



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Федеральное государственное унитарное предприятие
"РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР –
Всероссийский научно-исследовательский институт
технической физики имени академика Е.И.Забабахина»

Инженерная модель для оценки скорости флаера в сильноточных установках

А.Н. Григорьев, Н.А. Лубенченко, А.В. Павленко

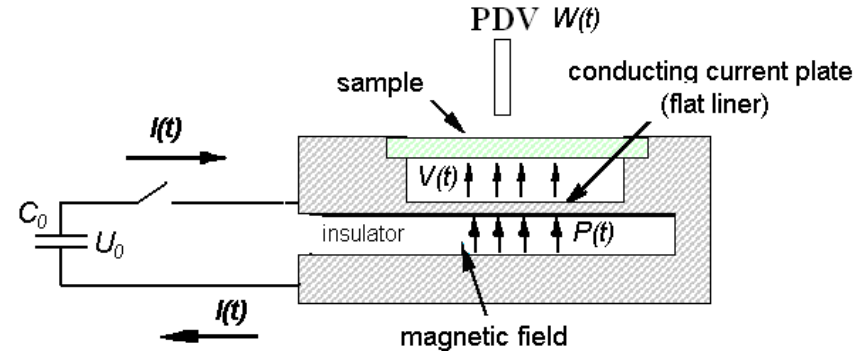
Актуальность

Возможность разгона пластин-ударников (флаеров) до скоростей $V > 8$ км/с с помощью импульсного магнитного поля послужила стимулом для применения и соответствующего развития мощной импульсной электрофизической техники в последние два десятилетия.



На этапе проектирования установки, когда точный амплитудно-временной профиль тока изначально не известен –

актуально наличие простого инженерного метода оценки скорости флаера



Простейшая схема нагружения образцов, в которой в качестве ударника используется токонесущая пластина

Давление (в функции времени t), действующее на проводящую пластину с током определяется выражением:

$$P(t) = k B(t)^2 / 2\mu\mu_0 = k \mu\mu_0 J(t)^2 / 2 = k \mu_0 I(t)^2 / 2b^2, \quad (1)$$

где $\mu \approx 1$ – относительная магнитная проницаемость изолирующей среды между анодом и катодом (в дальнейших формулах μ опускаем); $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; $J = I/b$ – линейная плотность тока; I – ток, протекающий через ускоряемую пластину; b – ширина пластины; $k \approx 0,45 \dots 1$ – конфигурационный коэффициент, учитывающий локализацию магнитного поля и, в нашем случае, зависящий от ширины токнесущей пластины b и расстояния до обратного токопровода.

В свою очередь, скорость движения пластины есть

$$V(t_0) = \int_0^{t_0} a(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{F(t)}{m} dt = \int_0^{t_0} \frac{S_L}{m} P(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{\rho \cdot d} P(t) dt \approx \frac{1}{\rho \cdot d} \int_0^{t_0} P(t) dt \quad (2)$$

где a – ускорение; m – масса ускоряемой пластины; S_L – площадь, на которую действует сила Лоренца-Ампера F ; ρ – плотность ускоряемой пластины; d – толщина пластины.

Подставляя (1) в (2), получим скорость движения флаера:

$$V(t_0) \approx \frac{k \mu \mu_0}{2\rho \cdot d b^2} \int_0^{t_0} I(t)^2 dt \quad (3)$$

1. Точное решение для скорости $V(t)$ и пролетного расстояния $s(t)$ в функции времени при прямом разряде конденсаторной батареи

$$\int_0^{t_0} I(t)^2 dt$$
$$\int_0^{t_0} \int_0^{t_0} I(t)^2 dt dt$$

Точное аналитическое решение для скорости пластины

$$V(t) = \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d_1 b^2} (F_{I^2}(t) - F_{I^2}(0))$$

пролетное пластиной расстояние

$$s(t) = \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d b^2} (F_V(t) - F_{I^2}(0) \cdot t - F_V(0))$$

где F_{I^2} – первообразная для $I(t)^2$; F_V – первообразная для $\int I(t)^2 dt$

Первообразные для функций $I(t)^2$ и $\int I(t)^2 dt$

$$f_0(t) = I(t)^2 = \left[\frac{U_0}{L_c \sqrt{\frac{1}{L_c C_0} - \frac{R^2}{4L_c^2}}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{1}{L_c C_0} - \frac{R^2}{4L_c^2}} \cdot t \right) \cdot e^{-\frac{R}{2L_c} t} \right]^2$$

L_c – индуктивность разрядного контура, R – активное сопротивление разрядного контура).

$$\int f_0(t) dt \rightarrow \frac{2 \cdot \frac{\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L_c} \cdot t \right)^2}{R} \cdot L_c \cdot C_0 \cdot U_0^2 + 2 \cdot \left[\frac{-1}{4} \cdot R \cdot C_0 \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \cos \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_0 \cdot L_c \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \sin \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] \right] \cdot C_0 \cdot U_0^2}{(-4) \cdot L_c + R^2 \cdot C_0}$$

$$\int f_0(t) dt \rightarrow \frac{(-2) \cdot \frac{\left(\frac{-1}{2} \cdot \frac{R}{L_c} \cdot t \right)^2}{R^2} \cdot L_c^2 \cdot C_0 \cdot U_0^2 + 2 \cdot \left[\frac{-1}{4} \cdot \left[\frac{-1}{4} \cdot R \cdot C_0 \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \cos \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_0 \cdot L_c \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \sin \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] \right] \cdot R \cdot C_0 + \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{-1}{4} \cdot \left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_0 \cdot L_c \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \cos \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] - \frac{1}{4} \cdot R \cdot C_0 \cdot e^{-\frac{R}{L_c} t} \cdot \sin \left[\left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot t \right] \right] \cdot \left(\frac{4}{C_0 L_c} - \frac{R^2}{L_c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C_0 \cdot L_c \right] \cdot C_0 \cdot U_0^2}{(-4) \cdot L_c + R^2 \cdot C_0}$$

2. Приближенное решение для скорости V при известном амплитудно-временном профиле тока (в т.ч. прямой разряд конденсаторной батареи)

Разгон пластины за первый полупериод $T/2$ разрядного тока.

Аппроксимируя на этом участке реальную функцию $I(t)^2$ «треугольником» (прямой от $I(0)^2 = 0$ до $I(T/4)^2 = I_{\max}^2$ и прямой от $I(T/4)^2 = I_{\max}^2$ до $I(T/2)^2 = 0$), получим

$$V_m(T/2) \approx \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d \cdot b^2} \frac{1}{2} I_{\max}^2 \cdot T/2 = \frac{k \mu_0}{8\rho \cdot d \cdot b^2} I_{\max}^2 \cdot T \quad (4)$$

В случае одиночного однополярного импульса $T/2 \approx 2 t_m$ (t_m – длительность фронта импульса)

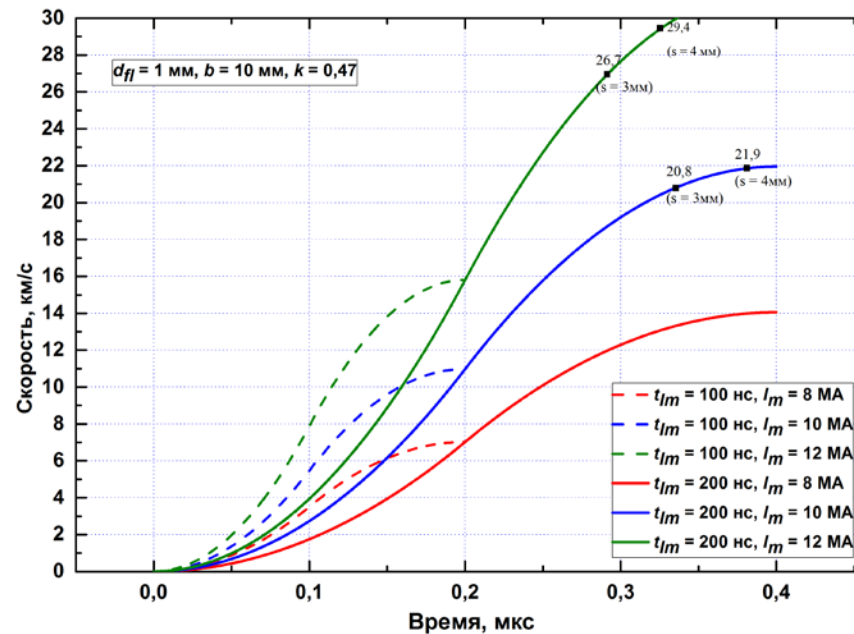
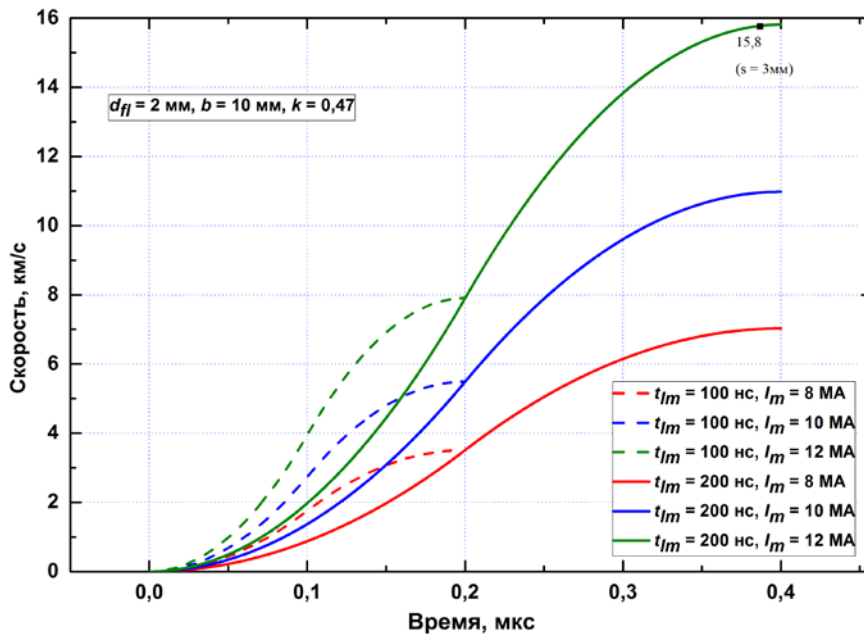
Оценка скорости V при известных (или предполагаемых) амплитуде, длительности фронта и общей длительности импульса тока

$$\begin{aligned} V(t \leq t_{\text{Im}}) &= \frac{k \mu_0}{4 \cdot \rho \cdot d \cdot b^2} \cdot I_m^2 \frac{t^2}{t_{\text{Im}}} \\ V(t > t_{\text{Im}}) &= \frac{k \mu_0}{2 \cdot \rho \cdot d \cdot b^2} \cdot I_m^2 \left(2 \cdot t - t_{\text{Im}} - \frac{t^2}{2 \cdot t_{\text{Im}}} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Если пластина не набирает оптимального ($s \sim 3 \dots 4$ мм) пролетного расстояния за время действия однополярного импульса, формула (4.1) упростится

$$V(t_n) = \frac{k \mu_0}{2 \cdot \rho \cdot d \cdot b^2} \cdot I_m^2 \cdot t_{\text{Im}} \quad (4.2)$$

Оценки по формуле (4.1) скорости флаеров для генераторов импульсных токов с $t_{Im} \sim 100$ и 200 нс



Скорости плоских алюминиевых лайнеров для генераторов импульсных токов с $t_{Im} \sim 100$ и 200 нс при различных амплитудах $I_m = 8, 10, 12$ МА. $b = 10$ мм; $k = 0,47$.

Т.о., интеграл действия тока, приближенно записанный в виде $I_m^2 \cdot t_{Im}$ ^[1] можно использовать как количественную характеристику возможностей сильноточной установки по разгону лайнеров (плоских и цилиндрических).

Полученные результаты в первом приближении также могут быть использованы для подбора оптимальных параметров установки, материала и размеров ускоряемой токонесущей пластины для получения максимальных V .

Отсутствие точной информации по оптимальному пролетному расстоянию не позволяет точно учесть ту часть интеграла действия тока, которая эффективно используется для разгона пластины. Т.о., для инженерных оценок, предполагается мощный импульс тока такой, что затратами энергии на деформацию ускоряемой токонесущей пластины можно пренебречь.

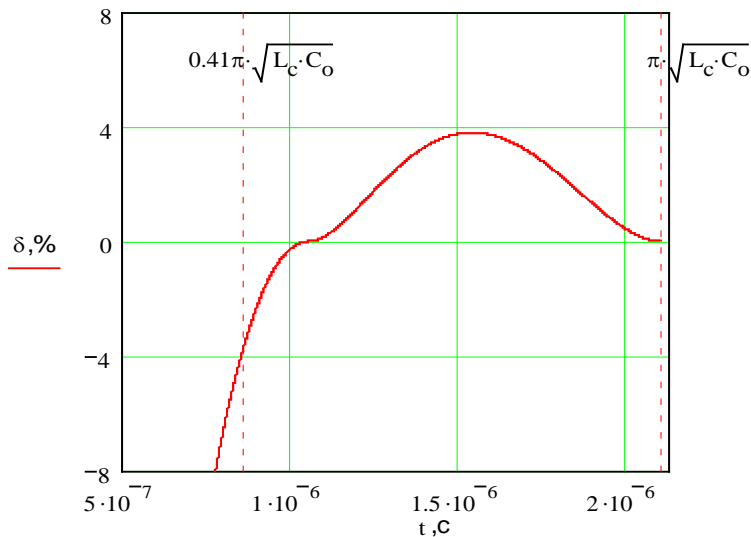
^[1] для однополярного или первого полупериода импульса тока.

2.1 Прямой разряд конденсаторной батареи

$$V_m(T/2) \approx \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d \cdot b^2} \frac{1}{2} I_{\max}^2 \cdot T/2 = \frac{k \mu_0}{8\rho \cdot d \cdot b^2} I_{\max}^2 \cdot T$$

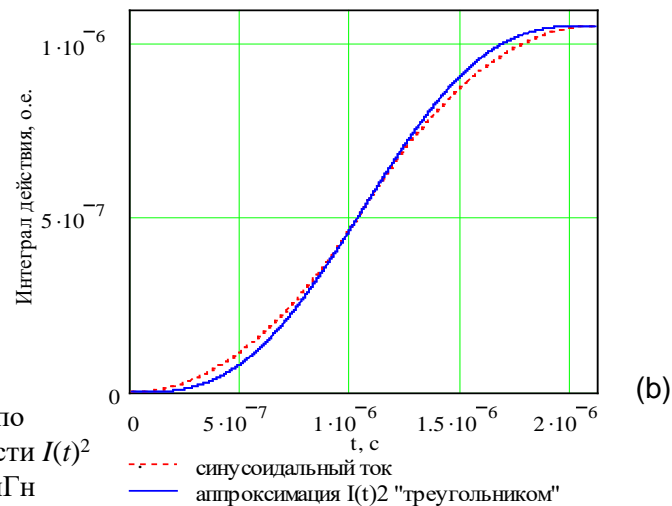
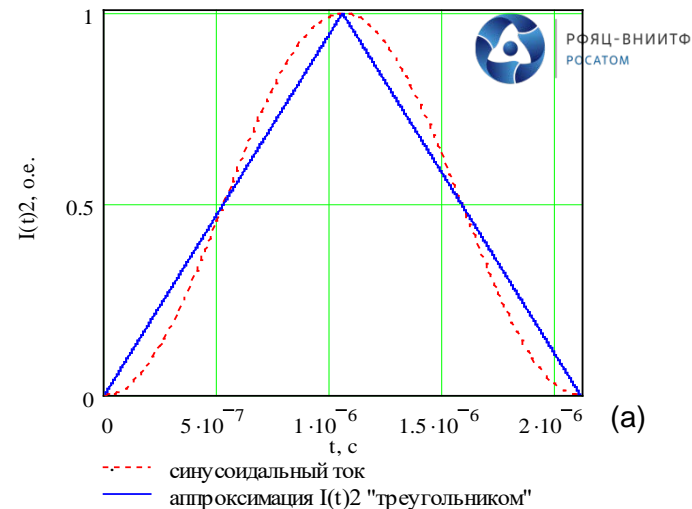
Погрешность приближенного решения

Погрешности δ вычисления интеграла действия при аппроксимации зависимости $I(t)^2$ «треугольником»



В общем случае, при $t \geq 0,41\pi \cdot (L_c C_0)^{0,5}$ погрешность расчета интеграла действия менее 3,8 %

Амплитудно-временные профили квадрата тока $I(t)^2$, в случае изменения тока по синусоидальному закону с единичной амплитудой и аппроксимации зависимости $I(t)^2$ «треугольником» (а); значения интеграла действия (б); $C_0 = 22,5$ мкФ, $L_c = 20$ нГн



Для случая прямого разряда конденсаторной батареи амплитуда тока определяется как ($\delta = R / 2L_c$ – коэффициент затухания, зависящий от активного сопротивления разрядного контура), а период разряда есть $T = 2\pi (L_c C_0)^{0,5}$, получим

$$V_m(T/2) \approx \frac{\pi}{4} \frac{k \mu_0}{\rho \cdot d b^2} \frac{U_0^2 C_0^{3/2}}{\sqrt{L_c}} e^{-2\delta t}$$

В случае колебательного режима разряда, считая, что амплитуда тока определяется экспоненциальным членом $e^{-\delta t}$ для момента времени $t = T/4$, найдем

$$V_m(T/2) \approx \frac{\pi}{4} \frac{k \mu_0}{\rho \cdot d b^2} \frac{U_0^2 C_0^{3/2}}{\sqrt{L_c}} e^{-\frac{\pi}{2} R \sqrt{C_0/L_c}}$$

Рассмотрим в данном линейном приближении ($L_c \approx \text{const}$, $R \approx \text{const}$) случай прямого разряда конденсаторной батареи при n ($n = 1, 2, 3, \dots$) полупериодах разрядного тока.

Максимальная скорость пластины V_m к моменту времени $t = n \cdot T/2$ в этом случае запишется:

$$\begin{aligned}
 V_m(n \cdot T/2) &\approx \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d b^2} \frac{1}{2} (I_{\max}^2(T/4) \cdot T/2 + I_{\max}^2(3T/4) \cdot T/2 + I_{\max}^2(5T/4) \cdot T/2 + \dots + \\
 &+ I_{\max}^2(nT/4) \cdot T/2) = \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d b^2} \frac{1}{2} (I_m^2(T/4) \cdot T/2 \cdot e^{-2\delta \cdot T/4} + I_m^2(3T/4) \cdot T/2 \cdot e^{-2\delta \cdot 3T/4} + \\
 &+ I_m^2(5T/4) \cdot T/2 \cdot e^{-2\delta \cdot 5T/4} + \dots + I_m^2(nT/4) \cdot T/2 \cdot e^{-2\delta \cdot nT/4}) = \\
 &= \frac{k \mu_0}{2\rho \cdot d b^2} \frac{\pi U_0^2 C_0^{3/2}}{2 \sqrt{L_c}} \left(e^{-\frac{\pi}{2} \cdot R \sqrt{C_0/L_c}} + e^{-\frac{3\pi}{2} \cdot R \sqrt{C_0/L_c}} + e^{-\frac{5\pi}{2} \cdot R \sqrt{C_0/L_c}} + \dots + e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2} \cdot R \sqrt{C_0/L_c}} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{L_c / C_0}}$$

Данное выражения несколько (до ~ 7 %) занижает амплитуду тока по сравнению с точным аналитическим решением –

$$I_m = \frac{U_0}{\sqrt{L_c / C_0 - R^2 / 4}}$$

Окончательно получим:

$$V_m(n \cdot T/2) \approx \frac{\pi}{4} \frac{k \mu_0}{\rho \cdot d b^2} \frac{U_0^2 C_0^{3/2}}{\sqrt{L_c}} \sum_{k=1}^{2n-1} e^{-\frac{k\pi}{2} R \sqrt{C_0/L_c}} .$$

Заключение

Полученные аналитические уравнения позволяют прогнозировать достижимые флаером скорости при приближенно известном амплитудно-временном профиле тока или известных параметрах разрядного контура (в случае прямого разряда конденсаторной батареи).

Для оценок необходимо знать параметры пластины, амплитуду тока, время достижения током своего максимума и (при необходимости) длительность импульса тока (однополярный импульс).

Полученные выражения позволяет оценить скорость пластины при неизвестном или неточном амплитудно-временном профиле тока, что актуально для новых проектируемых ЭФУ (точный амплитудно-временной профиль тока которых изначально не известен).