



РФЯЦ-ВНИИЭФ  
РОСАТОМ

# **Анизотропная модель замыкания уравнений упругопластики многокомпонентной среды**

Доклад на Забабахинские Чтения

**Янилкин Ю.В., Стадник А.Л., Топорова О.О.**

# Система дифференциальных уравнений многокомпонентной 2D упругопластики

$$\rho \frac{du_x}{dt} = -\frac{\partial(P+q)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + (\alpha - 1) \frac{S_{xy}}{y},$$

$$\rho \frac{du_y}{dt} = -\frac{\partial(P+q)}{\partial y} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + (\alpha - 1) \frac{S_{yy} - S_{\varphi}}{y},$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i (\operatorname{div} \vec{u})_i,$$

$$\rho_i \frac{de_i}{dt} = -(P_i + q_i) (\operatorname{div} \vec{u})_i + S_{xx}^i d_{xx}^i + S_{yy}^i d_{yy}^i + S_{\varphi}^i d_{\varphi}^i + 2S_{xy}^i d_{xy}^i,$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i(\rho_i, \mathbf{e}_i) \quad f(S^i, D^i) = 0$$

**Неизвестные величины:**  $P$ ,  $(\operatorname{div} \mathbf{u})_i$ ,  $d_{kj}^i$ ,  $q$ ,  $q_i$ .

**Давление и вязкость определяются по формуле**

$$P = \sum \xi_i P_i, \quad q = \sum \xi_i q_i$$

$$S_{kj} = \sum \xi_i S_{kj}^i$$

**Вязкости  $q_i$  определяются по формулам из работы**

Гончарова, Колобянина и Янилкина, 2008.

**Для  $(\operatorname{div} \mathbf{u})_i$  и  $d_{kj}^i$  необходимы замыкающие соотношения (модели).**

# Основные замыкающие соотношения

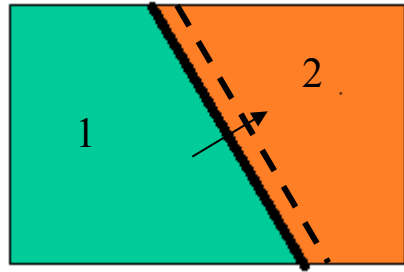
1. **Равенство сжимаемостей (дивергенций)** (Бахрах, Спиридонов, 1984)
2. **Равенство давлений** (Харлоу, 1967)
3. **Равенство приращений давлений + выравнивание давлений** (Бондаренко, Гончаров, Янилкин, 2002, 2004)
4. **Равенство скоростей после прохождения слабого возмущения + выравнивание давлений** (Гончаров, Колобянин, Янилкин, 2006) . Этот метод является основным в методике ЭГАК.
5. **Метод на основе распада разрыва в акустическом приближении** (Делов и Садчиков, 2005)
6. **Метод Типтона** (1989)
7. **Метод Kamm, Shashkov et. al** (2010)

**В этих методах явно-неявно предполагается, что движение среды происходит по нормали к КГ, но само положение КГ в алгоритмах не используется.**



# Изотропные модели замыкания, учитывающие положение КГ в смешанной ячейке

Метод IA-SSD (Barlow, Hill, Shashkov, 2012, 2014)



В этой модели вычисление дивергенций производится в **два этапа**

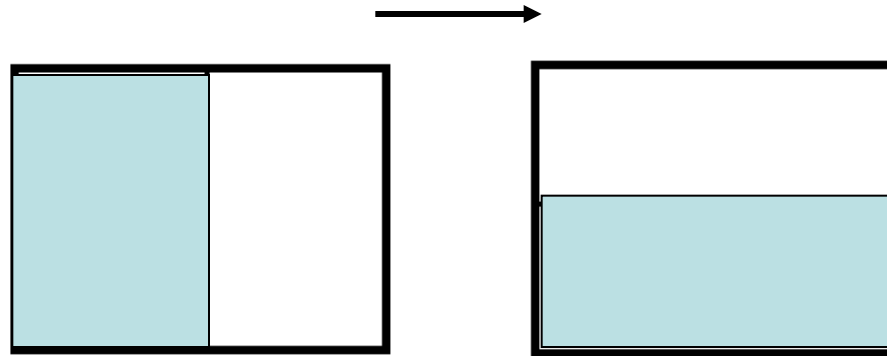
На **первом этапе** основной моделью является равенство дивергенций.

На **втором этапе** решается задача распада разрыва в акустическом приближении с учетом положения КГ (как у Делова, только там без реального положения КГ и без первого этапа).

# Предлагаемая анизотропная модель

Рассмотрим два предельных случая расположения КГ по отношению к движению волны. В первом случае пригодны все рассмотренные выше модели 1-7, каждая со своей точностью.

Во втором случае это не так. Например, для упругопластической среды, применяя некоторые из моделей, можно получить значительную погрешность. Дело в том, в этом случае величина дивергенции в целом для ячейки и для каждого компонента определяется скоростями в направлении вдоль КГ. А все вышеприведенные модели получены для движения по нормали к КГ.

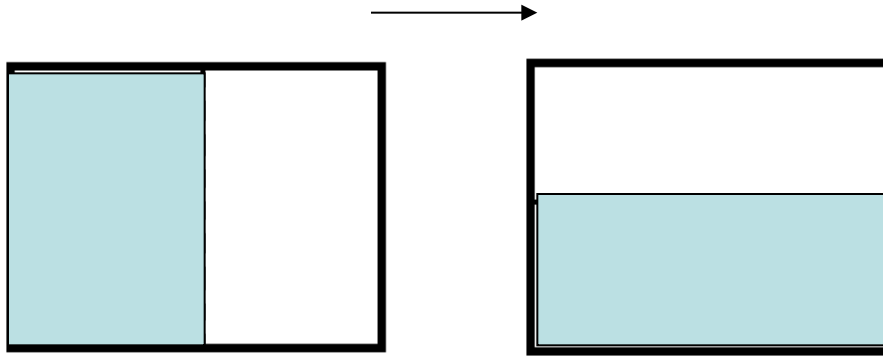


Предлагается следующая двухэтапная модель замыкания.

**Первый этап** – это замороженное движение среды, в первом приближении это означает равенство дивергенций скорости .

**Второй этап** – релаксация напряжений на фоне такого движения, то есть, применение алгоритмов выравнивания напряжений. При этом степень выравнивания зависит от направления движения по отношению к КГ.

# Реализация модели



Полагаем, что

$$\text{div}u_i = \text{div}u_{i1} + \text{div}u_{i2}$$

На **первом** этапе полагаем, что

$$\text{div}u_{i1} = \text{div}u$$

На **втором** этапе полагаем, что происходит процесс выравнивания напряжений по нормали к КГ по следующей формуле

$$\text{div}u_{i2} = -\frac{\Delta T_{in}}{\tau \rho_i c_i^2} \quad \leftarrow \quad T_{in} = (P_i - S_{in})$$

где

$$\Delta T_i = A \frac{c\tau}{h} (T - T_i) \quad A = A_0 (\text{div}u_n / \text{div}u)$$

$A \sim 1$  соответствует случаю 1 на рисунке выше.

Вообще  $A_0$  должен определяться по результатам тестовых расчетов.

# Тестовые расчеты

## Использованные в расчетах методы замыкания

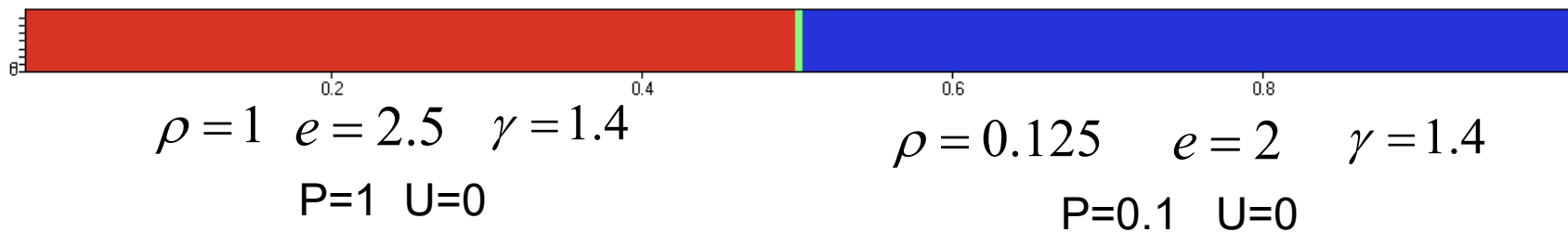
Метод замыкания	Описание
Метод 4	Равенство приращений скорости компонентов + алгоритм релаксации давлений (основной метод в ЭГАК)
Метод 1	Одинаковая сжимаемость компонентов (первая часть анизотропной модели)
Метод 7	Анизотропная модель замыкания без учета <u>девиатора</u> тензора напряжений
Метод 8	Анизотропная модель замыкания с учетом полного тензора напряжений

# Задача 1. Задача Сода

Постановка расчета

comp 0

comp 1



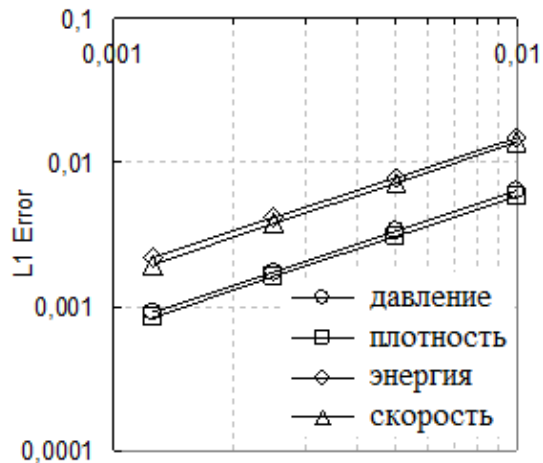
Сетка: 100, 200, 400 и 800 ячеек



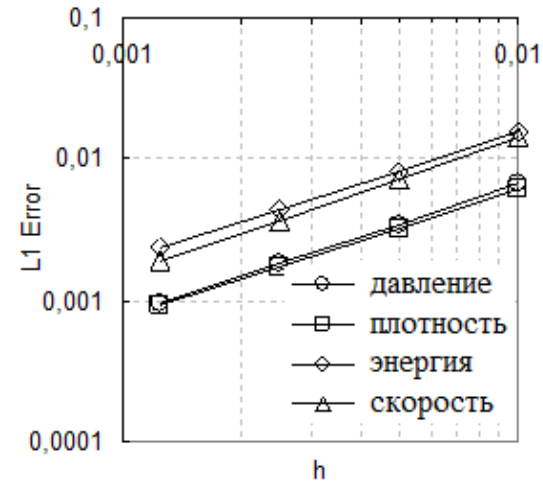
## Точное и расчетное значения основных величин в смешанных ячейках

метод	$p_1$	$p_2$	$\rho_1$	$\rho_2$	$e_1$	$e_2$
точное решение	<b>0.303</b>	<b>0.303</b>	<b>0.426</b>	<b>0.266</b>	<b>1.778</b>	<b>2.853</b>
Чистые ячейки	0.303	0.303	0.423	0.257	1.792	2.953
Метод 1	0.551	0.055	0.652	0.082	2.113	1.690
Метод 8 (метод 7)	0.303	0.303	0.391	0.245	1.938	3.090
Метод 4	0.303	0.303	0.391	0.248	1.940	3.060

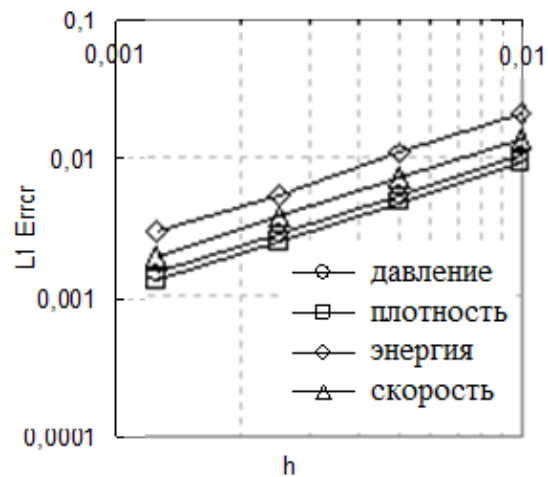
# Зависимости интегральной погрешности в норме L1 от $h$



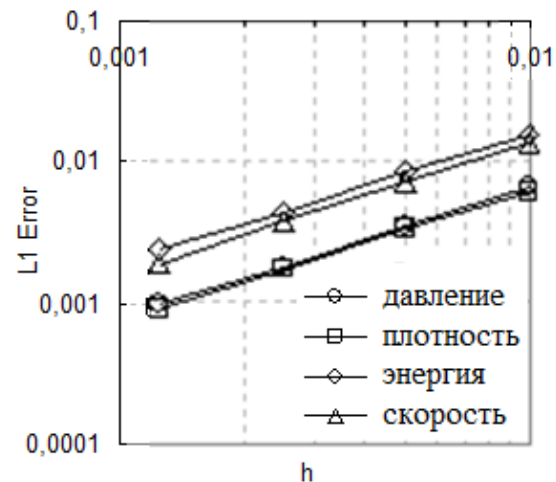
чистые ячейки



метод 4

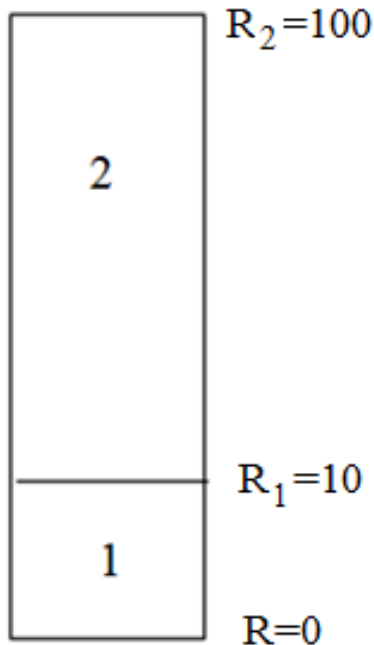


метод 1



метод 8

## Задача 2. Цилиндрическая задача Блэйка

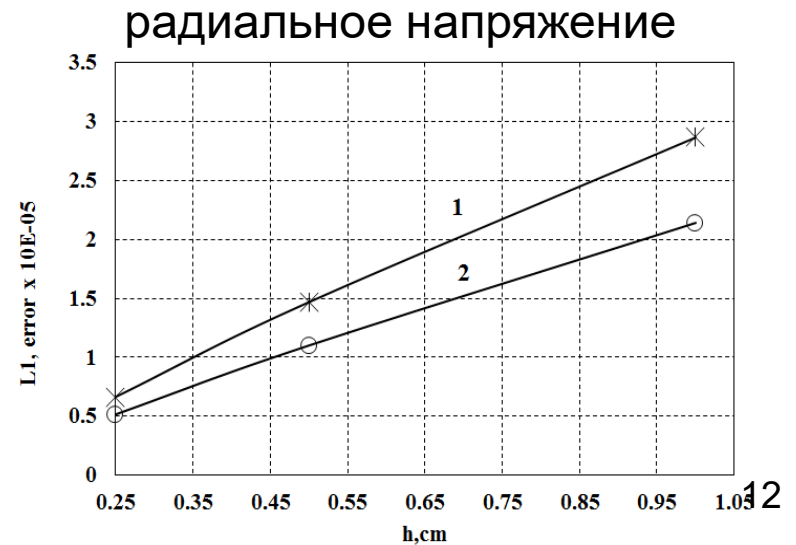
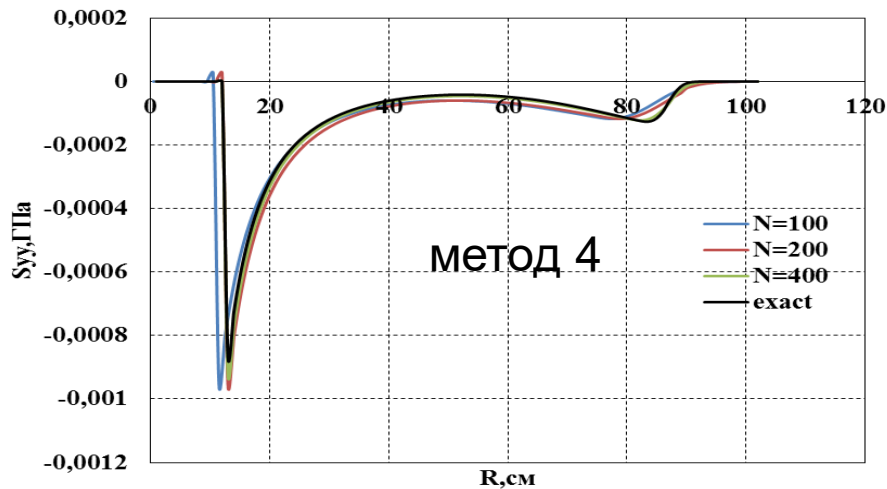
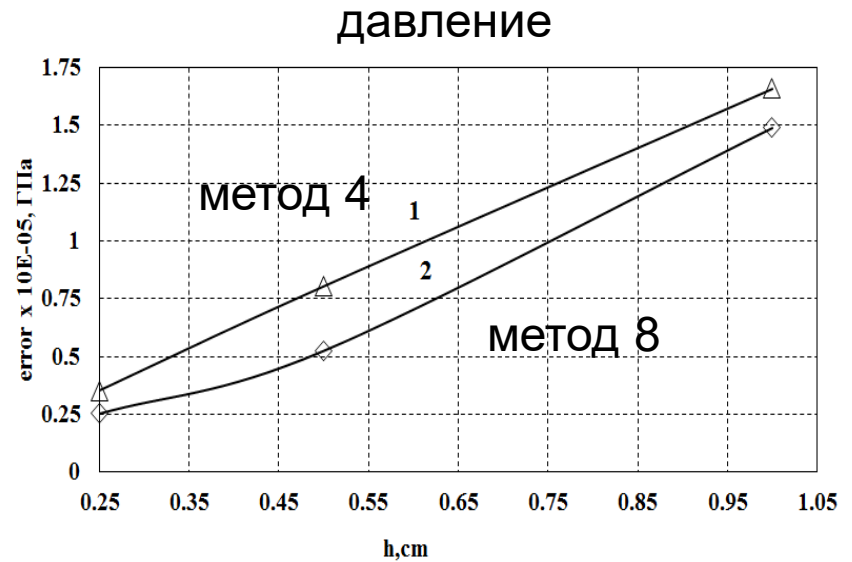
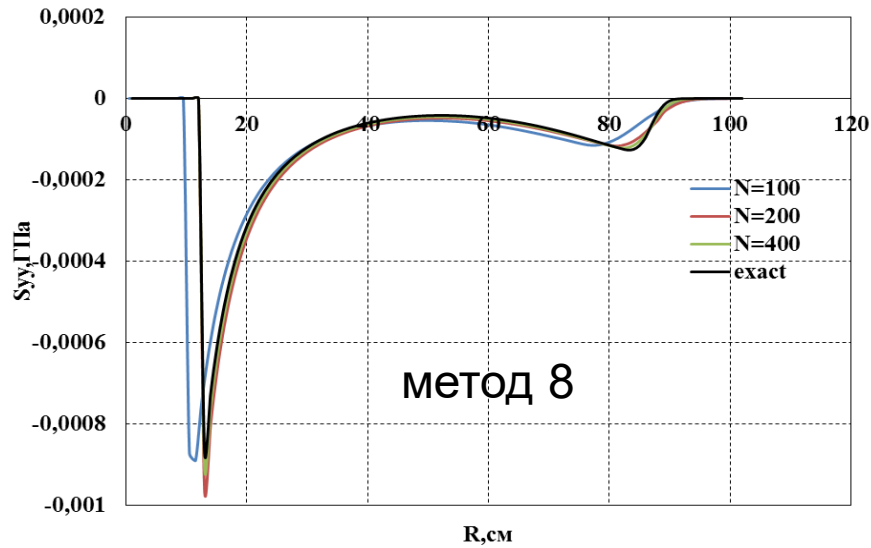


В области 2 абсолютно упругое вещество с плотностью  $\rho_0 = 3 \text{ г/см}^3$  и с уравнением состояния в форме Ми-Грюнаизена

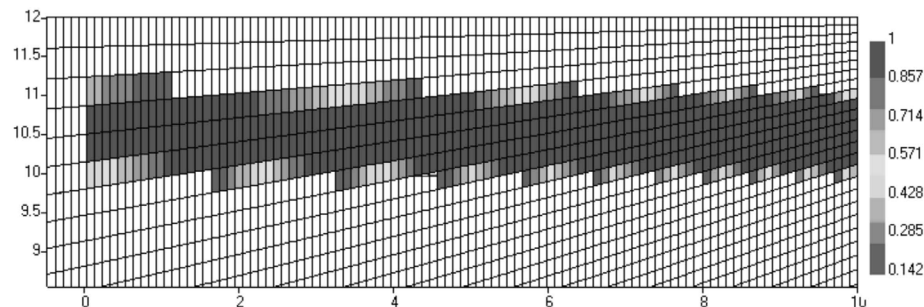
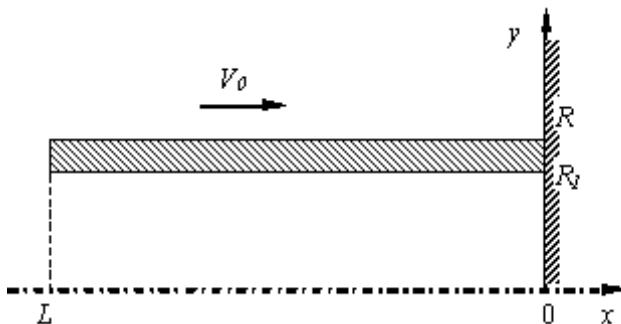
В области 1 вещество с плотностью  $\rho_0 = 3 \text{ г/см}^3$  и постоянными давлением  $p_0 = 0.001 \text{ ГПа}$

Расчеты в лагранжевых переменных с одной смешанной ячейкой с объемной долей 0.5

# S<sub>yy</sub>(R) зависимости, интегральная погрешность в норме L1 от h



# Задача 3 (Краюхин А.А.). Распространение упругих волн вдоль пластины и оболочки



Параметры УРС Ми-Грюнайзена

$V$ , км/с	$R$ , см	$R_1$ , см	$L$ , см	$h$ , см
0.01	11	10	10	0.2

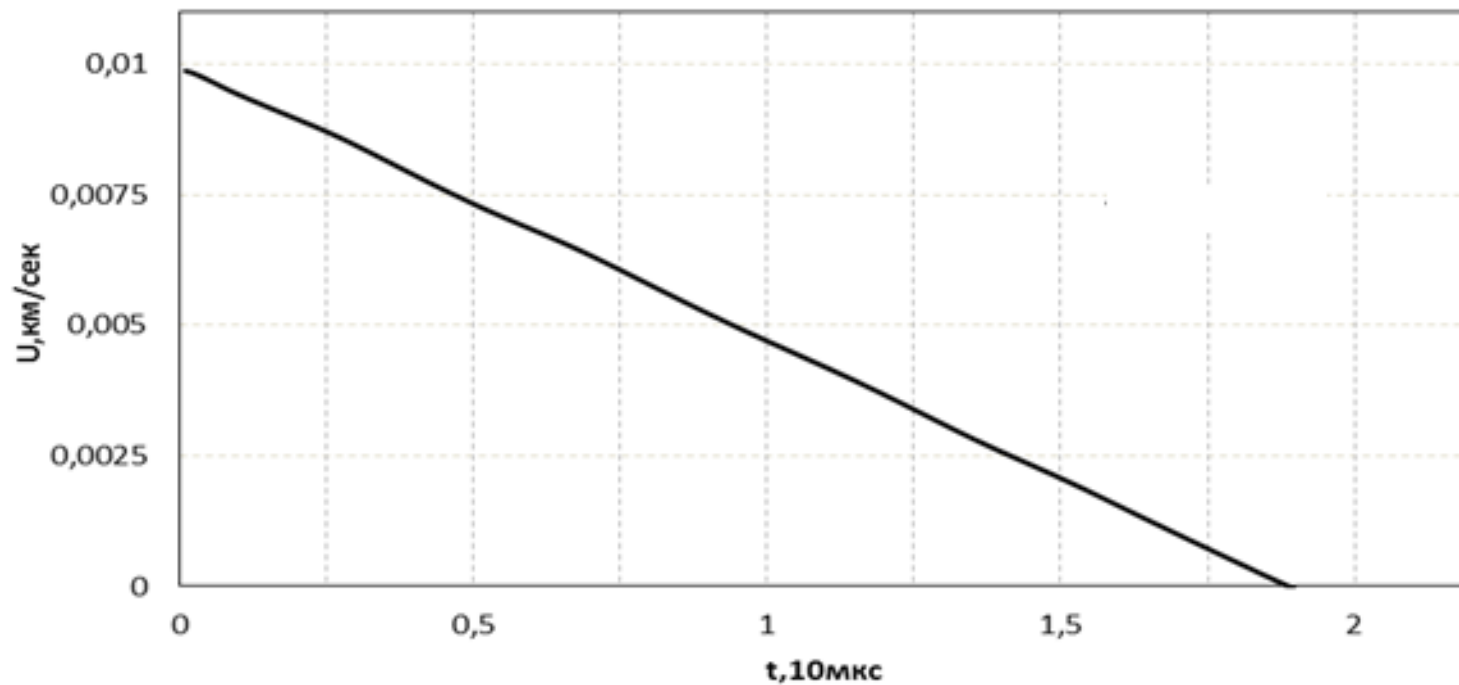
Материал	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$c_0$ , км/с	$n$	$\Gamma$	$P_{отк}$ , ГПа
Титан	4.5	4.842	3.4243	1.18	-1.8

Параметры модели Джонсона-Кука

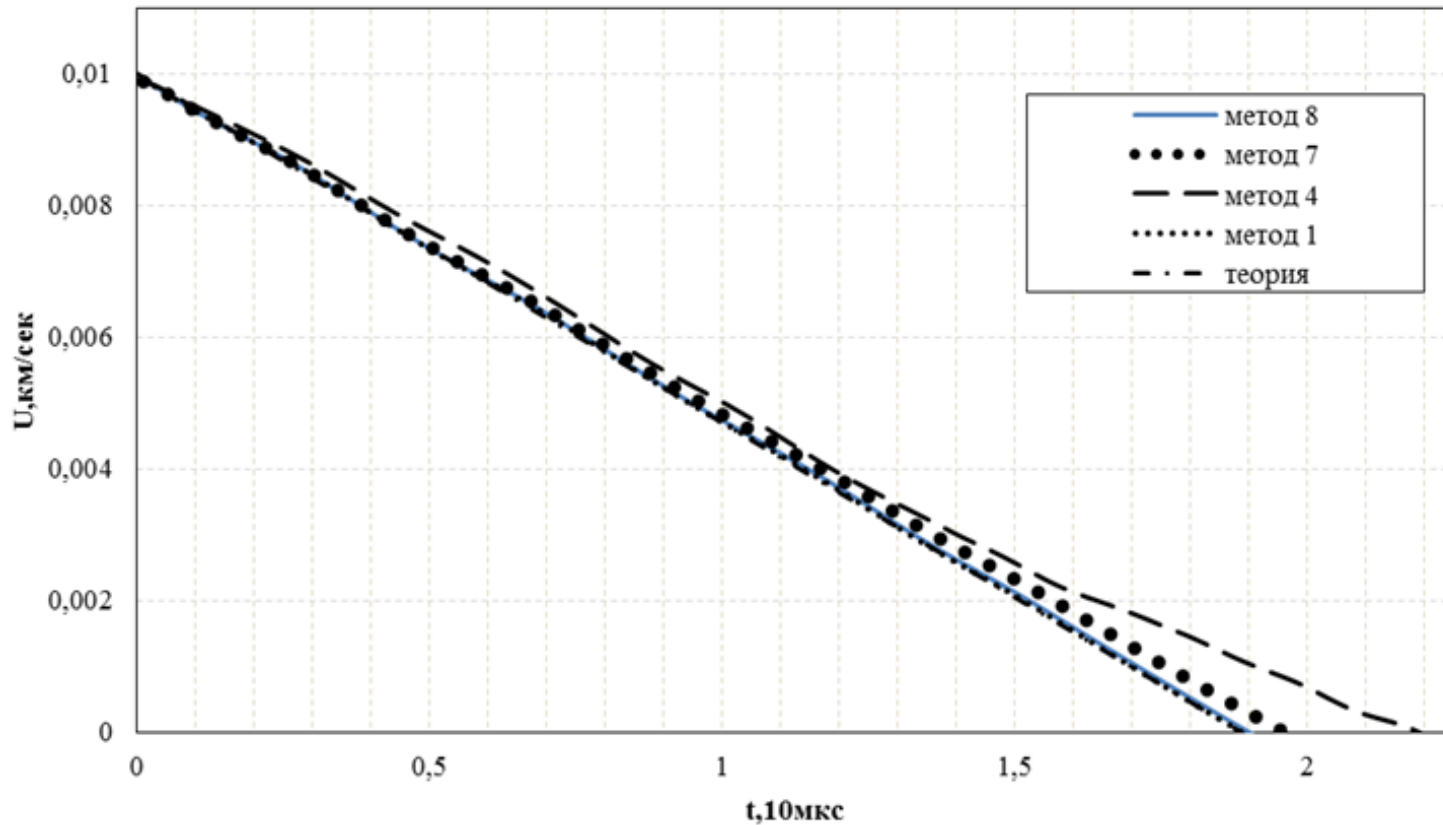
Материал	$Y_0$ , ГПа	$b$ , ГПа	$k$	$c$	$m$	$C_{\nu}$ , кДж/(г·К)	$T_m$ , К	$G$ , ГПа	$\nu$
Титан	1.098	1.092	0.93	0.014	1.1	$580 \cdot 10^{-6}$	1878	43	0.32

Теоретическое значение  $c_w = 5,3$  км/с для плоской геометрии и 5,02 для цилиндрической геометрии.

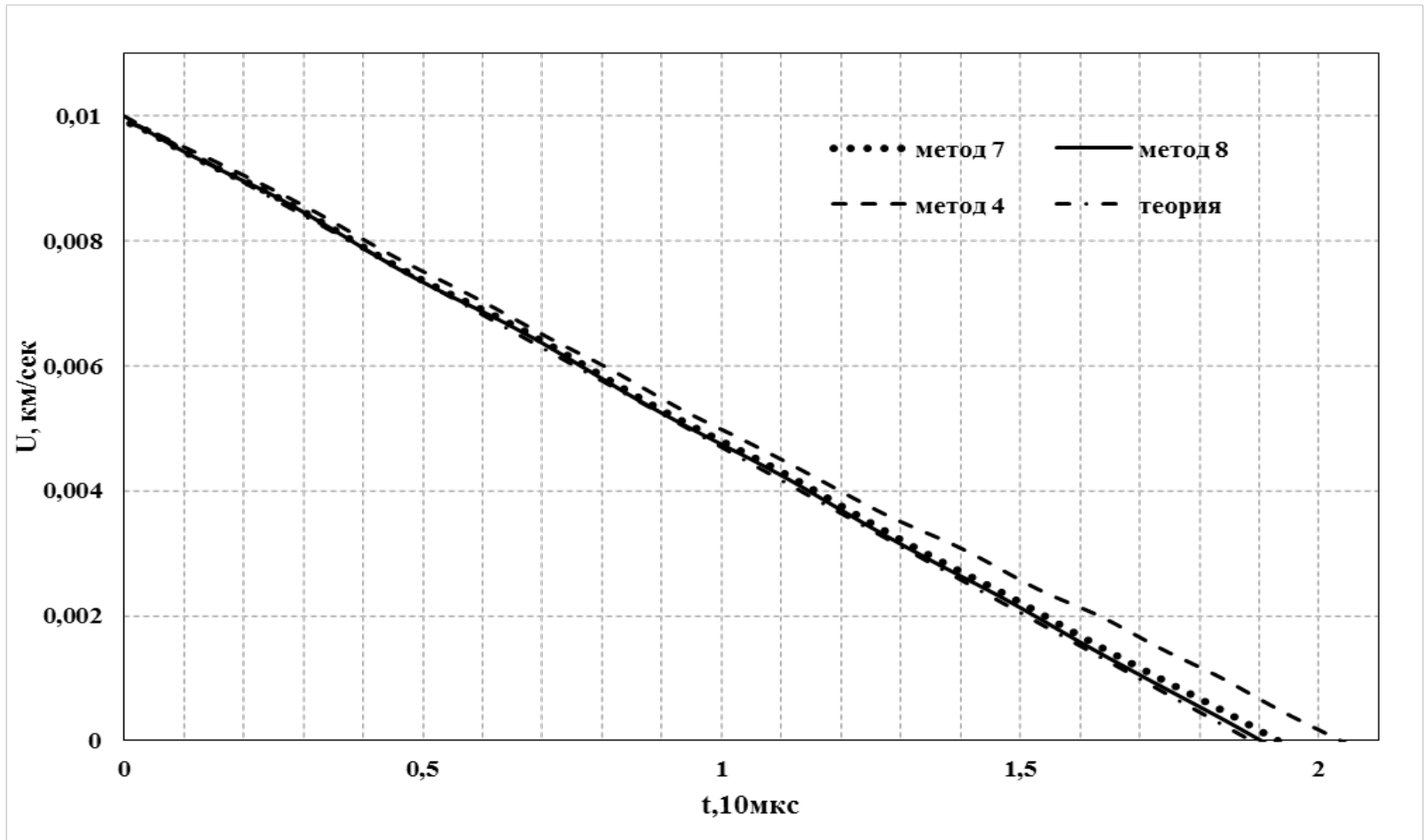
# Зависимость скорости центра масс пластины от времени в расчете с чистыми ячейками



# Зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах на прямоугольной сетке



# Зависимости скорости центра масс пластины от времени в расчетах на кривой сетке

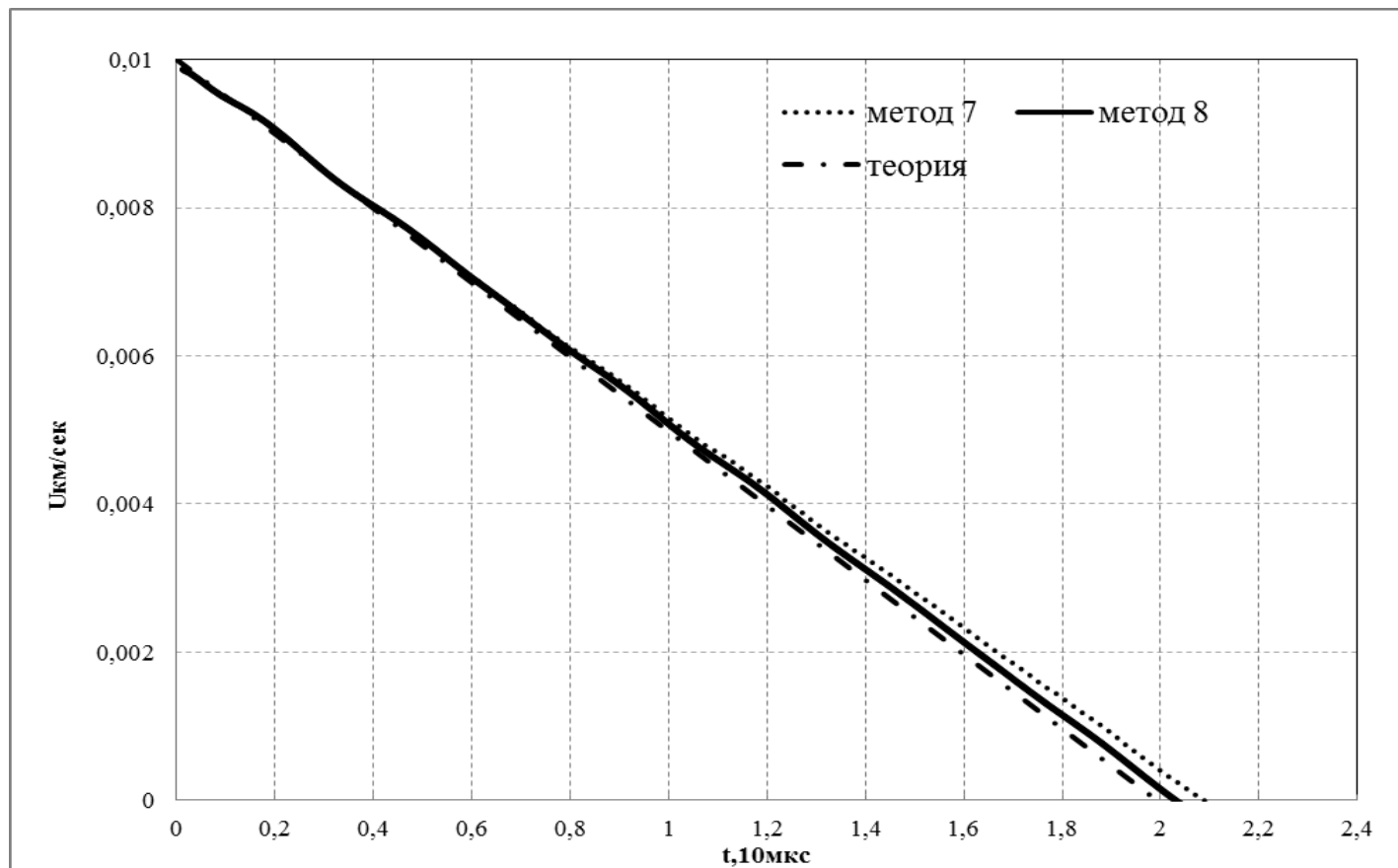




## Расчетные значения скорости продольной упругой волны вдоль пластины

расчет	метод замыкания, тип сетки	расчет км/с	погрешность %	теория км/с
1	метод 1, прямоугольная сетка	5,38	+1,51	5,3
2	метод 4, прямоугольная сетка	4,7	-11,32	
3	метод 7, прямоугольная сетка	5,13	-3,21	
4	метод 8, прямоугольная сетка	5,26	-0,75	
5	метод 1, косая сетка	5,26	-0,75	
6	метод 4, косая сетка	4,92	-7,17	
7	метод 7, косая сетка	5,18	-2,26	
8	метод 8, косая сетка	5,26	-0,75	

# Зависимости скорости центра масс цилиндра от времени в расчетах на прямоугольной сетке



## Расчетные значения скорости продольной упругой волны вдоль цилиндрической оболочки

расчет	метод замыкания	расчет, км/с	погрешность %	теория, км/с
9	метод 1	5.0	-0,4	5.02
10	метод 4	4.43	-11,75	
11	метод 7	4.8	-4,38	
12	метод 8	4.94	-1,59	

## Заключение

В докладе предложена новая анизотропная модель замыкания уравнений лагранжевой упругопластики многокомпонентной среды в смешанных ячейках.

Модель и соответствующий численный метод исследованы на нескольких характерных задачах, которые демонстрируют потенциальные возможности модели для повышения точности расчетов.

**Спасибо за внимание!**