

XVI Забабахинские научные чтения, Секция 7

30 мая 2023

Определение изменяющихся параметров математических моделей распространения инфекций

А.С. ЛЕОНОВ, О.В. НАГОРНОВ, С.А. ТЮФЛИН

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва

Модель SEIR с переменными коэффициентами для отслеживания реакции здравоохранения на динамику пандемии

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta(t)S(I + E) \\ \dot{E} = \beta(t)S(I + E) - (\gamma(t) + \delta(t))E \\ \dot{I} = \delta(t)E - \gamma(t)I \\ \dot{R} = \nu I \end{cases} \Rightarrow I(t; \alpha, \beta(t), \gamma(t), \delta(t), \nu) \quad (1)$$

$$(S(t_0) = \alpha, E(t_0) = 0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0)$$

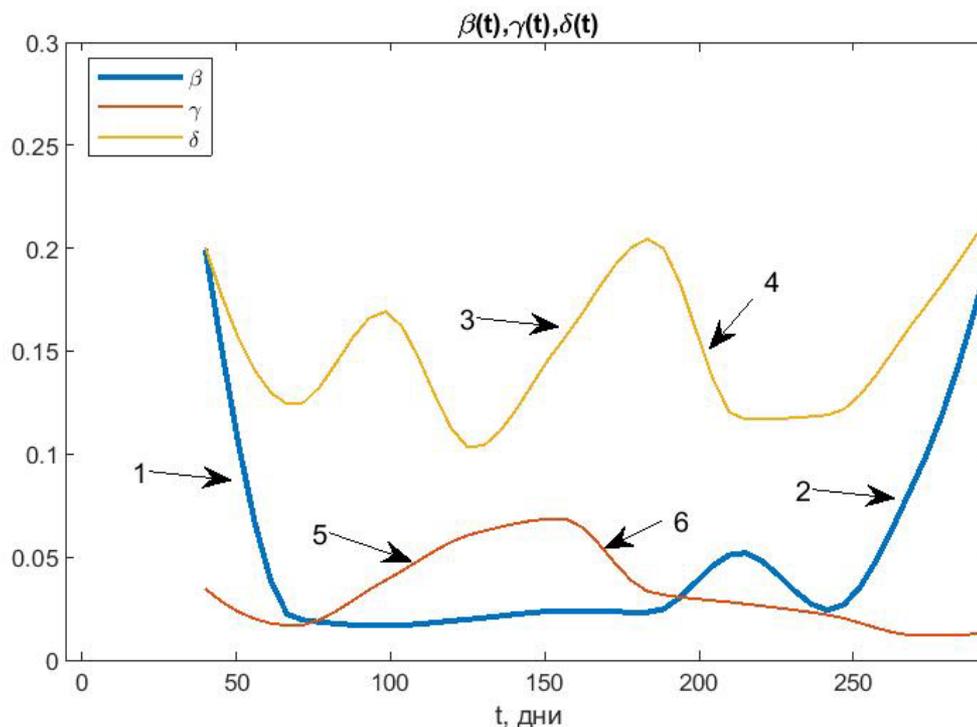
$S(t)$ – число здоровых людей в популяции, которые могут быть заражены к моменту времени t ;

$E(t)$ – число зараженных людей, заболевание которых еще не выявлено ко времени t , но они способны заражать окружающих;

$I(t)$ – число больных с подтвержденным диагнозом в момент времени t ;

$R(t)$ – число выздоровевших и иммунизированных к моменту времени t .

Интерпретация изменений коэффициентов модели



$\beta(t)$ пропорциональна вероятности заражения, и она может меняться вследствие мер здравоохранения рассматриваемой страны по снижению этого фактора. Уменьшение $\beta(t)$ можно считать реакцией на введенные ограничительные меры (область 1). Ослабление этих мер может вести к росту $\beta(t)$ (область 2). Увеличение $\gamma(t)$ можно интерпретировать как снижение среднего времени диагностирования заболевания (область 5). Возможен и обратный эффект (область 6). Увеличение $\delta(t)$ отражает уменьшение среднего времени излечения (область 3). Рост этого времени можно интерпретировать как убывание $\delta(t)$ (область 4).

Алгоритм решения обратной задачи с переменными коэффициентами

а) Задается временная сетка $\{t_i\}_{i=0}^M, t_M > t_T$, на которой вычисляются неизвестные коэффициенты. Вводятся параметры $p = \{\alpha, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, i=1..M\}$, т.е. число α и сеточные значения $\{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\delta_i\}$ коэффициентов $\{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\delta_i\}$. По последним вычисляются сплайны $\beta(t, \{\beta_i\}), \gamma(t, \{\gamma_i\}), \delta(t, \{\delta_i\})$. Сеточные значения подчиняются интервальным ограничениям, определяющим компакт K_0 . Реализуется оператор решения прямой задачи вычисления функции $I(t)$ по α и этим сплайновым коэффициентам:

$$I(t, \alpha, \beta(t, \{\beta_i\}), \gamma(t, \{\gamma_i\}), \delta(t, \{\delta_i\})) = J(t, \alpha, \{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\delta_i\}).$$

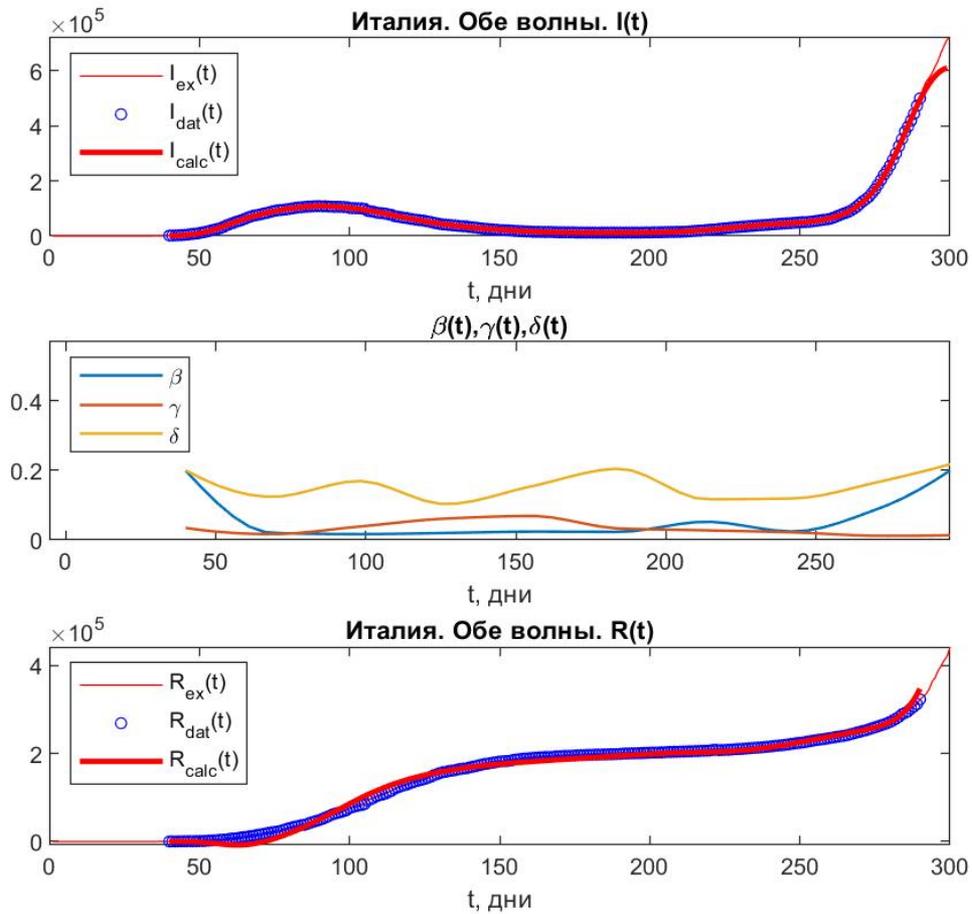
б) На компакте K_0 минимизируется невязка

$$\Phi_1(p) = \Phi_1(\alpha, \{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\delta_i\}) = \frac{\|J(t, \alpha, \{\beta_i\}, \{\gamma_i\}, \{\delta_i\}) - I_{дат}(t)\|_{L_2[t_0, T]}}{\|I_{дат}(t)\|_{L_2[t_0, T]}}; \quad (2)$$

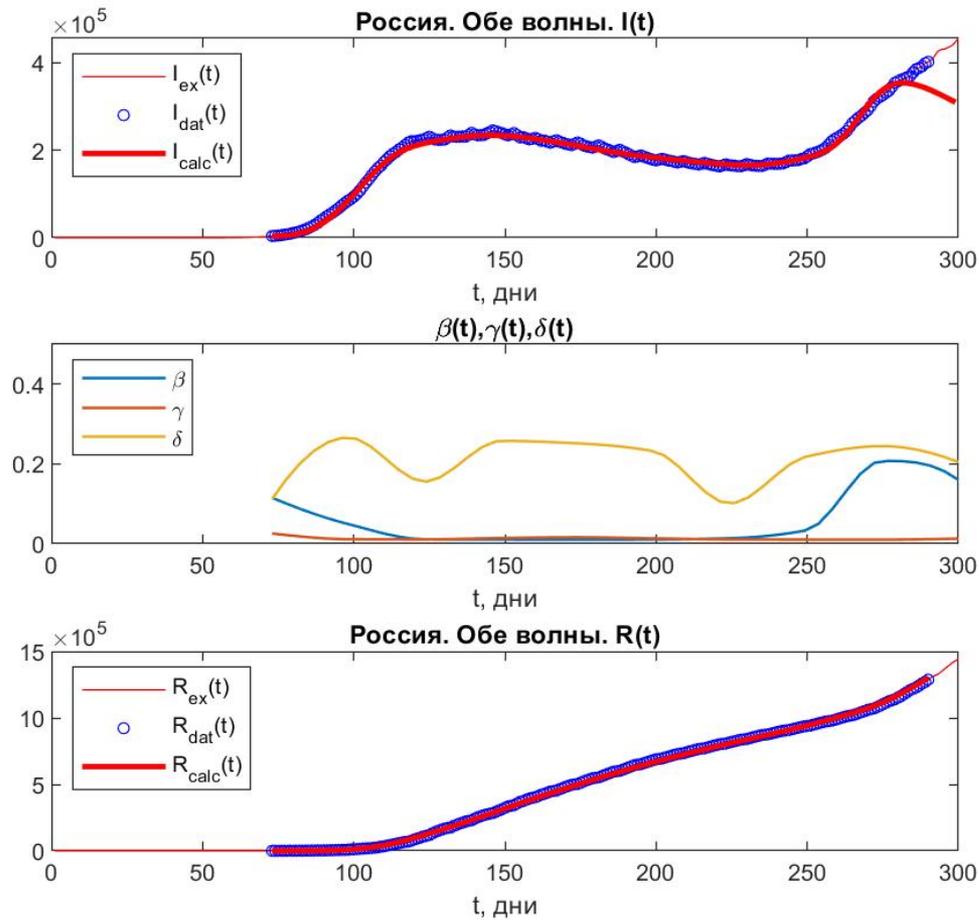
сплайны коэффициентов, построенные на решении этой экстремальной задачи обозначим как $\beta^*(t), \gamma^*(t), \delta^*(t)$, а найденное таким путем число α - как α^* .

в) Производится экстраполяция функции $I(t)$ «в будущее» по формуле $I(t) = I(t, \alpha^*, \beta^*(t), \gamma^*(t), \delta^*(t)), t_T < t < t_M$.

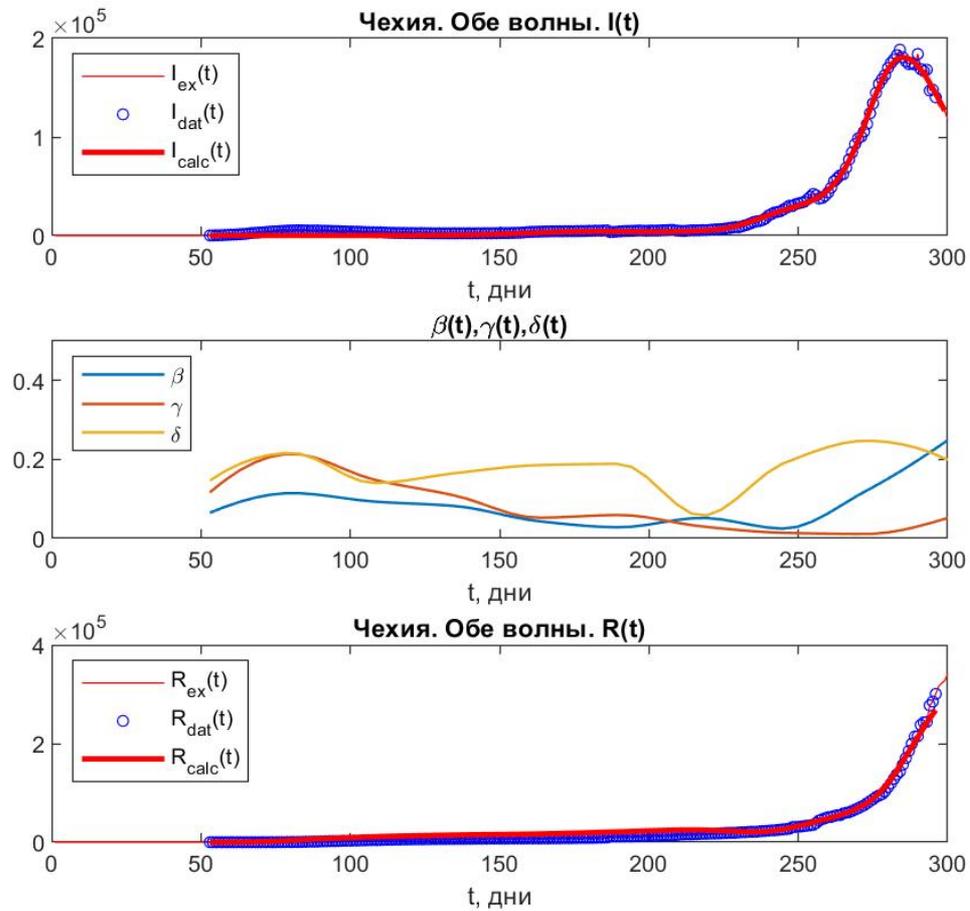
Результаты для модели с переменными коэффициентами Италия



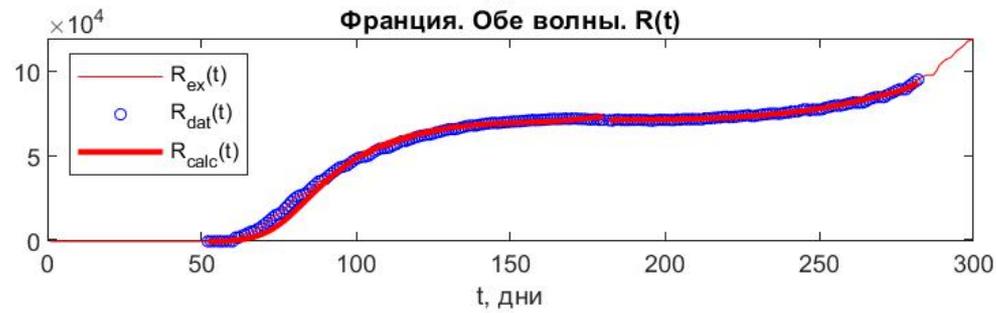
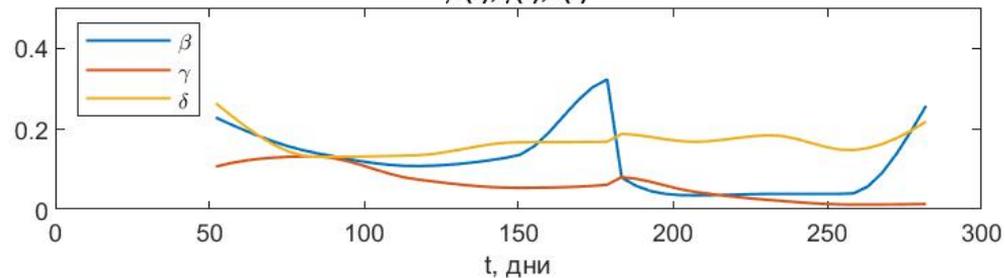
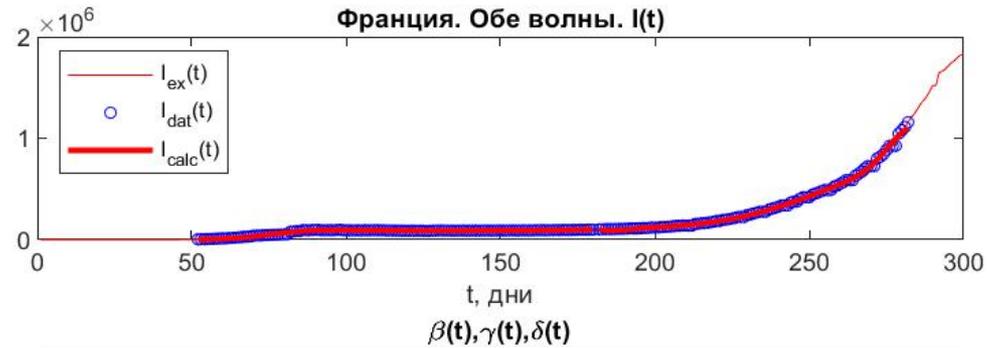
Результаты для модели с переменными коэффициентами Россия



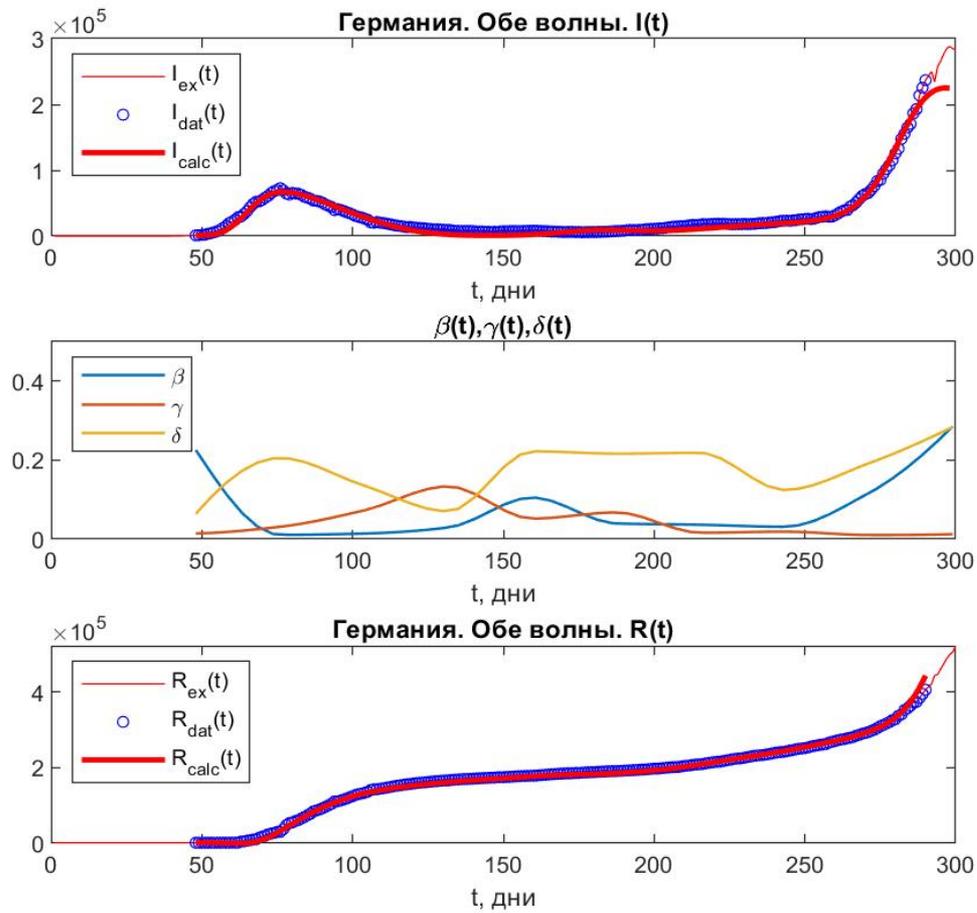
Результаты для модели с переменными коэффициентами Чехия



Результаты для модели с переменными коэффициентами Франция



Результаты для модели с переменными коэффициентами Германия



Модель SIR с переменными коэффициентами для отслеживания реакции здравоохранения на динамику пандемии

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta(t)S(I + E) \\ \dot{E} = \beta(t)S(I + E) - (\gamma(t) + \delta(t))E \Rightarrow I(t; \alpha, \beta(t), \gamma(t), \delta(t), v) \\ \dot{I} = \delta(t)E - \gamma(t)I \end{cases} \quad (1)$$

$$(S(t_0) = \alpha, E(t_0) = 0, I(t_0) = I_0)$$

$S(t)$ – число здоровых людей в популяции, которые могут быть заражены к моменту времени t ;

$E(t)$ – число зараженных людей, заболевание которых еще не выявлено ко времени t , но они способны заражать окружающих;

$I(t)$ – число больных с подтвержденным диагнозом в момент времени t .

Вариант метода регуляризации Тихонова

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\|I(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) - I_{dat}(t)\|_{L_2[t_n, t_{n+1}]}}{\|I_{dat}(t)\|_{L_2[t_n, t_{n+1}]}}$$

$$M^{\lambda_m}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \lambda_m \Omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + \Phi^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{(\alpha - \alpha_n)^2 + (\beta - \beta_n)^2 + (\gamma - \gamma_n)^2 + (\delta - \delta_n)^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 + \delta_n^2}$$

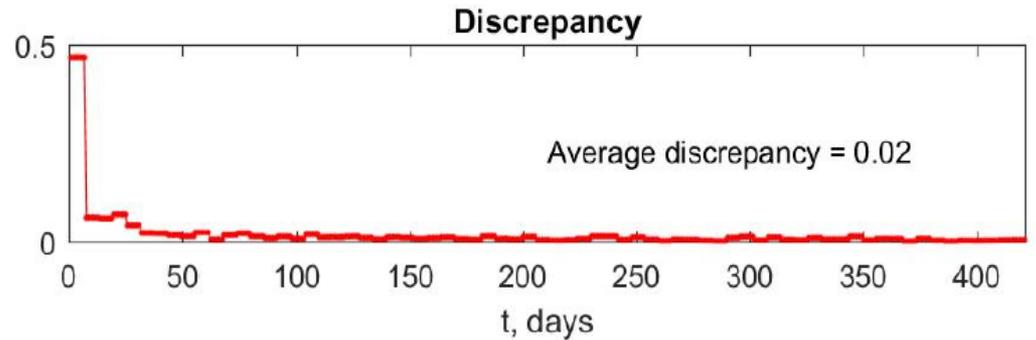
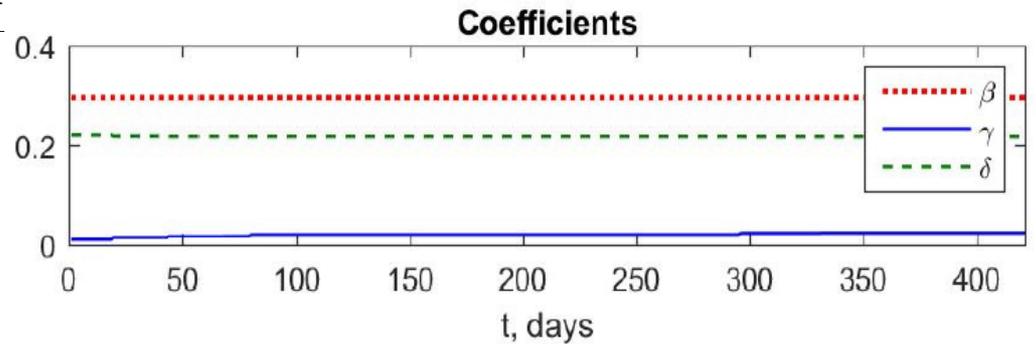
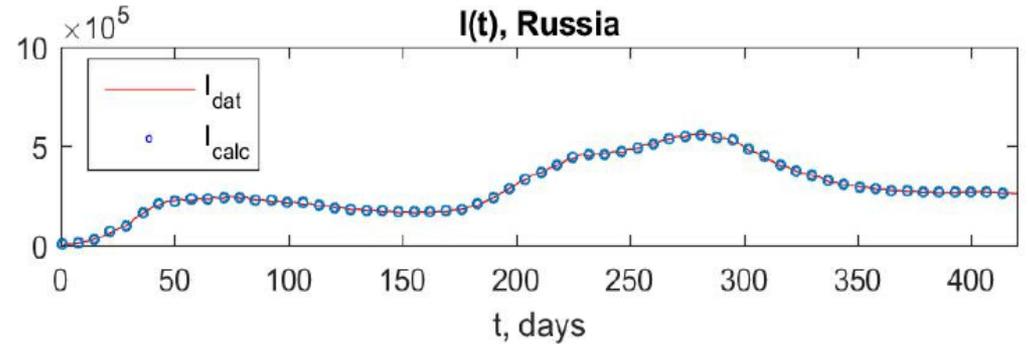


Table 1. Accuracy of the approximation of data for Method 1.

Country	Austria	Czech Rep.	Germany	France	Italy
$\bar{\Phi}_{\min}$	0.040	0.071	0.050	0.081	0.077

Механизм моделирования последовательных волн в модели SIR

$$\begin{cases} \dot{S} = -\beta(t)S(I + E) \\ \dot{E} = \beta(t)S(I + E) - (\gamma(t) + \delta(t))E, \quad t_0 < t < t_1 \\ \dot{I} = \delta(t)E - \gamma(t)I + f(t) \end{cases}$$

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, f) = \frac{\|I(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta, f) - I_{dat}(t)\|_{L_2[t_n, t_{n+1}]}}{\|I_{dat}(t)\|_{L_2[t_n, t_{n+1}]}}$$

$$\Omega_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta, f) = \frac{(\alpha - \alpha_n)^2 + (\beta - \beta_n)^2 + (\gamma - \gamma_n)^2 + (\delta - \delta_n)^2 + (f - f_n)^2}{\alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 + \delta_n^2 + f_n^2}$$

Механизм моделирования последовательных волн в модели SEI

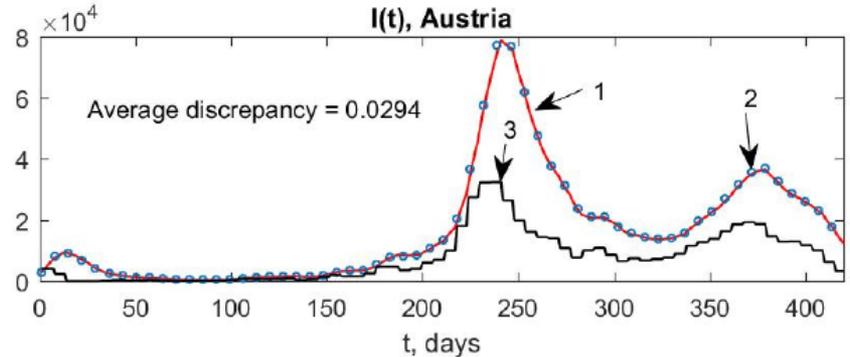
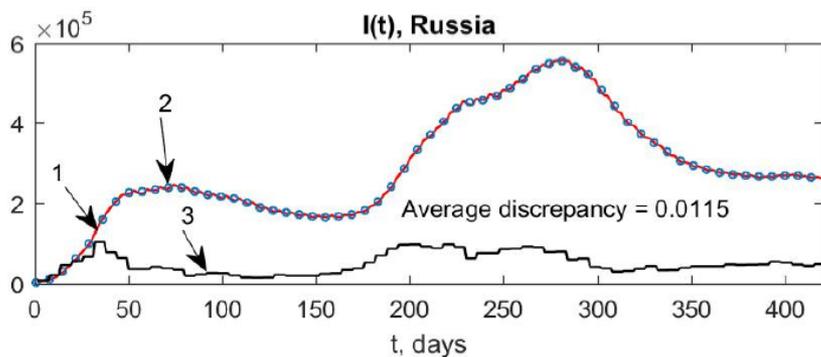


Table 2. Accuracy of the approximation of data for Method 2.

Country	Czech Rep.	Germany	France	Italy
$\bar{\Phi}_{1, \min}$	0.0438	0.0327	0.0248	0.0155

Выводы

- Решение обратной задачи на основе модели SEIR с переменными коэффициентами достаточно хорошо описывает инфекционные кривые (с погрешностью 2-8%) в случаях “плавного течения” заболевания, при этом хорошо прослеживаются различные волны эпидемий;
- Включение в модель SEIR внешнего источника позволяет адекватно описать с хорошей точностью (2-4%) инфекционные кривые и значительные инфекционные пики;
- Отсутствие полных данных по течению эпидемии с 10.02.2022 существенно снижает точность реконструкций до 10-30%.