Адаптивное изменение параметра пространственного разрешения в подходе к описанию турбулентных течений на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса

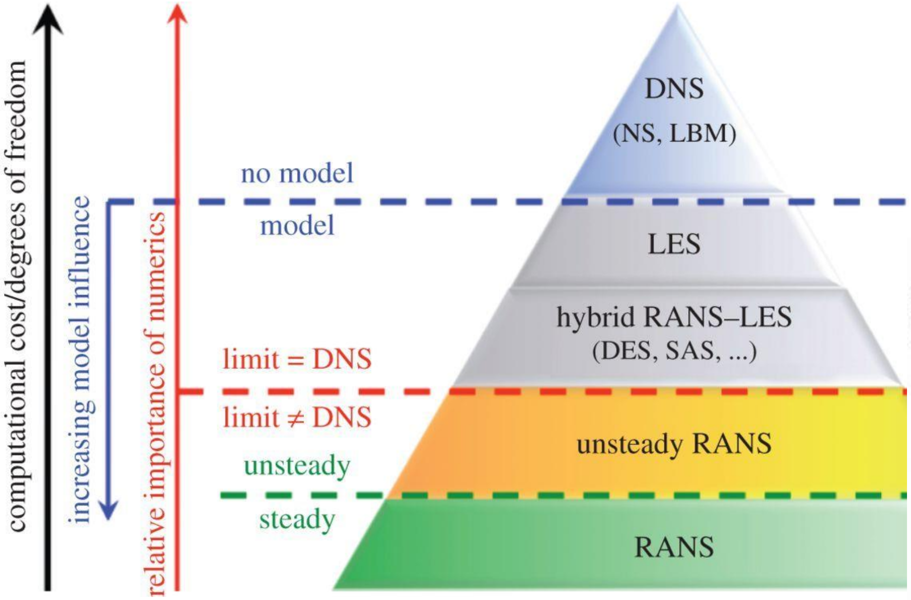
П.А. Кучугов

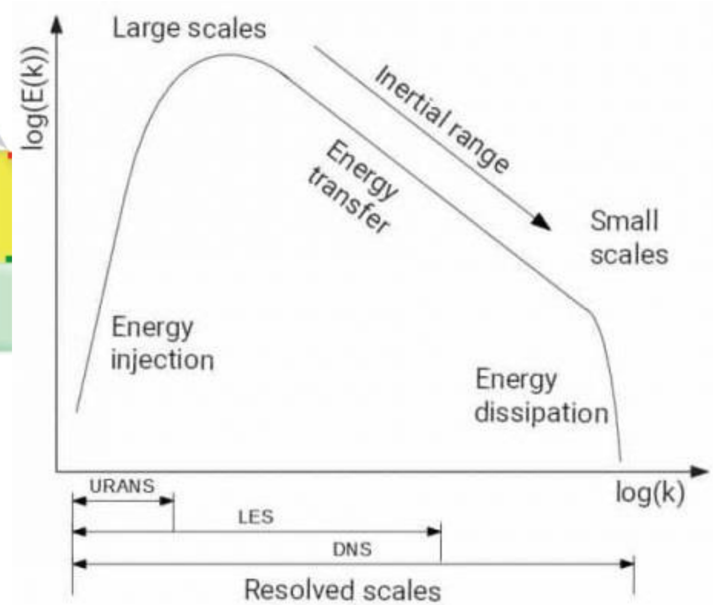
ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

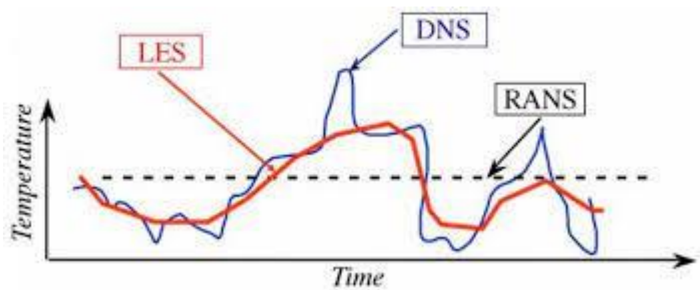
XVII Международная конференция «Забабахинские научные чтения»

г. Снежинск, Челябинская обл., РФ,
19 - 23 мая 2025

Подходы к моделированию турбулентности







Deck S., Gand F., Brunet V. et al., High-fidelity simulations of unsteady civil aircraft aerodynamics: stakes and perspectives. Application of zonal detached eddy simulations, Phil. Trans. R. Soc. A, 372, 20130325, 2014, [doi: 10.1098/rsta.2013.0325](https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0325).

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

$$f = \langle f\rangle + f', \quad \{f\} = \langle \rho f\rangle / \langle \rho\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\rangle = \frac{\partial\langle f\rangle}{\partial x_i}, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \frac{\partial\langle f\rangle}{\partial t}, \quad \langle f+g\rangle = \langle f\rangle + \langle g\rangle, \quad \langle \alpha f\rangle = \alpha\langle f\rangle$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\{v_i\}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\{v_i\}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\{v_i\}\{v_j\} + \langle p\rangle\delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial\langle\sigma_{ij}\rangle}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j)\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle\{E\}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\{E\}\{v_i\} + \langle p\rangle\{v_i\}\right) = \\ = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\{v_j\}\langle\sigma_{ij}\rangle - \langle q_i\rangle\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_i, H) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\{v_k\}\tau_1(v_k, v_i)\right) + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{2}\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_k, v_k)\right) \\ p \approx p(\langle\rho\rangle, \{\varepsilon\}) \\ \langle\rho\rangle\{E\} = \langle\rho\rangle\left(\{\varepsilon\} + \dfrac{1}{2}\{v_k\}\{v_k\}\right) + \langle\rho\rangle\dfrac{1}{2}\tau_1(v_k, v_k) \end{cases}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса

$$f = \langle f \rangle + f', \quad \{f\} = \langle \rho f \rangle / \langle \rho \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial x_i}, \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t}, \quad \langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle, \quad \langle \alpha f \rangle = \alpha \langle f \rangle$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\langle \rho \rangle \{v_i\}) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\langle \rho \rangle \{v_i\}) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle \rho \rangle \{v_i\}\{v_j\} + \langle p \rangle \delta_{ij}\right) = \dfrac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \dfrac{\partial}{\partial x_j} \boxed{\left(\langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_j)\right)} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\langle \rho \rangle \{E\}) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\langle \rho \rangle \{E\}\{v_i\} + \langle p \rangle \{v_i\}) = \\ = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\{v_j\}\langle \sigma_{ij} \rangle - \langle q_i \rangle\right) - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\tau_2(v_i, H)} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\left(\langle \rho \rangle \{v_k\} \tau_1(v_k, v_i)\right)} + \\ + \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\tau_2(v_j, \sigma_{ij})} - \dfrac{\partial}{\partial x_i} \boxed{\left(\dfrac{1}{2} \langle \rho \rangle \tau_1(v_i, v_k, v_k)\right)} \\ p \approx p(\langle \rho \rangle, \{\varepsilon\}) \\ \langle \rho \rangle \{E\} = \langle \rho \rangle \left(\{\varepsilon\} + \dfrac{1}{2}\{v_k\}\{v_k\}\right) + \langle \rho \rangle \dfrac{1}{2} \tau_1(v_k, v_k) \end{cases}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: выражения для корреляционных моментов

$$\tau_1(f,g) = \{fg\} - \{f\}\{g\}$$

$$\tau_2(f,g) = \langle fg \rangle - \{f\}\langle g \rangle$$

$$\tau_1(f,g,h) = \{fgh\} - \{f\}\tau_1(g,h) - \{g\}\tau_1(f,h) - \{h\}\tau_1(f,g) - \{f\}\{g\}\{h\}$$

$$\dots$$

возможно введение и других моментов

Germano M., Turbulence: the filtering approach, J. Fluid Mech., 238, 325-336, 1992, doi: 10.1017/S0022112092001733.

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$-\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j) = 2\mu_u\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\{v_j\}}{\partial x_i} + \frac{\partial\{v_i\}}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\{v_k\}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{2}{3}k_u\delta_{ij}$$

$$\tau_2(v_i, H) \approx -C_p\frac{\mu_u}{Pr_t}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_i}$$

$$\langle q_i\rangle = -C_p\frac{\mu}{Pr}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_i}$$

$$\tau_2(v_j, \sigma_{ij}) - \frac{1}{2}\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_k, v_k) \approx \left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle k_u\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle k_u\{v_i\}\right) = P_{ku} - \langle\rho\rangle\varepsilon_u + T_{ku} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\langle\rho\rangle \varepsilon_u\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle \varepsilon_u\{v_i\}\right) = C^*_{1\varepsilon}P_{ku}\dfrac{\varepsilon_u}{k_u} - C^*_{2\varepsilon}\dfrac{\langle\rho\rangle\varepsilon_u^2}{k_u} + T_{\varepsilon u} \end{cases}$$

$$\mu_u = \langle\rho\rangle C_{\mu u}\, {k_u^2}/{\varepsilon_u}$$

$$P_{ku} = -\langle\rho\rangle\tau_1\left(v_i, v_j\right)\frac{\partial\{v_j\}}{\partial x_i}$$

$$T_{ku} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{ku}}\right)\frac{\partial k_u}{\partial x_i}\right) \qquad T_{\varepsilon u} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\langle\mu\rangle + \frac{\mu_u}{\sigma_{\varepsilon u}}\right)\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial x_i}\right)$$

$$\boxed{f_k = \frac{k_u}{k} \qquad f_\varepsilon = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon}}$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$\frac{Dk_u}{Dt} = \frac{\partial k_u}{\partial t} + \{v_i\}\frac{\partial k_u}{\partial x_i} = f_k \frac{Dk}{Dt} + \frac{P_f}{\langle\rho\rangle}$$

$$\boxed{P_f = \langle\rho\rangle \frac{k_u}{f_k}\frac{Df_k}{Dt}}$$

$$\langle\rho\rangle \frac{Dk_u}{Dt} = P_{ku} + P_f - \langle\rho\rangle\varepsilon_u + T_{ku} = f_k f_\rho (P_k - \bar{\rho}\varepsilon + T_k) + P_f + (\{v_i\} - \widehat{v_i})\frac{\partial k}{\partial x_i}$$

При дополнительном предположении, что $\{v_i\} - \widehat{v_i} = 0$, можно получить

$$C_{1\varepsilon}^* = C_{1\varepsilon} \ , \ C_{2\varepsilon}^* = C_{1\varepsilon} + \frac{f_k}{f_\varepsilon}(C_{2\varepsilon} - C_{1\varepsilon})$$

$$\sigma_{ku} = \frac{f_k^2}{f_\varepsilon}\sigma_k \ , \ \sigma_{\varepsilon u} = \frac{f_k^2}{f_\varepsilon}\sigma_\varepsilon$$

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса: замыкающие соотношения

$$\langle\rho\rangle\frac{D\{v_i\}}{Dt} = -\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial\langle\sigma_{ij}\rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j)\right) - R_i$$

$$\langle\rho\rangle\frac{DQ}{Dt} = -\{v_i\}\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial x_i} + \{v_i\}\frac{\partial\langle\sigma_{ij}\rangle}{\partial x_j} - \{v_i\}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i, v_j)\right) - \{v_i\}R_i\ , \quad Q = \frac{1}{2}\{v_i\}\{v_i\}$$

$$R_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu_f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\{v_i\}}{\partial x_j} + \frac{\partial\{v_j\}}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial\{v_k\}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu_f A_{ij}\right)$$

$$P_f = \{v_i\}R_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu_f\{v_i\}A_{ij}\right) + 2\mu_f A_{ij}\frac{\partial\{v_i\}}{\partial x_j}\ , \quad \boxed{\mu_f = P_f \Big/ \left(2A_{ij}\frac{\partial\{v_i\}}{\partial x_j}\right)}$$

Wallin S., Girimaji S., Commutation error mitigation in variable-resolution PANS closure: Proof of concept in decaying isotropic turbulence, 6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011, doi: 10.2514/6.2011-3105.

Girimaji S. S., Wallin S., Closure modeling in bridging regions of variable resolution (VR) turbulence computations, Journal of Turbulence, 14, 1, 72–98, 2013, doi: 10.1080/14685248.2012.754893.

Частично усреднённые уравнения Навье-Стокса с учётом изменения параметра f_k

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\langle\rho\rangle\{v_i\})=0\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle\{v_i\})+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\{v_i\}\{v_j\}+\langle p\rangle\delta_{ij}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\sigma_{ij}\rangle+\boldsymbol{2\mu_f A_{ij}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,v_j)\right)\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle\{E\})+\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\langle\rho\rangle\{E\}\{v_i\}+\langle p\rangle\{v_i\})=\\[2ex]
=\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\{v_j\}\left(\langle\sigma_{ij}\rangle+\boldsymbol{2\mu_f A_{ij}}\right)-\langle q_i\rangle\right)-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_i,H)-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle\rho\rangle\{v_k\}\tau_1(v_k,v_i)\right)+\\[2ex]
+\dfrac{\partial}{\partial x_i}\tau_2(v_j,\sigma_{ij})-\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{1}{2}\langle\rho\rangle\tau_1(v_i,v_k,v_k)\right)\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle k_u)+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\langle\rho\rangle k_u\{v_i\})=P_{ku}+\boldsymbol{P_f}-\langle\rho\rangle\varepsilon_u+T_{ku}\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle\varepsilon_u)+\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\langle\rho\rangle\varepsilon_u\{v_i\})=C_{1\varepsilon}^{*}P_{ku}\dfrac{\varepsilon_u}{k_u}-C_{2\varepsilon}^{*}\dfrac{\langle\rho\rangle\varepsilon_u^2}{k_u}+T_{\varepsilon u}
\end{cases}
$$

Численное решение системы частично усреднённых уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^a}{\partial x_i} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_i^t}{\partial x_i} + \boldsymbol{S}$$

- Линейная аппроксимация консервативных величин на грани ячеек с использованием TVD ограничителей

- Точное (итерационное) или приближённое (HLLC) решение задачи о распаде разрыва на гранях ячеек

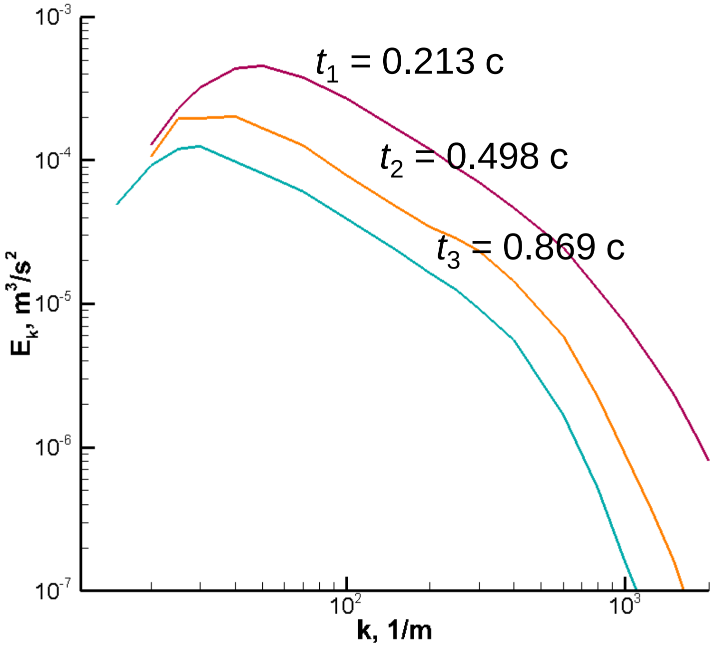
- Интегрирование по времени: РК3

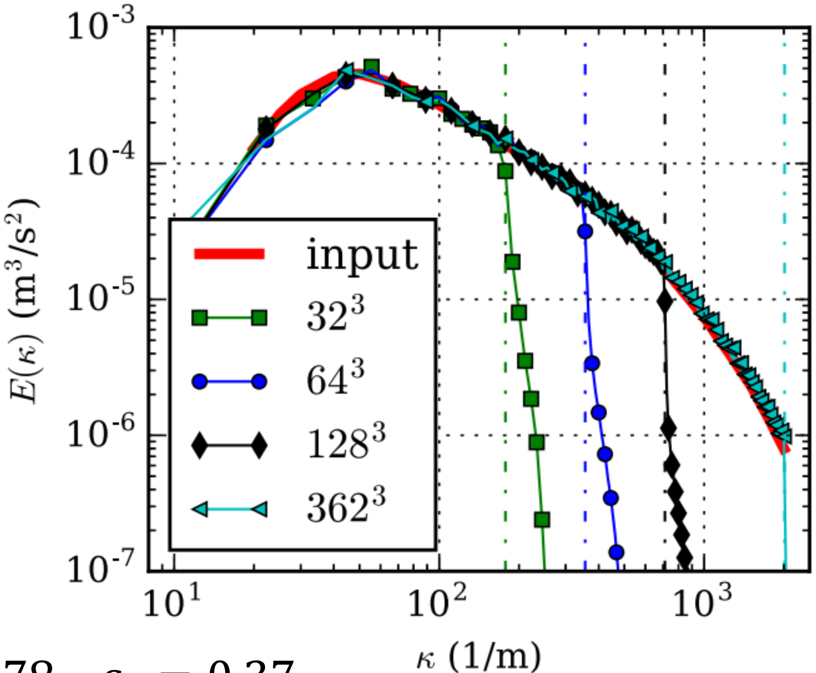
- Явно-неявное интегрирование по времени подсистемы с источником

Реализовано в программном комплексе NUT3D

Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П., Разносные схемы газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова, Мат. модел., 7, 5, 15-25, 1995.

Затухание однородной изотропной турбулентности: постановка задачи



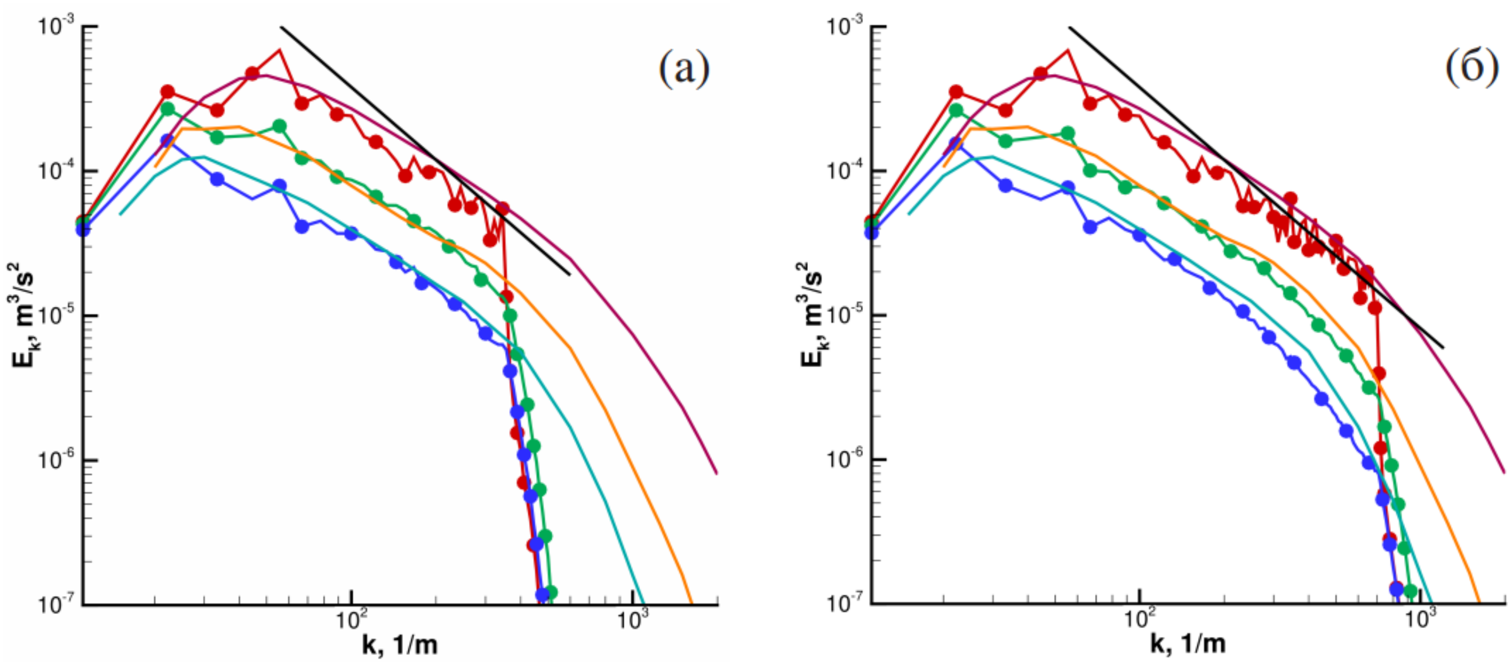


$$k_0 = 0.078\ ,\ \varepsilon_0 = 0.37$$

Comte-Bellot G., Corrsin S., The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence, J. Fluid Mech., 25, 4, 657-682, 1966, doi: 10.1017/S0022112066000338.

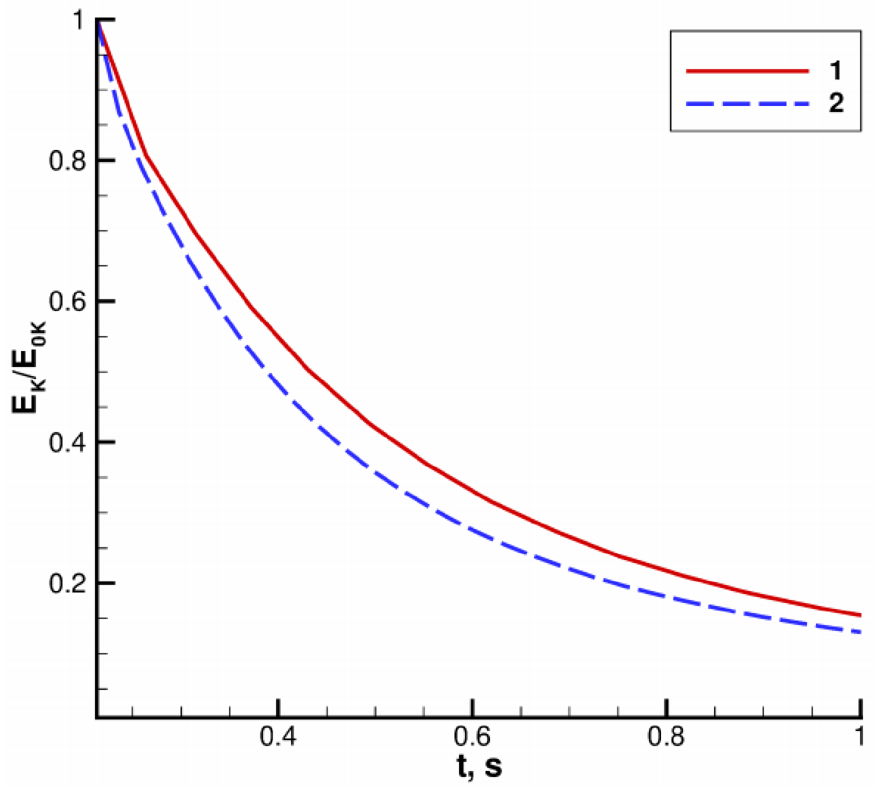
Saad T., Cline D., Stoll R., Sutherland J. C. Scalable Tools for Generating Synthetic Isotropic Turbulence with Arbitrary Spectra, AIAA Journal, 55, 1, 327–331, 2017, doi: 10.2514/1.J055230.

Затухание однородной изотропной турбулентности: неявный метод крупных вихрей



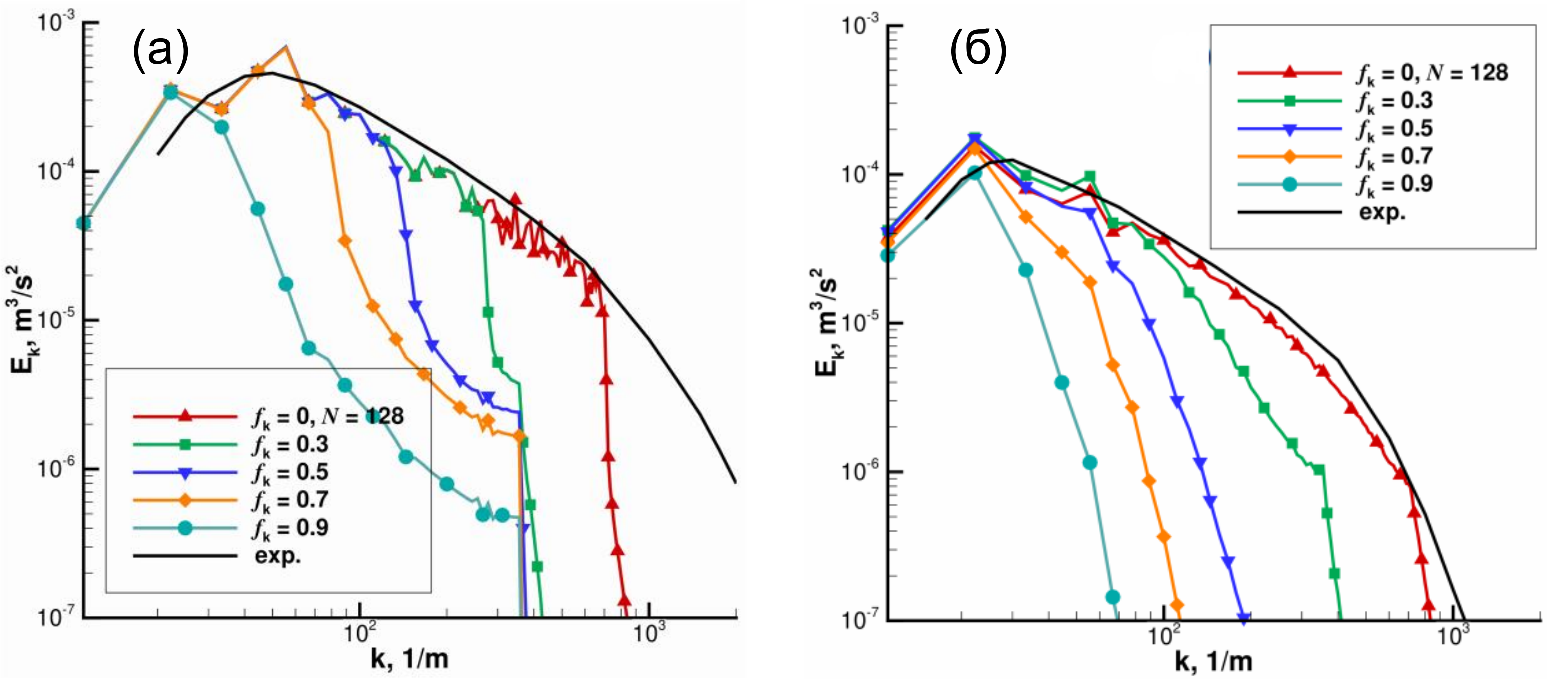
Спектральная плотность турбулентных пульсаций в различные моменты времени: (а) $N = 64$, (б) $N = 128$. Кривые с маркерами соответствуют численным данным, без маркеров – экспериментальным. Сплошная кривая соответствует колмогоровскому спектру с константой $C_K = 1.37$ и экспериментальным значением скорости диссипации ТКЭ $\epsilon_0 = 0.474$ м^2/с^3.

Затухание однородной изотропной турбулентности:
неявный метод крупных вихрей



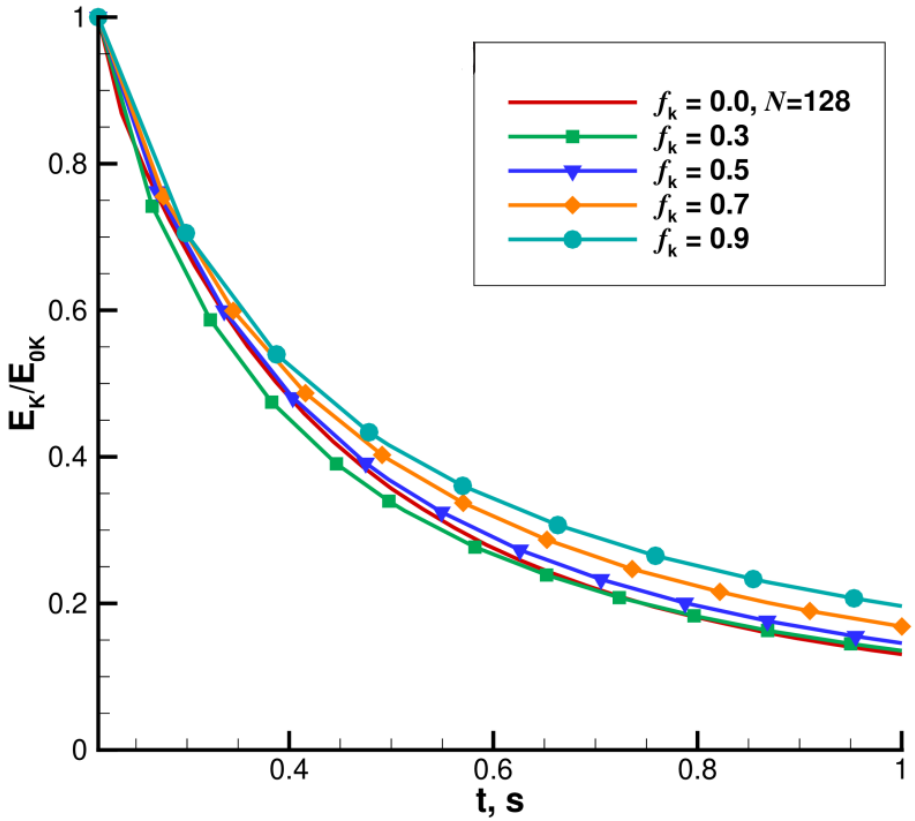
Зависимость нормированной полной кинетической энергии от времени:
1 – N = 64, 2 – N = 128.

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, постоянное значение f_k



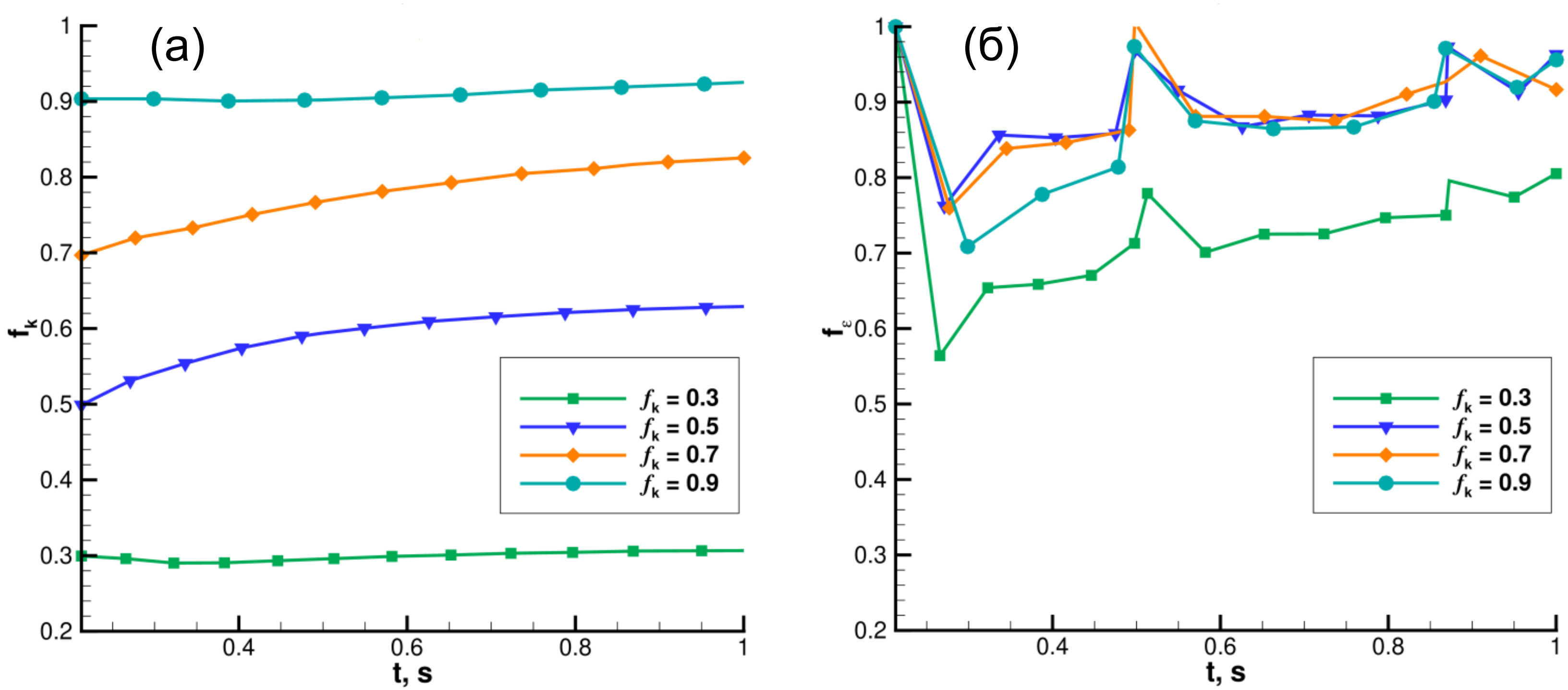
Спектральная плотность турбулентных пульсаций (а) в начальный момент времени, (б) в момент времени t_3 = 0.869 с при различных постоянных значениях параметра f_k.

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, постоянное значение f_k



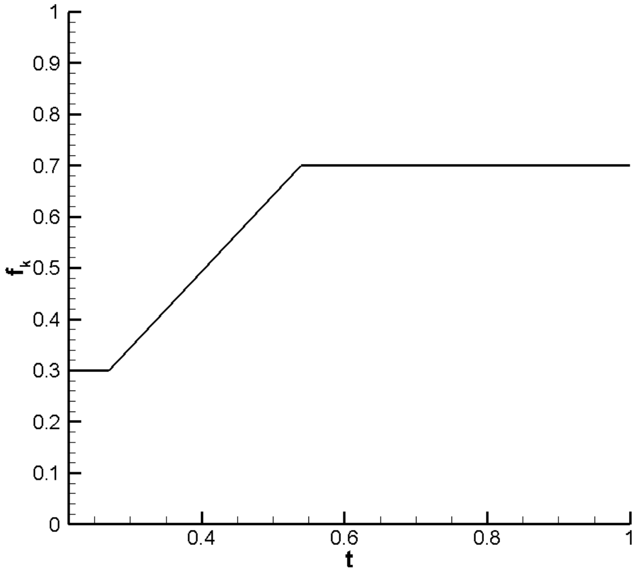
Зависимость нормированной полной кинетической энергии от времени при различных значениях параметра f_k.

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, постоянное значение f_k



Зависимость от времени рассчитанных значений f_k и f_ε.

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, переменное значение f_k

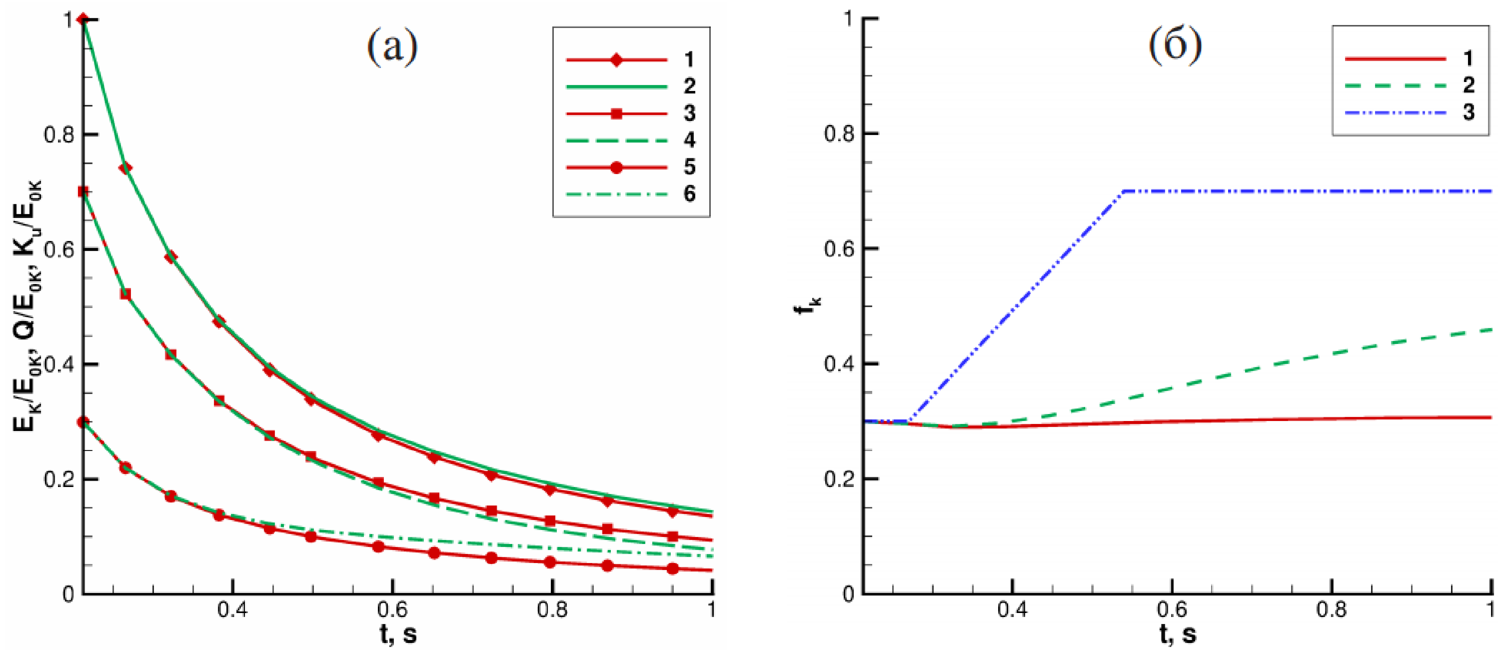


I. $P_f = 0,\ \mu_f = 0$

II. $P_f \neq 0,\ \mu_f = 0$

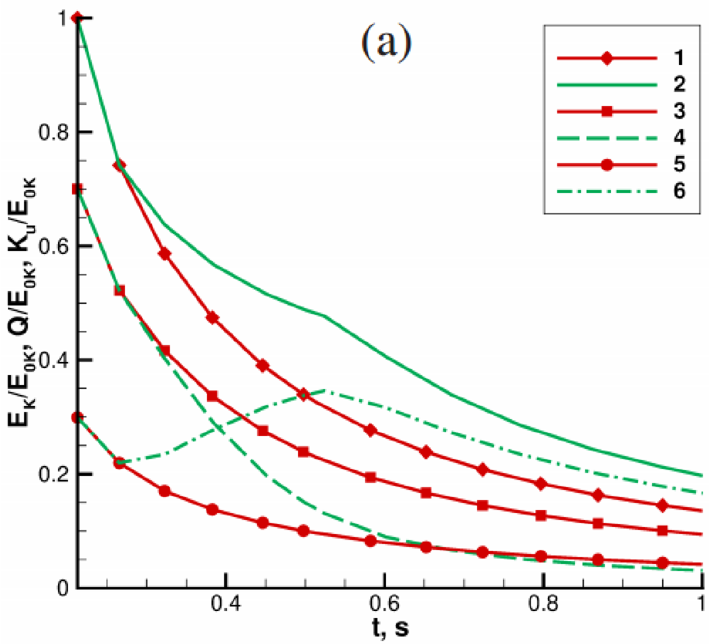
III. $P_f \neq 0,\ \mu_f \neq 0$

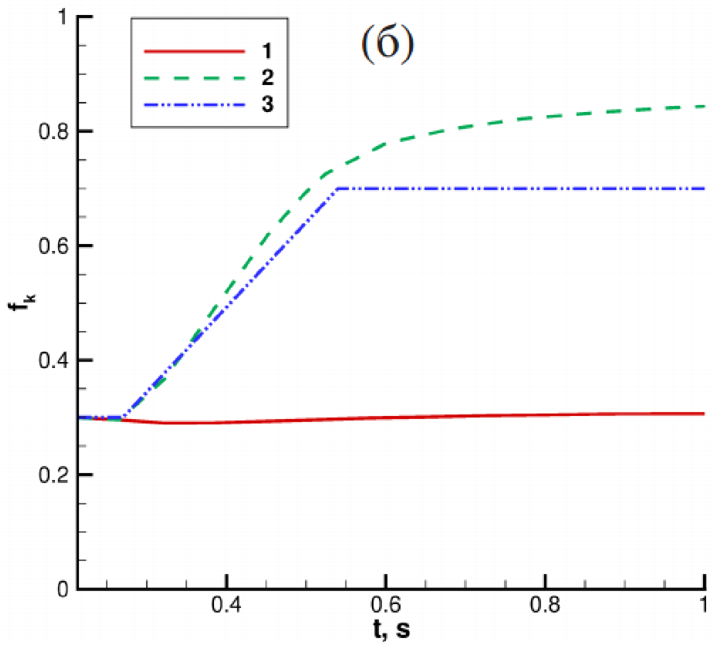
Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, переменное значение f_k



Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта в первом варианте (**$P_f = 0$, $\mu_f = 0$**).

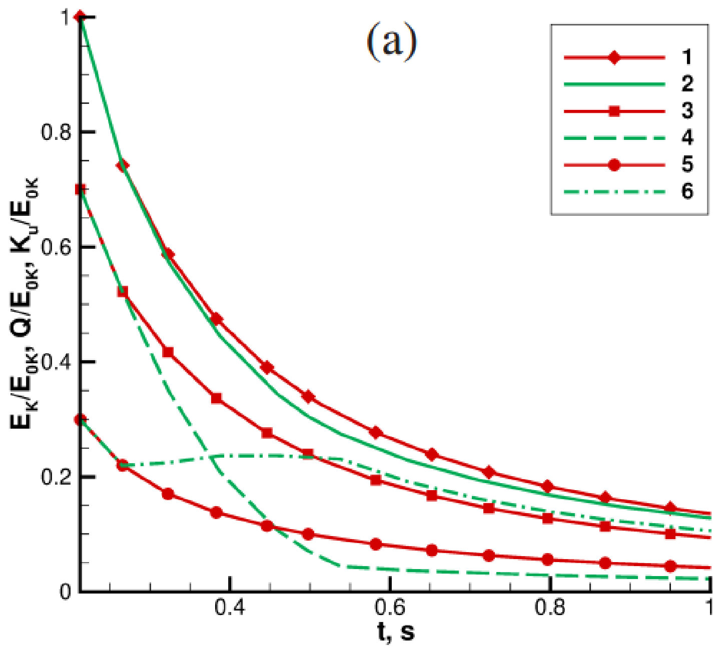
Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, переменное значение f_k

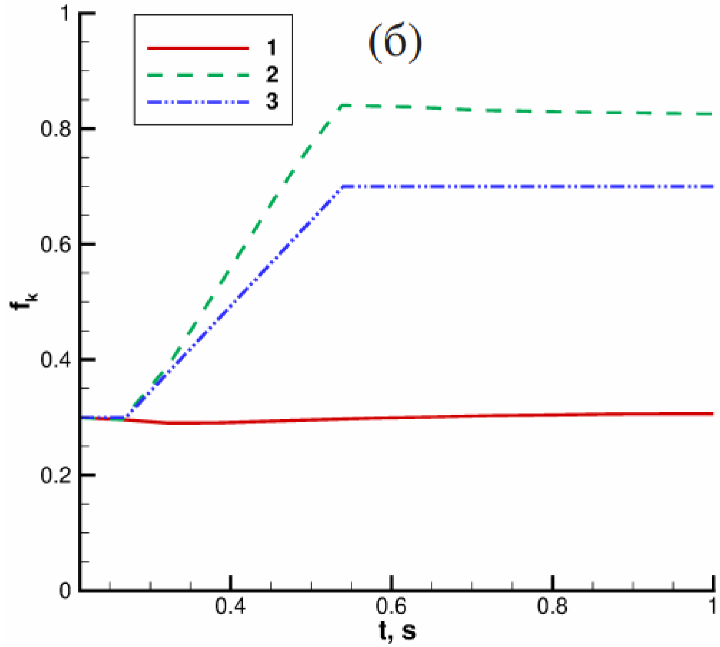




Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта во втором варианте (**$P_f \neq 0$, $\mu_f = 0$**).

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, переменное значение f_k





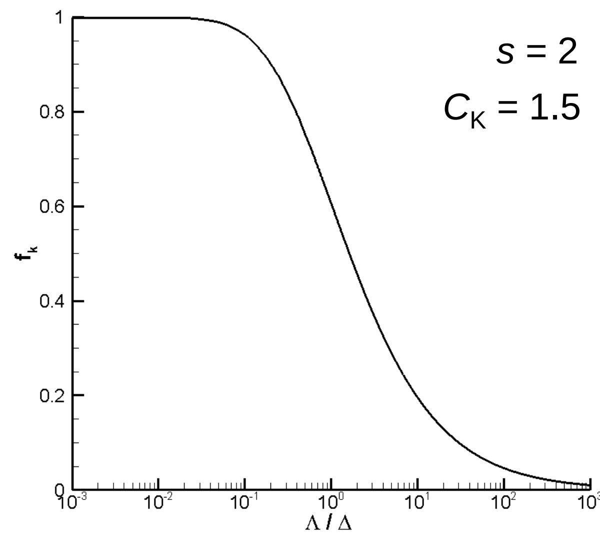
Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта в третьем варианте (**$P_f \neq 0$, $\mu_f \neq 0$**).

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, адаптивное значение f_k

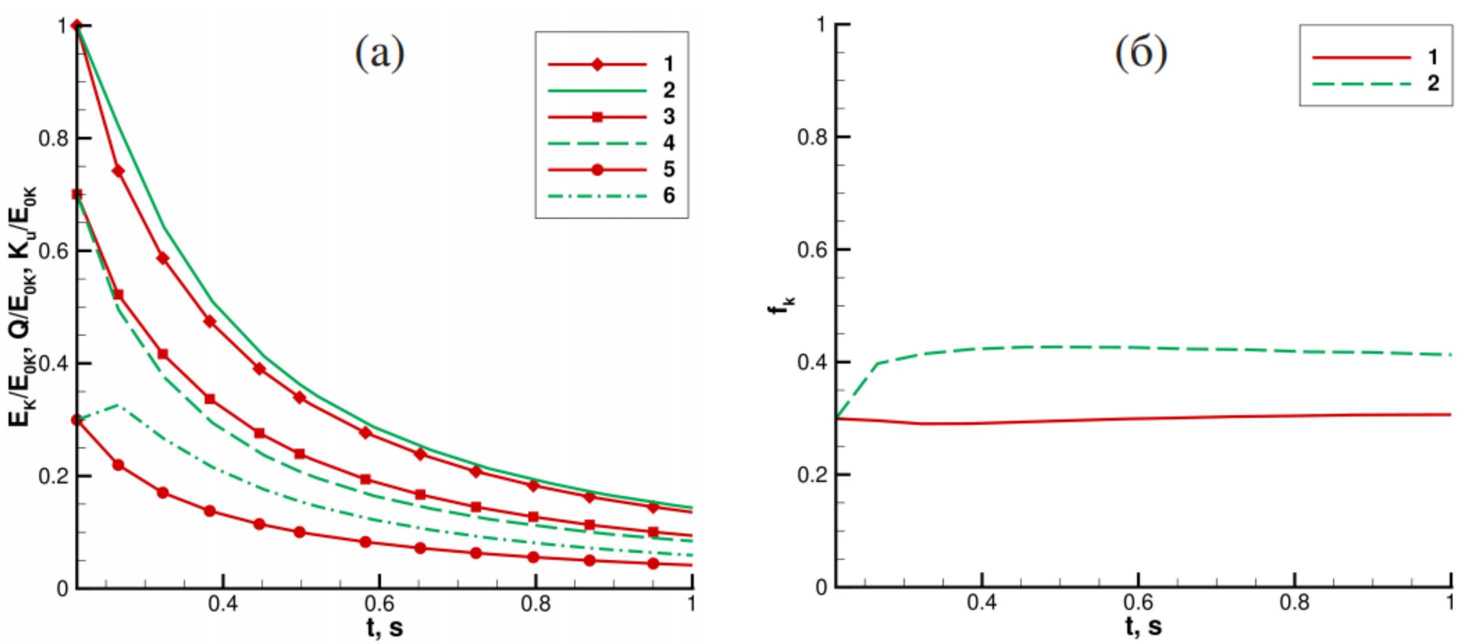
$$f_k = \frac{1}{\mathcal{K}} \int\limits_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa\,, \quad E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^s \left(\left(\frac{C_K \varepsilon^{2/3}}{C_s} \right)^{\frac{2}{5+3s}} + \kappa^{2/3} \right)^{-\frac{5+3s}{2}}$$

$$f_k = 1 - \left[\frac{\left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}}{\frac{C_K}{(1+s)\pi^{2/3}} + \left(\frac{\Lambda}{\Delta}\right)^{2/3}} \right]^{\frac{3}{2}(1+s)}$$

$$\Lambda = {}^{\mathcal{K}^{3/2}}\!/_{\varepsilon}\,, \quad \Delta = {}^{\pi}\!/_{\kappa_c}$$

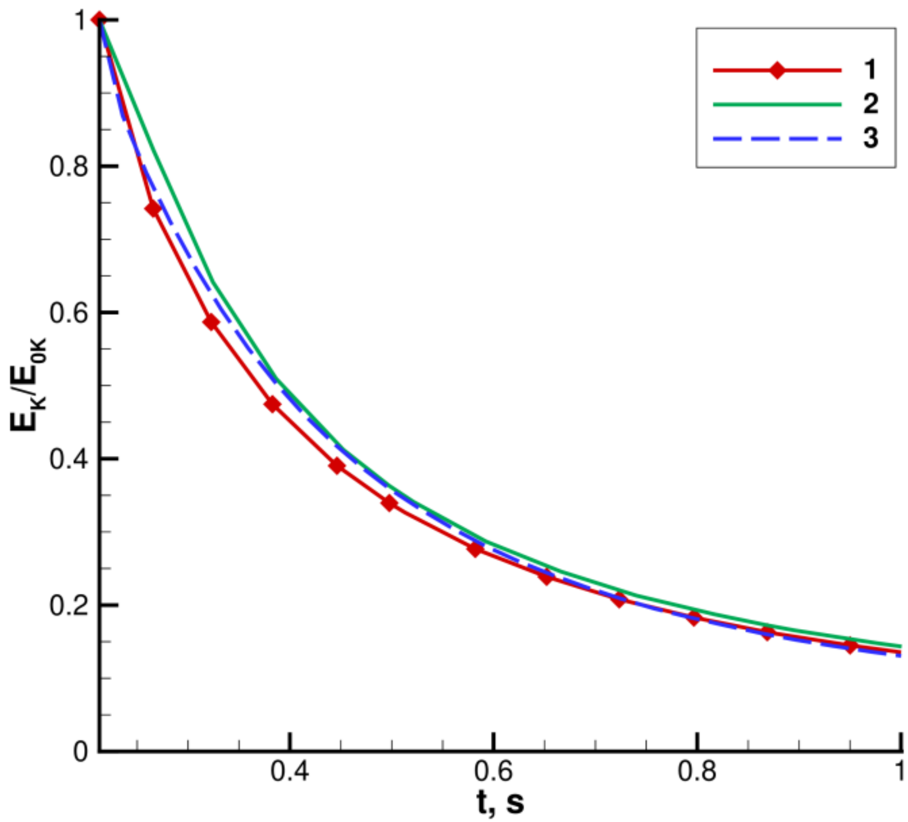


Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, адаптивное значение f_k



Зависимости от времени (а) полной кинетической энергии (1, 2), турбулентной кинетической энергии разрешённых пульсаций (3, 4) и турбулентной кинетической энергии неразрешённых пульсаций (5, 6), (б) расчётного значения f_k для расчёта с постоянным значением $f_k = 0.3$ и расчёта с адаптивным значением f_k.

Затухание однородной изотропной турбулентности: подход на основе частично усреднённых уравнений Навье-Стокса, адаптивное значение f_k



Зависимость нормированной полной кинетической энергии от времени:
1 – постоянное значение f_k = 0.3, 2 – ILES, N = 128, 3 – адаптивное значение f_k.

Основные выводы и результаты

- Изменение отношения кинетических энергий разрешённых и неразрешённых пульсаций влечёт нарушение коммутативности оператора усреднения с пространственными и временной производными. В этой связи в уравнениях для полной энергии и турбулентной кинетической энергии появляются дополнительные члены, отвечающие за перераспределении энергии между разрешёнными и неразрешёнными масштабами при изменении f_k.

- Без учёта дополнительных слагаемых в уравнениях подход практически не реагирует на изменение параметра f_k. При учёте дополнительного слагаемого в уравнении для турбулентной кинетической энергии происходит нарушение закона сохранения энергии, и полная кинетическая энергия испытывает скачок. В случае учёта дополнительных слагаемых в обоих уравнениях происходит корректный учёт изменения порогового волнового числа со временем.

- Расчёты с адаптивным изменением параметра f_k на основе текущих характеристик частично усреднённого течения с учётом дополнительных членов позволяет получить лучшее согласие зависимости полной кинетической энергии в этом случае с результатами расчёта на более подробной сетке.

Благодарности

Спасибо за внимание