

Система асимптотически точных уравнений для описания турбулентной газовой динамики с излучением

С. А. Серов

Забабахинские Научные Чтения 2025

Содержание доклада

- Рассматривая асимптотические разложения решения системы кинетических уравнений Больцмана для газовой смеси и решения кинетического уравнения распространения излучения в оптически толстой среде без рассеяния, мы получаем систему *асимптотически точных уравнений* для описания турбулентных течений газов с излучением.
- Для полученной системы уравнений энтропия в турбулентных течениях газов *только растёт*.
- Предложенное для использования в расчетах распространения излучения асимптотическое приближение имеет преимущество перед кинетическим приближением, связанное с усреднением групповых сечений.

Вывод системы кинетических уравнений Больцмана основан на гипотезе молекулярного хаоса (нем. *Stosszahlansatz*) и не зависит от того, какие газовые течения рассматриваются: ламинарные или турбулентные.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{c}_i} &= \sum_{j \in N} \iiint (f'_i f'_j - f_i f_j) g_{ij} b db d\epsilon d\mathbf{c}_j \\ &= \sum_{j \in N} \iint (f'_i f'_j - f_i f_j) k_{ij} d\mathbf{k} d\mathbf{c}_j \quad (i \in N); \end{aligned} \quad (1)$$

В подходе Струминского к асимптотическому решению системы уравнений Больцмана малыми предполагаются дифференциальные части уравнений Больцмана и интегралы столкновений частиц i -ой компоненты с частицами других компонент по сравнению с интегралом столкновений частиц i -ой компоненты между собой, поэтому в систему уравнений Больцмана индикатор малости λ вводится следующим образом:

$$\lambda \mathcal{D}_i f_i = -J_i(f_i, f) - \lambda \sum_{j \neq i} J_{ij}(f_i, f_j) \quad (i \in N). \quad (2)$$

Если в уравнении появился некоторый параметр λ , то решение уравнения будет зависеть от этого параметра, и можно рассмотреть вопрос об асимптотическом разложении решения при $\lambda \rightarrow 0$.

Запишем асимптотическое разложение функции распределения скоростей частиц i -ой компоненты f_i в виде ряда по степеням λ :

$$f_i = f_i^{(0)} + \lambda f_i^{(1)} + \lambda^2 f_i^{(2)} + \dots . \quad (3)$$

В соответствии с определениями плотности числа частиц n_i , средней скорости $\mathbf{u}_i$ и температуры T_i i -ой компоненты компоненты смеси:

$$n_i \stackrel{\text{def}}{=} \int f_i d\mathbf{c}_i, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_i n_i m_i \stackrel{\text{def}}{=} \int m_i \mathbf{c}_i f_i d\mathbf{c}_i, \quad (5)$$

$$\frac{3}{2} T_i n_i \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{1}{2} m_i (\mathbf{c}_i - \mathbf{u}_i)^2 f_i d\mathbf{c}_i; \quad (6)$$

вместе с асимптотическим разложением (3) рассмотрим асимптотические разложения для плотности числа частиц n_i

$$n_i = n_i^{(0)} + \lambda n_i^{(1)} + \lambda^2 n_i^{(2)} + \dots, \quad (7)$$

средней скорости u_i

$$u_i = u_i^{(0)} + \lambda u_i^{(1)} + \lambda^2 u_i^{(2)} + \dots \quad (8)$$

и температуры T_i

$$T_i = T_i^{(0)} + \lambda T_i^{(1)} + \lambda^2 T_i^{(2)} + \dots. \quad (9)$$

i -ых компонент смеси.

После несложных, но громоздких, преобразований получаем следующую систему уравнений многокомпонентной

неравновесной газовой динамики первого порядка малости в подходе Струминского:

$$\frac{\partial n_i^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot n_i^{(0)} \mathbf{u}_i^{(0)} \quad (i \in N), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} n_i^{(0)} m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}_i^{(0)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{J}_{p,ij}^{(0)} \\ = n_i^{(0)} \mathbf{X}_i - n_i^{(0)} m_i \mathbf{u}_i^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{u}_i^{(0)} \quad (i \in N), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}_i^{(0)} + \mathbf{p}_i^{(0)} : \frac{\partial \mathbf{u}_i^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j \neq i} J_{E,ij}^{(0)} \\ = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot E_i^{(0)} \mathbf{u}_i^{(0)} \quad (i \in N). \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, для оптически толстой среды введём малый параметр ε в кинетическое уравнение распространения излучения следующим образом:

$$\varepsilon l'_\nu \left(\frac{\partial}{c \partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \right) I_\nu = (I_{\nu P} - I_\nu) , \quad (13)$$

$$\frac{l'_\nu}{L} \rightarrow 0 . \quad (14)$$

Запишем асимптотическое разложение спектральной интенсивности излучения в виде формального ряда по степеням ε :

$$I_\nu = \varepsilon^0 I_\nu^{(0)} + \varepsilon I_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 I_\nu^{(2)} + \dots , \quad (15)$$

подставим этот степенной ряд в уравнение (13) и приравняем переменные коэффициенты при одинаковых степенях ε .

В результате получим следующую систему уравнений метода последовательных приближений:

$$I_{\nu}^{(0)} = I_{\nu P}, \quad (16a)$$

$$I_{\nu}^{(1)} = -l'_{\nu} \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \right) I_{\nu P}, \quad (16b)$$

$$\vdots$$

$$I_{\nu}^{(n)} = -l'_{\nu} \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \right) I_{\nu}^{(n-1)}. \quad (16c)$$

Из уравнений (15) и (16) в соответствии с общими определениями спектральной плотности энергии излучения

$$U_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} \int_{(4\pi)} I_\nu d\Omega \quad (17)$$

и спектрального потока энергии излучения

$$\mathbf{S}_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(4\pi)} I_\nu \mathbf{\Omega} d\Omega \quad (18)$$

получаем асимптотическое разложение спектральной плотности энергии излучения

$$U_\nu = \varepsilon^0 U_\nu^{(0)} + \varepsilon U_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 U_\nu^{(2)} + \dots, \quad (19)$$

где, в частности,

$$U_\nu^{(0)} = \frac{4\pi}{c} I_{\nu P} = U_{\nu P} \quad (20)$$

– равновесная спектральная плотность энергии излучения,

$$U_\nu^{(1)} = -l'_\nu \frac{\partial U_{\nu P}}{c \partial t}, \quad (21)$$

и асимптотическое разложение спектрального потока энергии излучения

$$\mathbf{S}_\nu = \varepsilon^0 \mathbf{S}_\nu^{(0)} + \varepsilon \mathbf{S}_\nu^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{S}_\nu^{(2)} + \dots, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{S}_\nu^{(0)} = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_\nu^{(1)} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_{\nu P} = -\frac{c}{3} l'_\nu \nabla U_\nu^{(0)}. \quad (24)$$

Для полученной системы уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики энтропия в турбулентных течениях газов *только растёт*. Это следует из выведенного нами уравнения изменения энтропии в газовой смеси.

Уравнение изменения энтропии газа, течение которого описывается системой газодинамических уравнений (10)-(12) довольно просто может быть получено из статистического уравнения изменения энтропии. Поскольку статистическое уравнение изменения энтропии

$$dE = TdS - PdV, \quad (25)$$

относится к определённому количеству вещества, введём новые переменные: удельный объём (объём единицы массы) i -ой компоненты газа

$$V_i = \frac{1}{\rho_i} \quad (26)$$

и удельную внутреннюю энергию (внутреннюю энергию единицы массы) i -ой компоненты газа

$$\epsilon_i = \frac{E_i}{\rho_i} = E_i V_i. \quad (27)$$

Будем рассматривать «лагранжевые» производные по времени этих величин (производные по времени вдоль траектории движения единицы массы газа)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_i^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (28)$$

Уравнения (10), (12) тогда можно переписать в следующем виде:

$$\frac{DV_i^{(0)}}{Dt} = V_i^{(0)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_i^{(0)} \quad (i \in N), \quad (29)$$

$$\frac{D\epsilon_i^{(0)}}{Dt} = -V_i^{(0)} \sum_{j \neq i} J_{E,ij}^{(0)} - p_i^{(0)} \frac{DV_i^{(0)}}{Dt} \quad (i \in N). \quad (30)$$

Сравнивая уравнение (30) с уравнением (25) получаем уравнение изменения энтропии единицы массы i -ой компоненты газовой смеси:

$$\frac{DS_i^{(0)}}{Dt} = -\frac{V_i^{(0)}}{T_i^{(0)}} \sum_{j \neq i} J_{E,ij}^{(0)} \quad (i \in N). \quad (31)$$

Если течение газовой смеси описывается системой газодинамических уравнений первого порядка малости теории Энского-Чепмена, то вместо уравнения (31) аналогично получаем уравнение

$$\frac{D\hat{S}^{(0)}}{Dt} = 0. \quad (32)$$

Предложенное для использования в расчётах распространения излучения асимптотическое приближение первого порядка помимо простоты программной реализации имеет преимущество перед кинетическим приближением, связанное с усреднением групповых сечений.

Чтобы перейти от спектральных характеристик излучения к интегральным, фотоны разбиваются на m групп по принадлежности их частоты к интервалам:

$(0, \nu_1), [\nu_1, \nu_2), \dots, [\nu_{m-1}, \nu_{\max}]$ (предполагается, что суммарной энергией световых квантов с частотой $\nu > \nu_{\max}$ для оптически толстой среды можно пренебречь), и интегрирование

по частоте излучения на интервале $[0, +\infty)$ заменяется на суммирование групповых величин

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} I_{\nu P} d\nu = I_{iP}, \quad (33a)$$

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu = \frac{dI_{iP}}{dT}, \quad (33b)$$

$$\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} l'_\nu \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu = \frac{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} l'_\nu \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu}{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \frac{dI_{\nu P}}{dT} d\nu} \frac{dI_{iP}}{dT} = l'_{iR} \frac{dI_{iP}}{dT}, \quad (33c)$$

с коэффициентами, возможно, включающими частные производные от температуры по времени и пространственным координатам. В уравнении (33c) l_{iR} — усредненные по Росселанду групповые пробеги излучения. Важно отметить, что при использовании их в асимптотическом приближении 1-ого порядка, ошибка усреднения равна нулю, уравнения (33) — это,

просто, определения групповых величин (для асимптотических приближений второго и более высоких порядков это, к сожалению, уже не верно). Поэтому число групп можно свести к минимуму: 2–3 группы, только чтобы образовывался носик у тепловых волн. Образование носика у тепловых волн аналогично размытию фронта ударных волн при применении искусственной вязкости в газодинамических расчетах. Помимо усредненных по Росселанду групповых пробегов излучения в диффузионном и кинетическом приближениях используются планковские пробеги излучения:

$$l'_{iP} = \frac{1}{\kappa'_{iP}} = \frac{I_{iP}}{\int_{\nu_{i-1}}^{\nu_i} \kappa'_\nu I_{\nu P} d\nu} \quad (i = 1 \dots m). \quad (34)$$

Структура кинетического уравнения (13) и полученного из него интегрированием по углам первого уравнения диффузионного приближения такова, что использование и росселандовых, и

планковских групповых пробегов приводит к ошибке усреднения. Неясно даже, какие пробеги рекомендовать к использованию, при том, что одnogрупповые росселандовы и планковские пробеги могут отличаться почти в восемь раз. Уменьшить ошибку усреднения можно только увеличивая число групп, но при этом значительно увеличивается сложность (время) расчетов.

-  Д. Гильберт, *Основы общей теории линейных интегральных уравнений*, Избранные труды, Т. 2 (Факториал, Москва, 1998).
-  D. Enskog, in *Kinetic Theory*, Vol. 3, edited by S. Brush (Pergamon Press, New York, 1972) [originally: Kungl. Svenska Vetenskaps Akad. Handl. 63, No. 4 (1921)].
-  С. Чепмен и Т. Каулинг, *Математическая теория неоднородных газов* (ИЛ, Москва, 1960).
-  В. В. Струминский, ПММ, **38**, 203-210 (1974).
-  Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2012).

-  Н. Бурбаки, *Элементы математики. Книга IV. Функции действительного переменного* (Наука, Москва, 1965).
-  S. A. Serov, S. S. Serova, Journal of Applied Mathematics and Physics 4(08), 1687-1697 (2016).
-  S. A. Serov, S. S. Serova, Astronomy Reports, 2023, Vol. 67, No. 12, pp. 1462–1472. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023.
Russian Text © The Author(s), 2023, published in
Astronomicheskii Zhurnal, 2023, Vol. 100, No. 12, pp.
1332–1342.