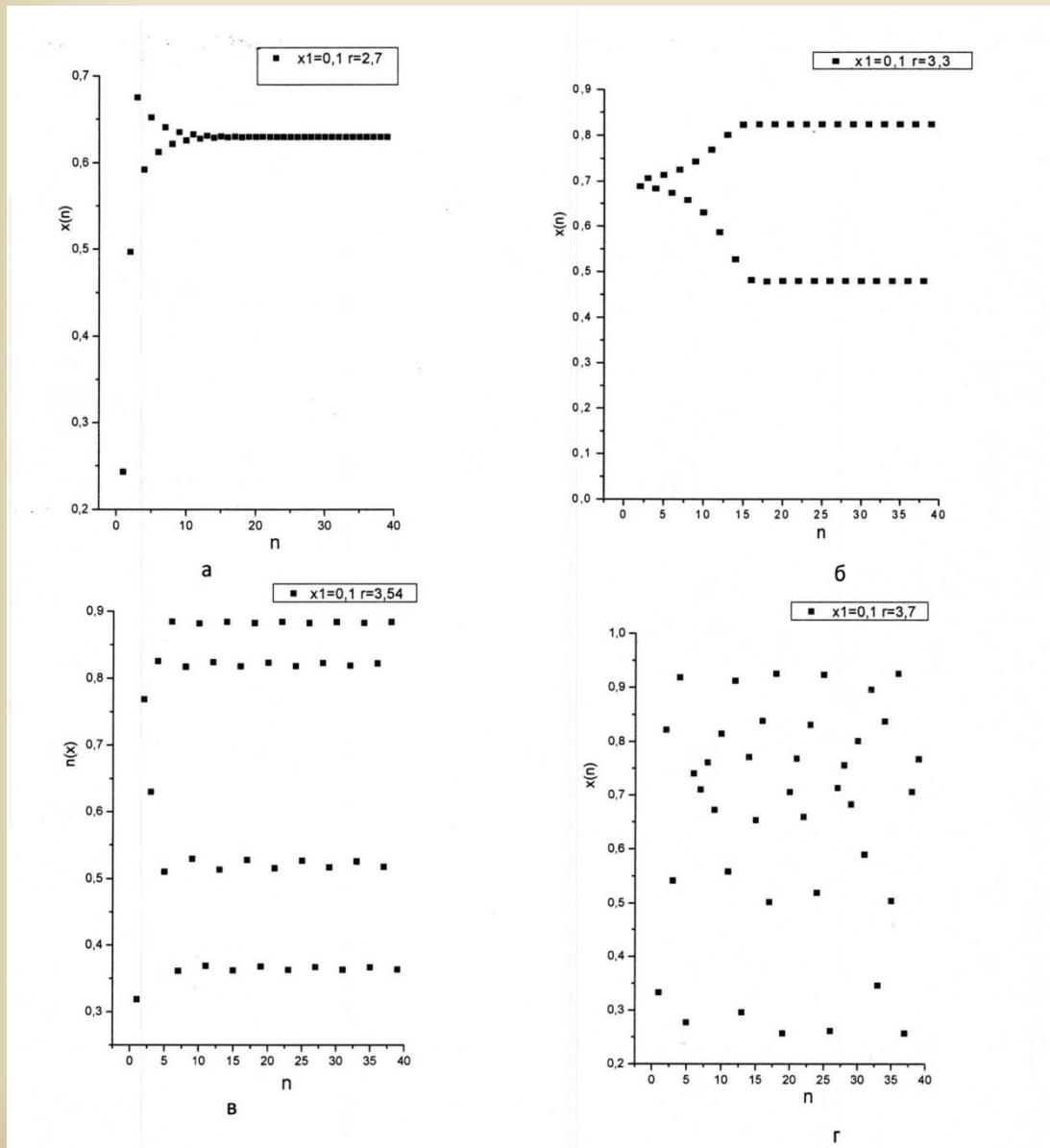
Рассмотрим самоподобие, возникающее в результате мультипликативных итераций с применением квадратичного уравнения - логистической параболы. Такой алгоритм итерации приводит к универсальному поведению нелинейной системы. Логистическая парабола описывает возникновение периодичности циклов нелинейной системы и удвоения периода, возникающего из самоподобия отображений, приводящего к хаосу в нелинейной системе.

Закон роста вида $x_{n+1} = f(x_n) = r(1 - x_n) x_n$

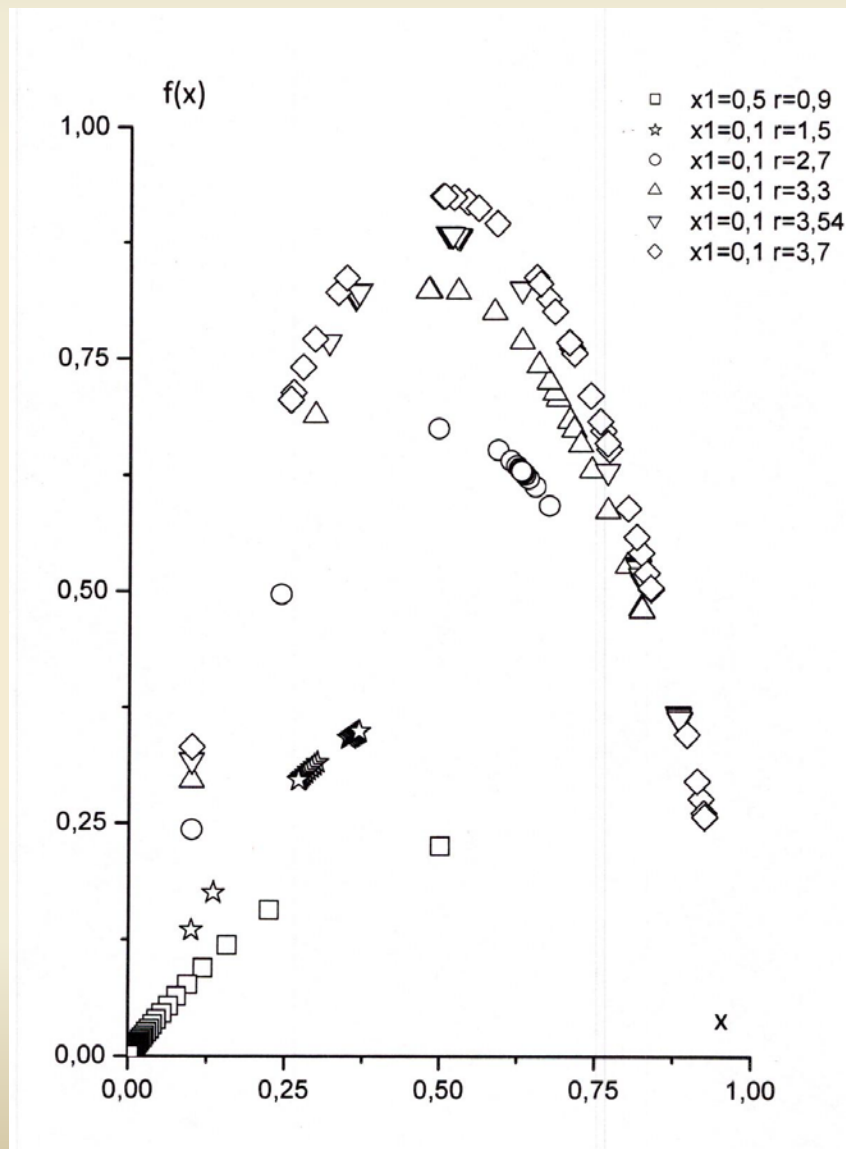
называют квадратичным отображением или логистической параболой, где r - управляющий параметр, x_n - текущее значение величины. Например, в конвекции Рэлея-Бенара эта величина может быть температурой (градиентом температуры).

Поведение системы в зависимости от управляющего параметра r при квадратичном отображении (40 итераций)

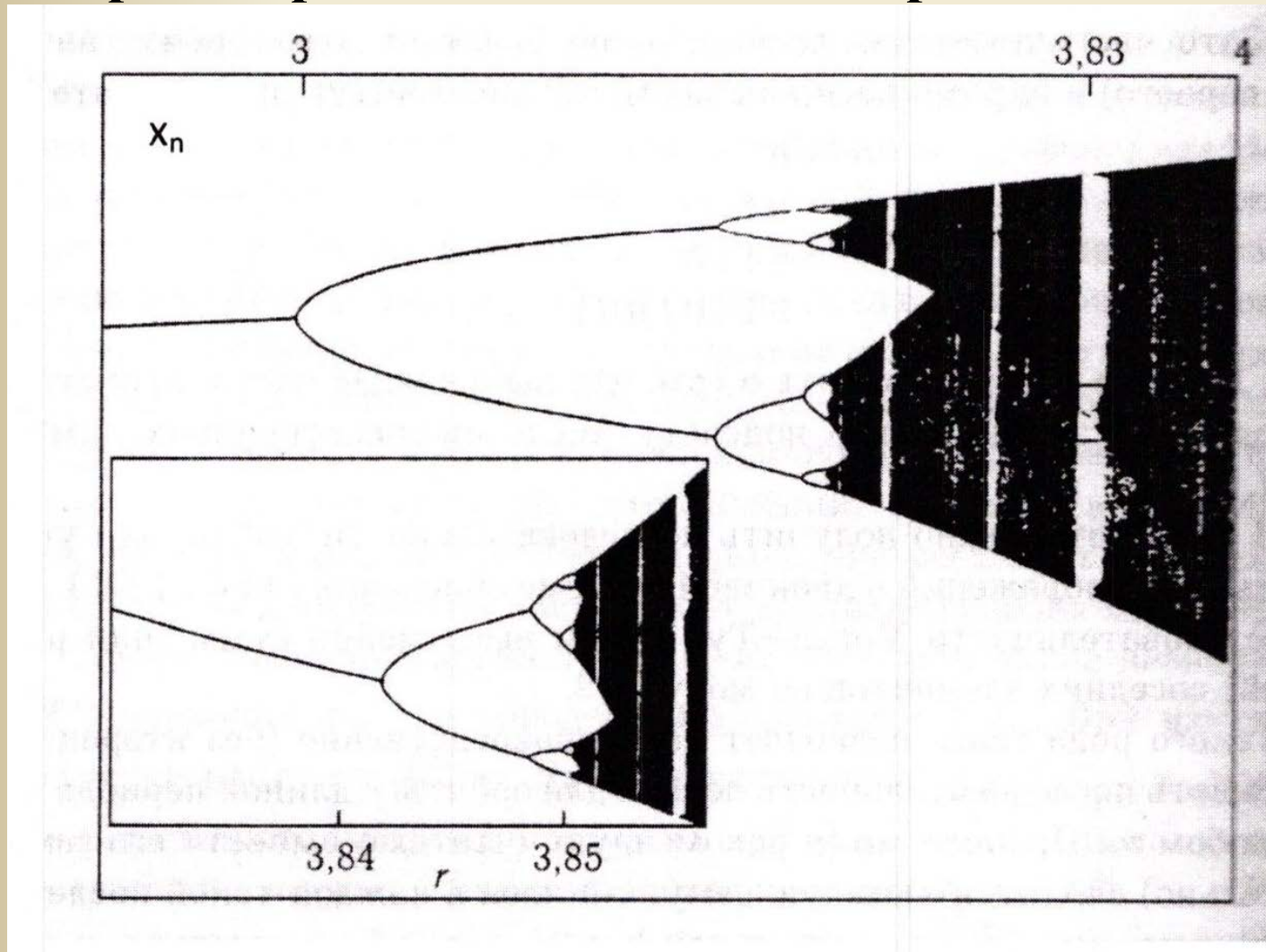
$$x_{n+1} = f(x_n) = r(1 - x_n) x_n$$



Логистическая парабола для различных значений управляющего параметра r

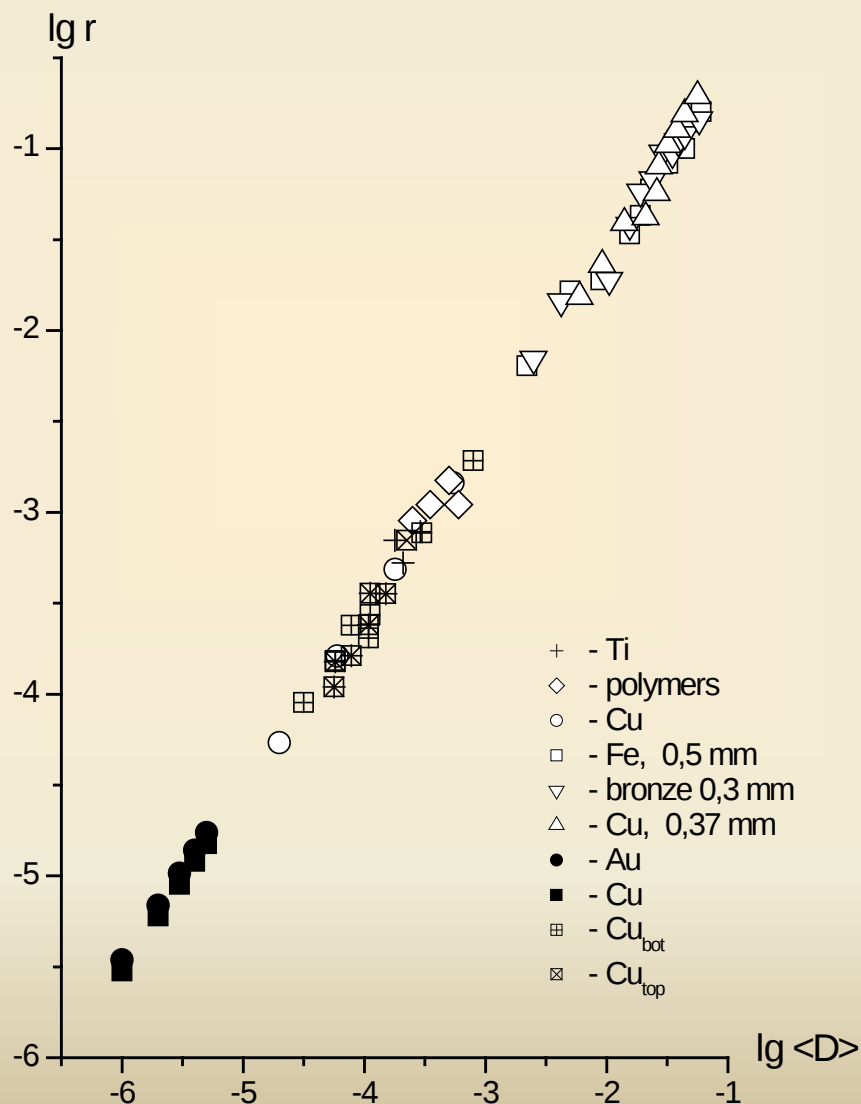


Итерации квадратичного отображения как функция параметра r
Поведение логистической параболы при увеличении r от 3 до 4,
когда каскад удвоения периода сменяется хаосом ($r \sim 3,83$),
который перемежается «окнами периодичности».



Зависимость среднего расстояния $r=N^{-1/3}$ между элементами диссипативных структур от их среднего размера $\langle D \rangle$.

Размеры r и $\langle D \rangle$ даны в см.



Число элементов диссипативных структур определенного размера в единичном (элементарном) объеме системы на масштабе времени процесса можно сопоставить с частотой f появления элементов диссипативных структур. Выражение $S(f) \sim f^{-\beta}$ называется спектральной мощностью; β - спектральный скейлинговый параметр.

Такой же вид имеет зависимость числа элементов диссипативных структур от их размера $D(N) \sim N^{-1/d}$.

Обратной величине f можно сопоставить «время» жизни элементов диссипативных структур. На масштабе времени процесса можно построить временной ряд жизни элементов диссипативных структур, пронумеровав в порядке возрастания времени. Согласно концентрационному критерию масштабно-временные уровни элементов диссипативных структур иерархической неравновесной системы взаимосвязаны.

Для анализа динамики неравновесной системы требуется получение переменных, которые определяют последовательность состояний системы. Если известны уравнения эволюции системы, то определение таких переменных не вызывает проблем. Однако, поведение нелинейных физических систем различной природы связано со стохастической неустойчивостью, явлениями динамического хаоса. В этом случае инвариантные характеристики динамической системы могут быть вычислены с применением временного ряда какого-либо экспериментального наблюдаемого параметра системы. Ряд считается временным, если элементы ряда зависят от времени. Например, распределение числа элементов диссипативных структур (центров разрушения, гидродинамических мод) зависит от времени.

Временной ряд, элементы которого представляют число событий в единицу времени, не связаны между собой.

Следовательно, необходимо определить методы, которые позволили бы сохранить информацию об объекте исследований, о временных событиях и их взаимосвязи. Временной интервал между событиями с индексами $i, i+1$ определяется величиной

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i,$$

которые связаны между собой, где t_i – время i события.

Ряд времен ожиданий можно рассматривать, как временную зависимость кинетики неравновесных процессов различной физической природы и как носитель прямой информации о физических процессах, недоступных для непосредственного наблюдения.

Величины Δt_i аддитивны $i_{\max}, i_{\min}$ – значения индекса i для любого непрерывного ряда; $i_{\max} - i_{\min}$ число времен ожидания на временном отрезке; величины Δt_i неотрицательны. Выше изложенное делает эти параметры пригодными для скейлингового анализа.

Рассмотрим статистическую сумму

$Z(q, r) = \sum p_i^q(r)$, где q – порядок момента меры. Для самоподобной меры справедлива степенная зависимость статистической суммы от масштаба r .

$\sum p_i^q(r) \sim r^{-d}$, где d – фрактальная размерность.

Если соотношение выполняется, то d является функцией порядка момента меры q ; $d = \tau(q)$.

Выражение для показателя массы $\tau(q)$ имеет вид

$$\tau(q) = \ln \sum p_i^q(r_i) / \ln r_i.$$

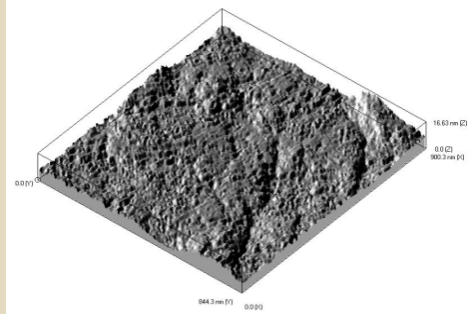
Спектр фрактальных размерностей определяется выражением $D(q) = (1/(q-1)) \cdot \tau(q)$.

Альтернативным способом описания структуры самоподобной меры является вычислении функции $f(\alpha)$ – спектра сингулярностей мультифрактальной меры. $\alpha(q)$ -индекс. Спектр обобщенных фрактальных размерностей $D(q)$ связан со спектром сингулярностей $f(\alpha)$ преобразованием Лежандра:

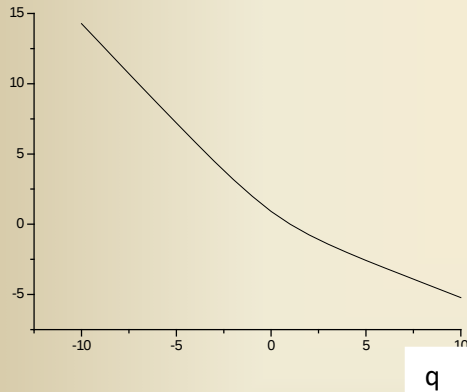
$$\alpha = (q-1) \cdot (d D(q) / d q); f(\alpha) = \alpha \cdot q + (1-q)D(q).$$

Необходимо отметить, что функция $\tau(q)$ не имеет экстремума. Экстремум функции $f(\alpha)$ совпадает с монофрактальной размерностью множества. Отметим, что предел $D(q_{min})$ совпадает с максимальным значением α , а $D(q_{max})$ - с минимальным.

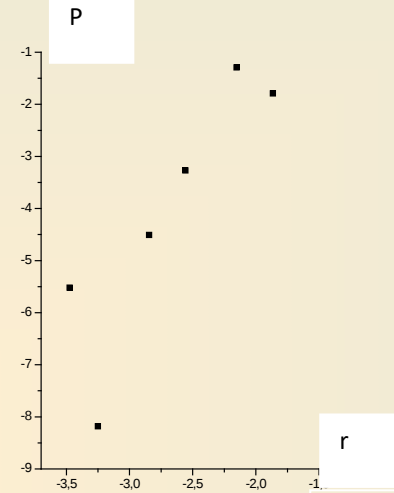
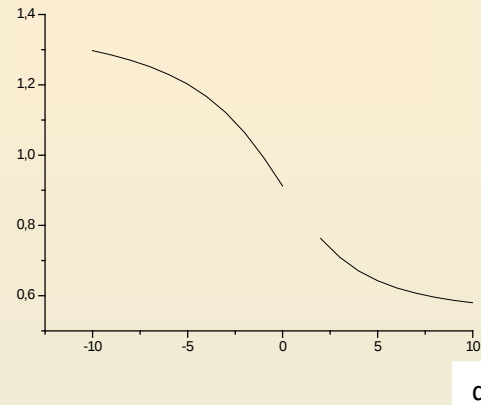
Вид шероховатости внутренней поверхности центра разрушения медного образца на наномасштабном уровне, подвергнутого импульсному воздействию лазерного излучения ; спектр времен ожиданий $t_{ож}$; показатель массы $\tau(q)$; обобщенная фрактальная размерность $D(q)$; спектр сингулярностей $f(\alpha)$



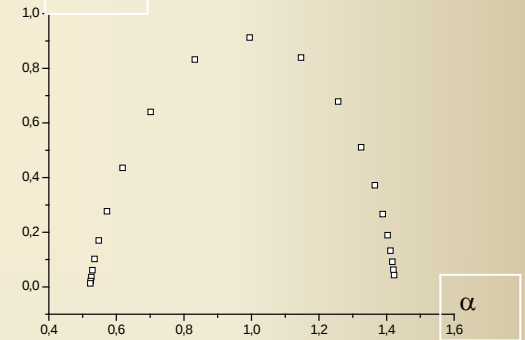
$\tau(q)$



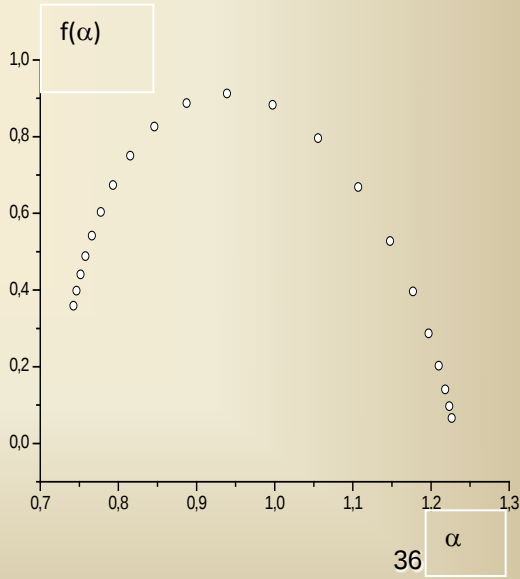
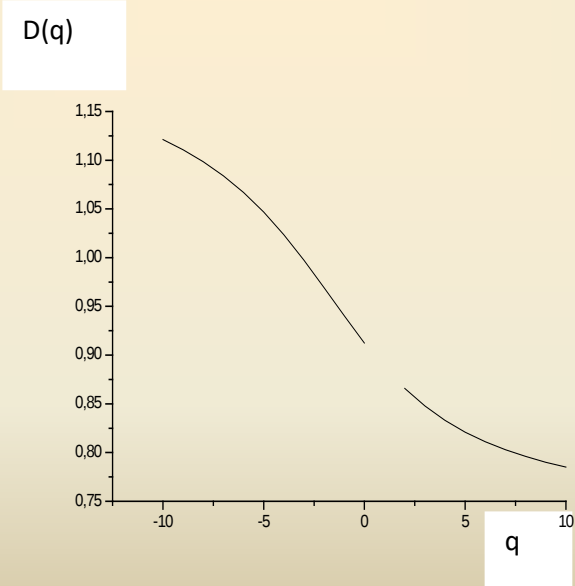
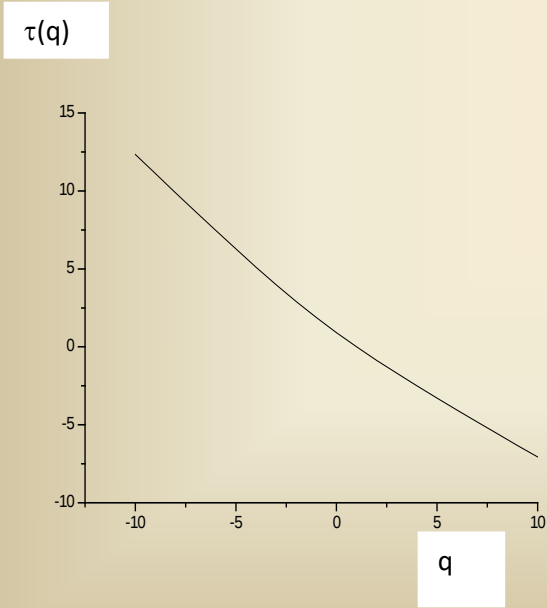
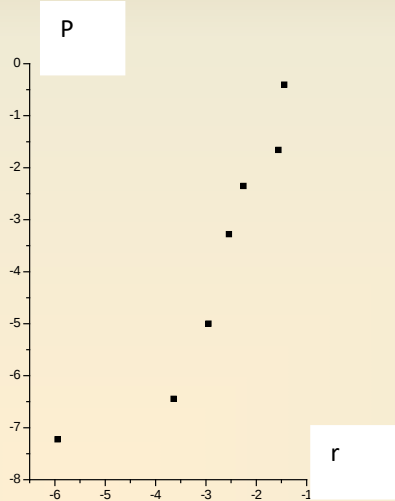
$D(q)$



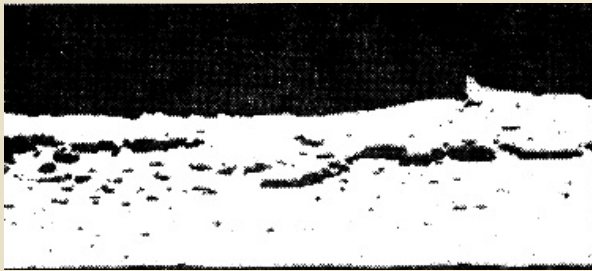
$f(\alpha)$



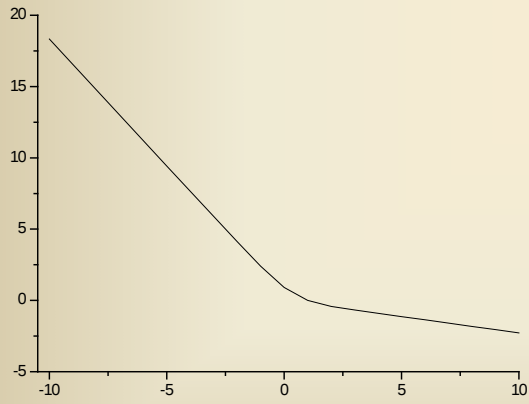
Шлиф медного образца ($\Delta \sim 0,5$ мм, $\times 500$) при воздействии релятивистских электронных пучков; спектр времен ожиданий $t_{ож}$; показатель массы $\tau(q)$; обобщенная фрактальная размерность $D(q)$; спектр сингулярностей $f(\alpha)$



Шлиф железного образца Fe ($\Delta \sim 0,4$ мм), перпендикулярный поверхности разрушения, после воздействия релятивистских электронных пучков; спектр времен ожиданий $t_{ож}$; показатель массы $\tau(q)$; обобщенная фрактальная размерность $D(q)$; спектр сингулярностей $f(\alpha)$

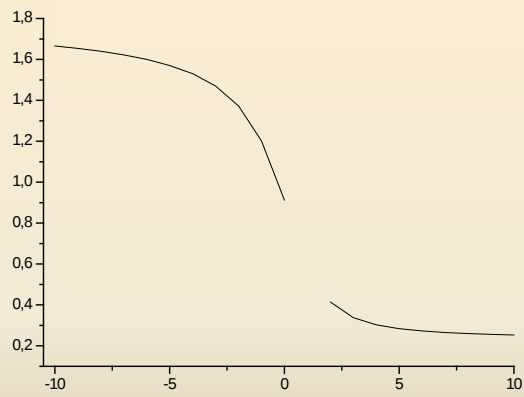


$\tau(q)$

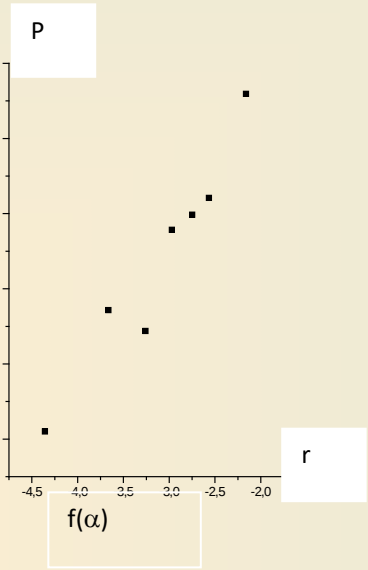


q

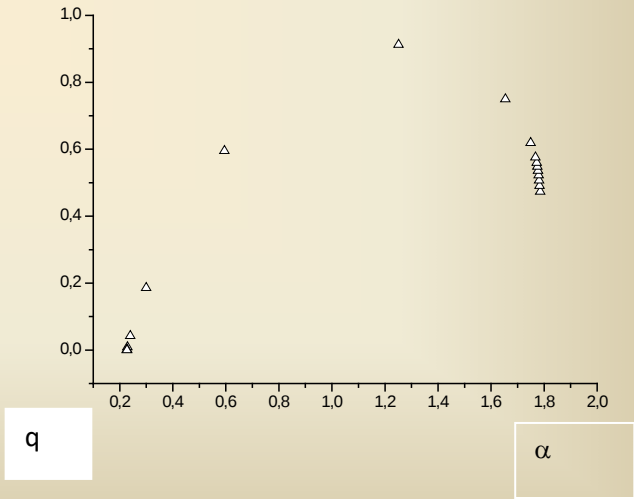
$D(q)$



q

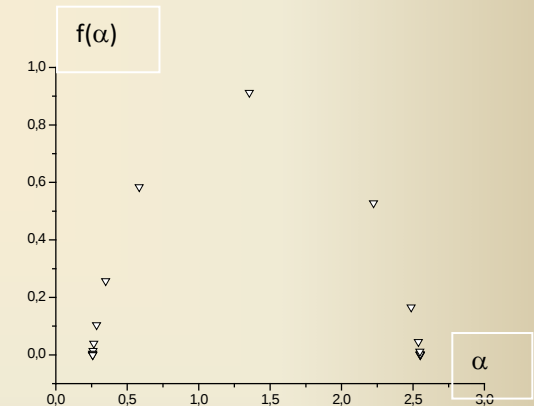
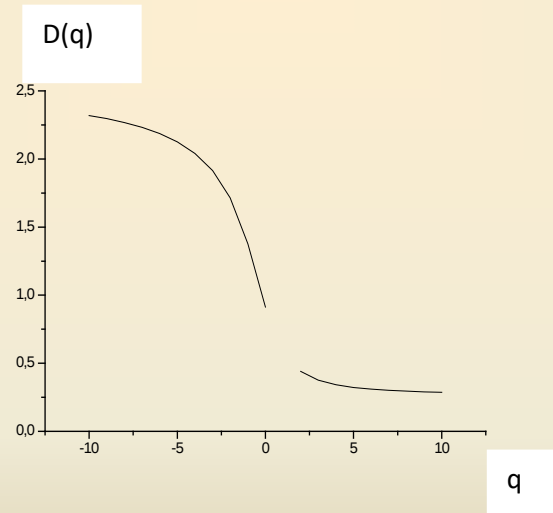
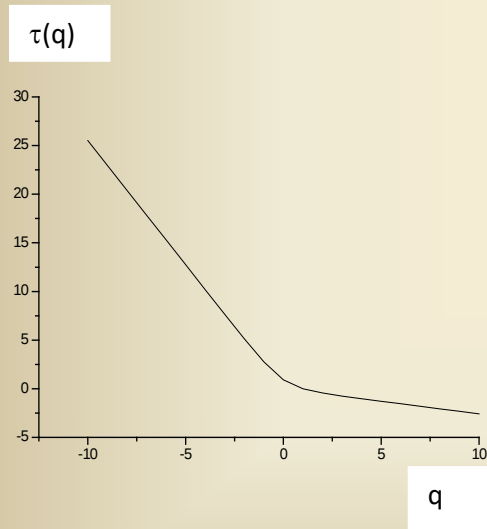
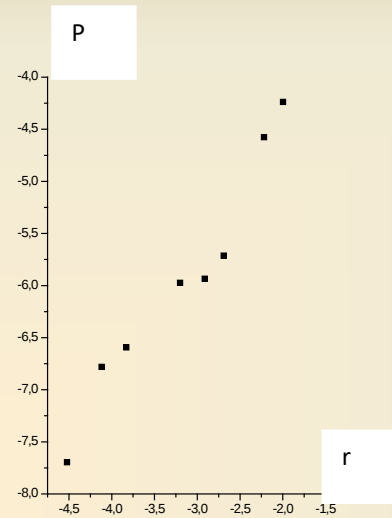
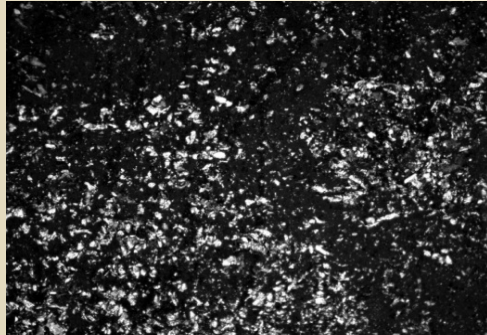


$f(\alpha)$

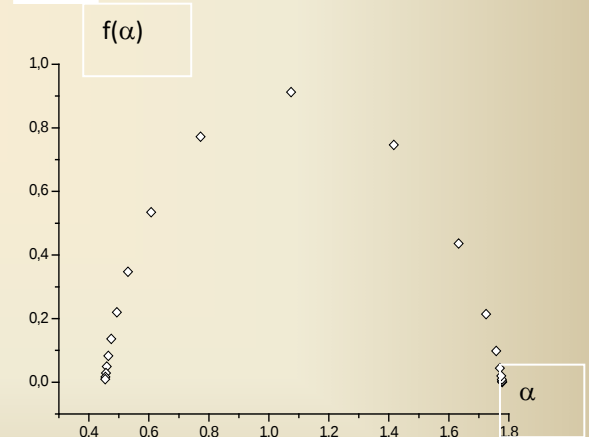
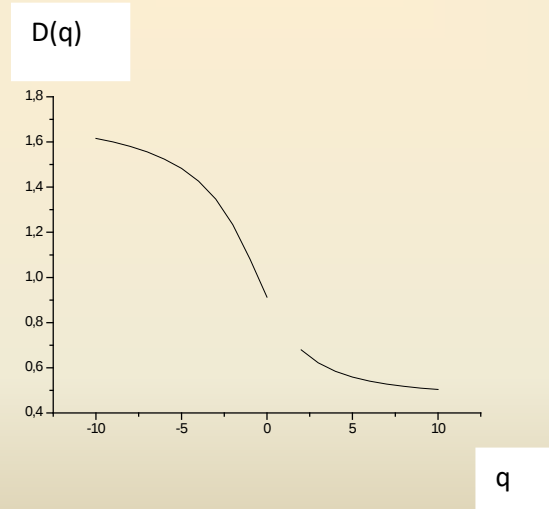
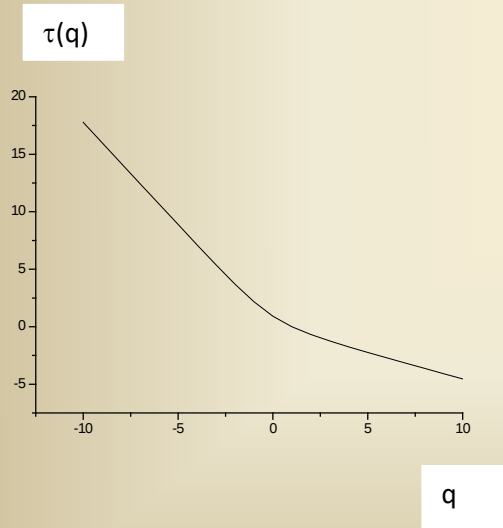
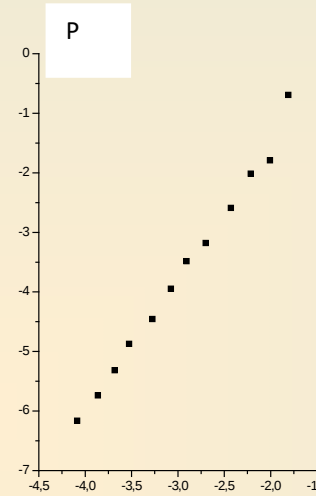
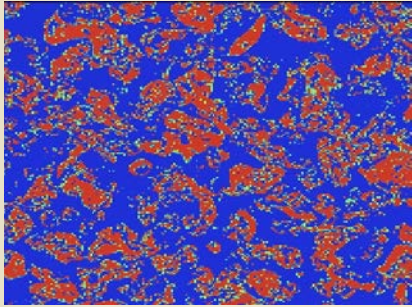


α

**Внешний вид диспергированных частиц из медной пирамидки ($\alpha \sim 60^\circ$)
 после воздействия релятивистских электронных пучков; спектр времен
 ожиданий $t_{ож}$; показатель массы $\tau(q)$; обобщенная фрактальная размерность
 $D(q)$; спектр сингулярностей $f(\alpha)$**



Изображение гравитационного турбулентного перемешивания двух несжимаемых жидкостей разной плотности, движущихся с постоянным ускорением; спектр времен ожиданий $t_{ож}$; показатель массы $\tau(q)$; обобщенная фрактальная размерность $D(q)$; спектр сингулярностей $f(\alpha)$



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе результатов расчетно-теоретических исследований с применением математического аппарата мультифрактального анализа показана аналогия статистического описания рассмотренных явлений: динамического разрушения, диспергирования, развитой турбулентности, которая заключается в том, что эти процессы обладают близкими значениями критических индексов, т. е. попадают в один класс универсальности.

В критических явлениях, когда степени свободы ведут себя взаимосвязано, поведение системы определяется фактором кооперативного поведения и природой степеней свободы – гидродинамических мод. Так в теории критических явлений возникло понятие универсальности – понятия, что при различных гамильтонианах взаимодействия возникает одинаковое критическое поведение неравновесных систем.

В работе рассмотрены количественные характеристики ряда неравновесных процессов и показано, что кинетика возникновения диссипативных структур на различных масштабно-временных уровнях обладает свойством последовательности событий, которые имеют статистически самоподобные распределения.

Спектр сингулярностей мультифрактальной меры, описывающий ряд времен ожиданий, является характеристикой рассмотренных нелинейных процессов. С физической точки зрения спектр сингулярностей $f(\alpha)$ можно рассматривать как количественную характеристику неравновесных систем, находящихся в процессе бифуркационных переходов.

Скейлинговые соотношения позволяют сформулировать прогностические признаки поведения динамических нелинейных систем по мере приближения к критическим точкам.

1. Кинетика динамического разрушения металлов в режиме импульсного объемного разогрева. Бонюшкин Е.К., Завада Н.И., Новиков С.А., Учаев А.Я. – Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ, 1998.
2. Пунин В.Т., Сельченкова Н.И., Учаев А.Я. Общие закономерности иерархических релаксационных процессов в металлах при воздействии импульсов проникающих излучений: монография - Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015.
3. Ильяев Р.И., Учаев А.Я., Новиков С.А., Сельченкова Н.И. Универсальные свойства металлов в явлении динамического разрушения // ДАН, 2002, том 384, № 3. - С. 328-333.
4. Ильяев Р.И., Пунин В.Т., Учаев А.Я., Новиков С.А., Сельченкова Н.И. Временные закономерности процесса динамического разрушения металлов, обусловленные иерархическими свойствами диссипативных структур – каскада центров разрушения // ДАН, 2003, том 393, № 3. - С. 326-331.
5. Учаев А.Я., Пунин В.Т., Сельченкова Н.И., Косачев В.В. О связи термодинамических и динамических свойств легких актинидов // Ядерная физика и инжиниринг, 2014, том 5, № 3. – С. 203-207.
6. Сельченкова Н.И., Учаев А.Я., Кошелева Е.В. Разрушение металлов при воздействии проникающих разрушений: курс лекций – Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2021. – 441 с., ил
7. N. I. Sel'chenkova and A. Ya. Uchaev On critical behavior of metals, actinides and plutonium metal on high-intensity exposure // Fiz. Atomn. Yad. (Physics of Atomic Nuclei), 2022, Vol. 85, No. 10, pp. 1744–1753. © Pleiades Publishing, Ltd., 2022.

8. Стаценко В.П., Янилкин Ю.В., Ребров С.В., Синькова О.Г., Стадник А.Л., Сельченкова Н.И., Учаев А.Я. Исследование характеристик турбулентности при прямом трёхмерном численном моделировании гравитационного перемешивания. // ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 2.- С.18-29.
9. N. I. Sel'chenkova and A. Ya. Uchaev Study of critical behavior of dynamic systems // Fiz. Atomn. Yad. (Physics of Atomic Nuclei), 2023, Vol. 86, No. 9, pp. 2076–2084. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023.
10. Динамические диссипативные процессы разрушения и диспергирования металлов, как аналоги критических явлений: монография / Сельченкова Н.И., Учаев А. Я. – Саратов: ФГПУ «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2023. – 442 с.
11. Исследование критического поведения динамических систем/ Н. И. Сельченкова, А. Я. Учаев в журнале // Ядерная физика и инжиниринг. 2024. том 15, № 1, с. 48–56
12. Подобие процессов динамического разрушения и развитой турбулентности / Н. И. Сельченкова, А. Я. Учаев // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2024. Вып. 2. С. 17-27.
13. Универсальные признаки явления динамического разрушения и турбулентности, обусловленные критическим поведением нелинейных систем / Н. И. Сельченкова, А. Я. Учаев // Ядерная физика и инжиниринг. 2024. том 15, № 6, с. 613–623
14. N. I. Sel'chenkova and A. Ya. Uchaeva Universal Features of Dynamic Failure and Turbulence Phenomena Caused by the Critical Behavior of Nonlinear Systems // Physics of Atomic Nuclei, 2024, Vol. 87, No. 10, pp. 1473–1482. © Pleiades Publishing, Ltd., 2024