

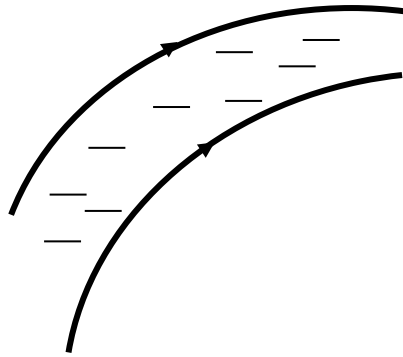


РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

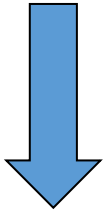
Численное моделирование развития турбулентного перемешивания в многокомпонентных течениях с ударными волнами

Глазырин И.В.

Ламинарно-турбулентный переход для «свободного» течения в неограниченном объёме

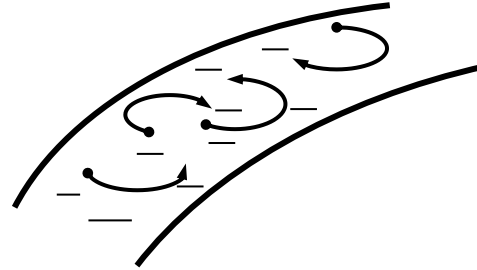


**Ламинарное
течение**

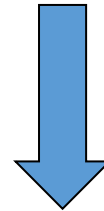


$(Re \leq Re_{кр})$

линии тока непрерывны и не происходит перемешивание слоев газа



**Турбулентное
течение**



$(Re > Re_{кр})$

возникают завихрения, скорость частиц газа хаотически изменяется, линии тока претерпевают разрывы

Число Рейнольдса показывает отношение инерционных и вязких сил

$$Re = \frac{\rho L u}{\eta}$$

ρ – плотность, u – скорость, L – характерный масштаб, η – динамическая вязкость

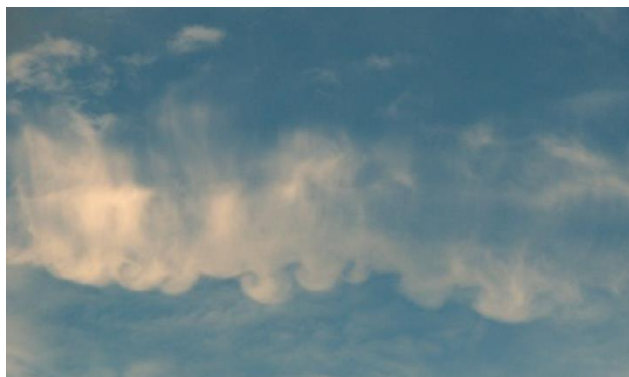
Переход к развитой турбулентности осуществляется при $Re_{кр} \sim (1 \div 2) \cdot 10^4$ для сжимаемых течений газа с Ударными Волнами

Турбулентность – «...одна из нерешённых проблем классической физики...»

Возникновение неустойчивого и турбулентного течений в Физике Больших Плотностей Энергии

Астрофизика, атмосферные явления, инерциальный термоядерный синтез, океанские течения, затопленная струя, горение, детонация,...

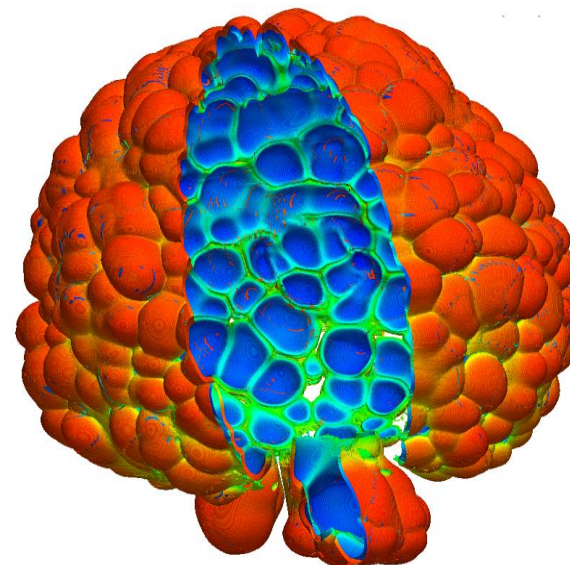
Есть условия для развития неустойчивостей *Кельвина-Гельмгольца, Релея-Тейлора, Рихтмайера-Мешкова*



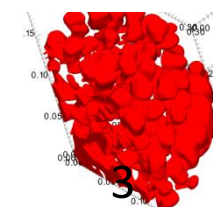
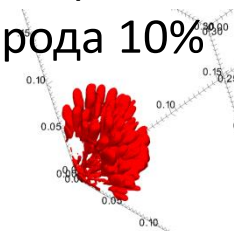
Башенкообразные перистые облака возникают из-за неустойчивости Релея-Тейлора



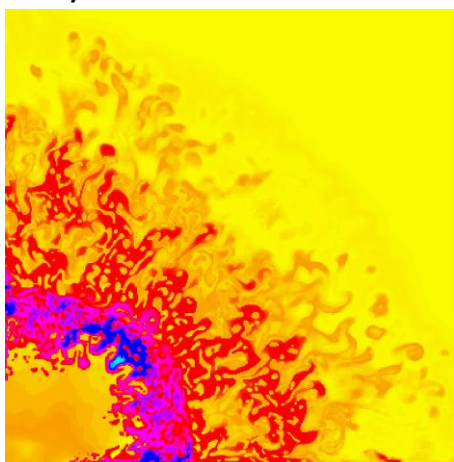
Крабовидная туманность — из-за взаимодействия УВ с межзвёздным веществом, неустойчивостей КГ, РТ и РМ



«Ячеистое»
горение
водородо-
воздушной
смеси
наблюдается
при
концентрации
водорода 10%

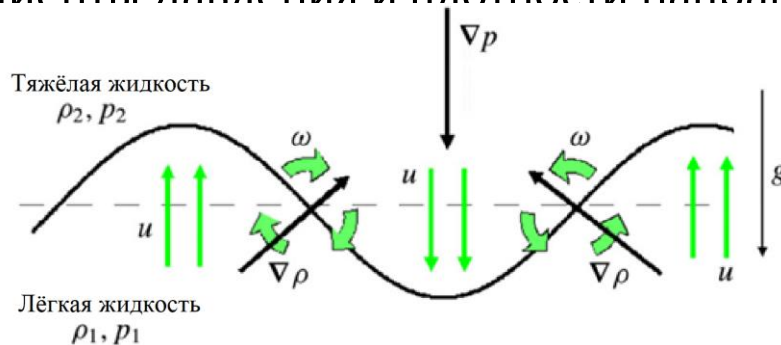


Развитие возмущений при сжатии мишеней Инерциального Термоядерного Синтеза



Неустойчивость Релея-Тейлора

- Возникает на границе разноплотных веществ, находящихся в гравитационном поле
- Условие: градиенты давления и плотности направлены в разные стороны ($\nabla \rho \cdot \nabla p < 0$)



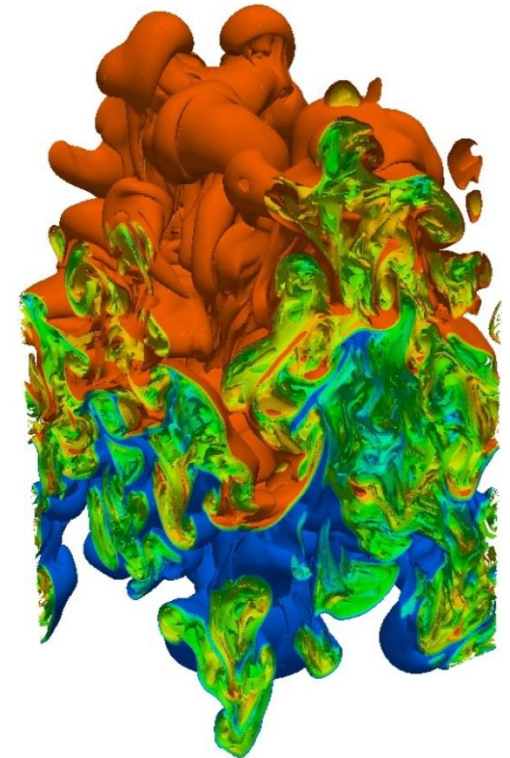
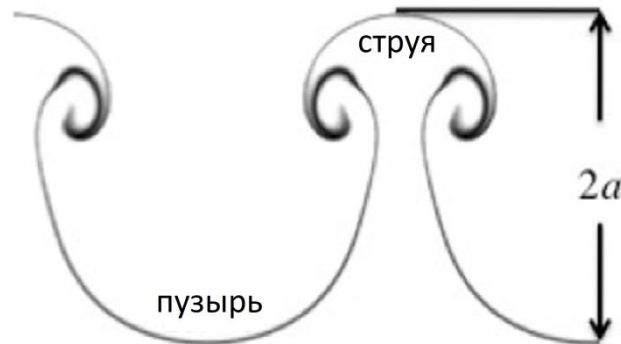
Рост амплитуды a малого одномодового возмущения на границе раздела $\frac{d^2 a}{dt^2} = gkAa$

g – ускорение свободного падения;

$k = 2\pi/\lambda$ – волновое число;

$A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ – число Атвуда; ρ_1 – плотность лёгкого вещества, ρ_2 – плотность тяжёлого вещества.

Инкремент роста: $\gamma = \pm (gkA)^{1/2}$



Поле концентрации «тяжёлого» газа на момент времени 20с. Число Атвуда 0.5

Неустойчивость Рихтмайера-Мешкова

Возникает при прохождении ударной волны через границу раздела двух веществ разной плотности либо разной сжимаемости $\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T=const}$

Инкремент роста: $\frac{d^2 a}{dt^2} = k A \Delta V \delta(t) a_0$

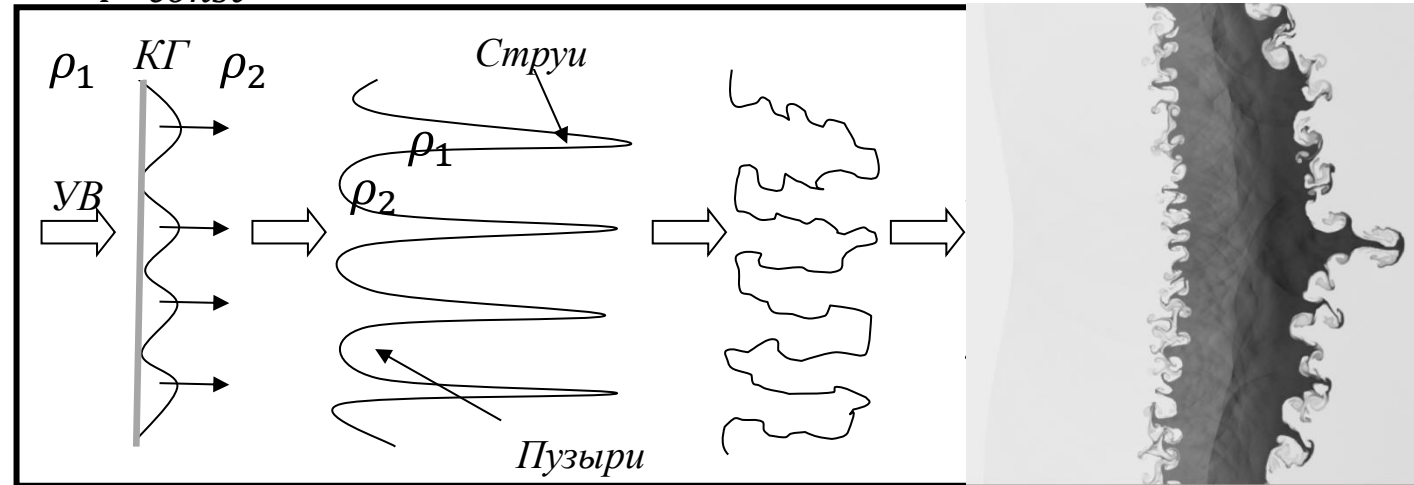
$g = \Delta V \delta(t)$

$\delta(t)$ – дельта-функция Дирака

ΔV – скачок скорости на границе веществ

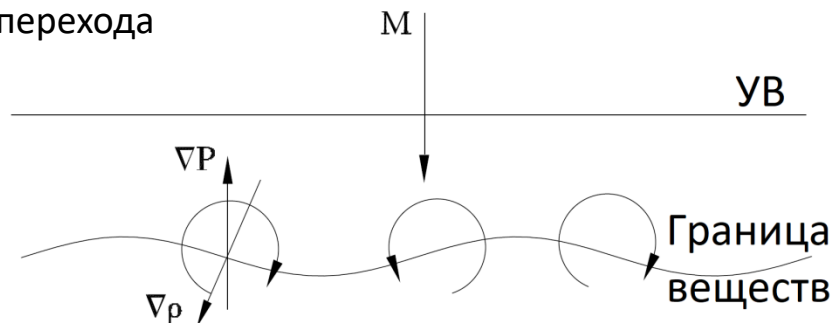
a_0 – начальная амплитуда

$da / dt = k A^\pm \Delta V a_0^\pm$ “-” – значение до разрыва
“+” – значение после разрыва



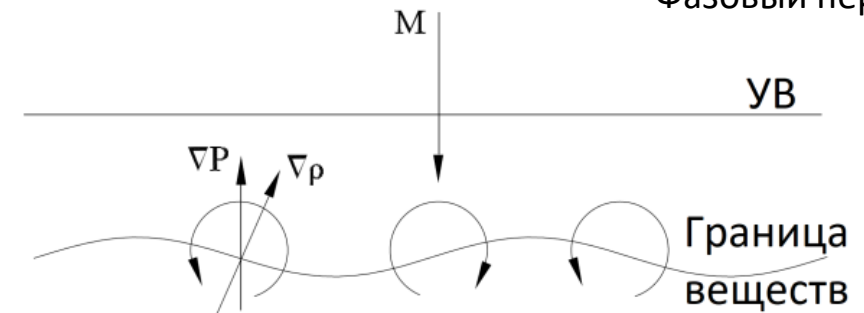
УВ движется из лёгкой в тяжёлую жидкость.

Нет фазового перехода



УВ движется из тяжёлой в лёгкую жидкость.

Фазовый переход

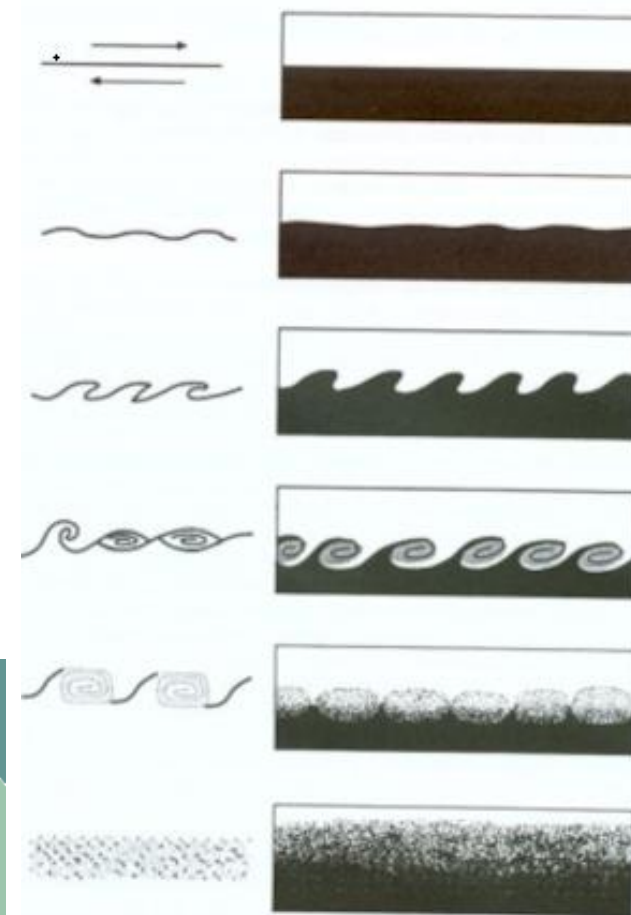
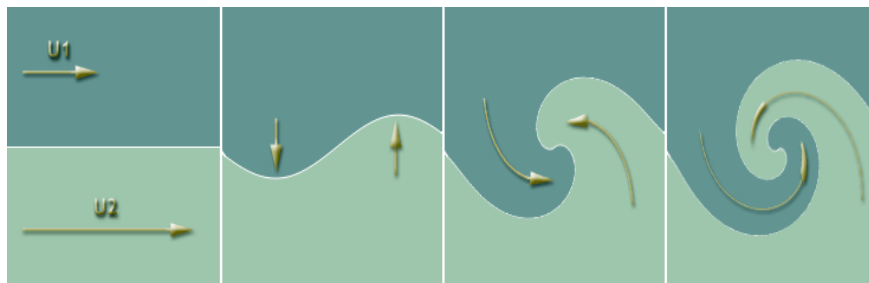


- Верхний слой более лёгкой жидкости движется вправо, нижний слой более тяжёлой жидкости - влево, на границе слоев имеется сдвиг скорости
- Волны на границе оказываются неустойчивыми - они растут, затем опрокидываются, образуя вихри
- С течением времени опрокидывающиеся волны заполняют вихрями область границы
- Образуется турбулентный слой

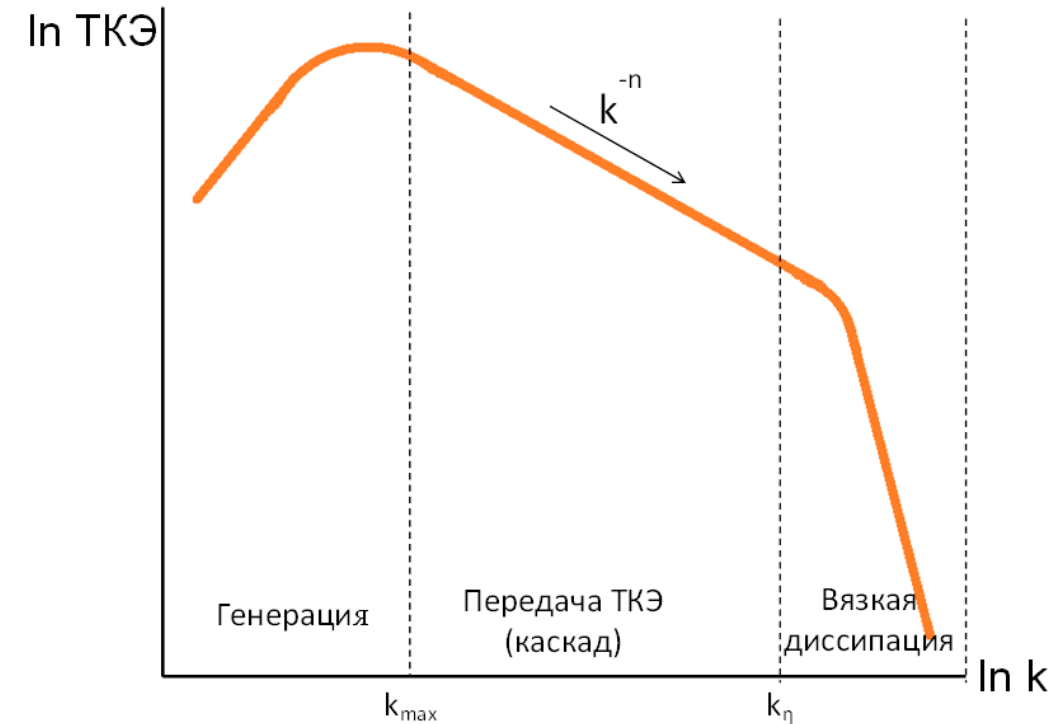
Инкремент роста НКГ:

$$\gamma = \pm \left\{ gkA + \rho_1 \rho_2 k^2 \left[\frac{V_1 - V_2}{\rho_1 + \rho_2} \right]^2 \right\}^{1/2} - ik \left\{ \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2} \right\}$$

V_1, V_2 – скорости жидкостей



Турбулентность – это «...завихренное течение с очень большим числом возбужденных степеней свободы и с хаотическим распределением дисперсионных соотношений и фазовых сдвигов...»



При больших числах Рейнольдса мелкомасштабные турбулентные движения однородны, изотропны и не зависят от крупномасштабных движений (**локально изотропная турбулентность**)

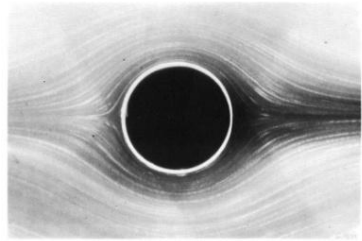
Статистические характеристики мелкомасштабных компонент развитой турбулентности определяются двумя размерными параметрами: удельной диссипацией ε Турбулентной Кинетической Энергии (ТКЭ) и вязкостью η

$k_{\max} \sim 1/L$, $k_{\eta} \sim 1/l_{\eta}$, L – характерный масштаб течения, l_{η} – диссипативный масштаб.

$L/l_{\eta} \sim \text{Re}^{3/4}$. Для $\text{Re} \sim 10^4$ отношение масштабов $\sim 10^3$ - **очень много!**

Статистические характеристики компонентов развитой турбулентности в **инерционном интервале** определяются **единственным размерным параметром ε**

Переход ламинарного течения в турбулентное



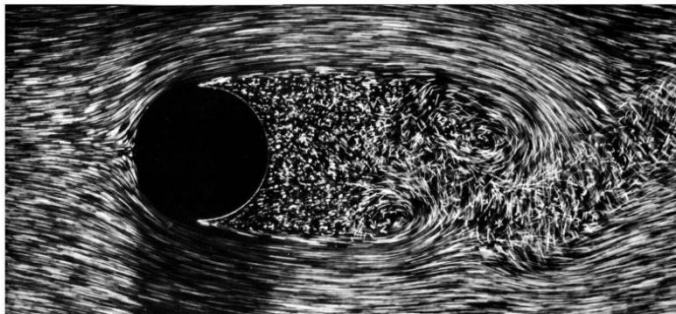
$Re = 0.16$

Образование вихревой дорожки Кармана при обтекании газом протяжённых цилиндрических тел

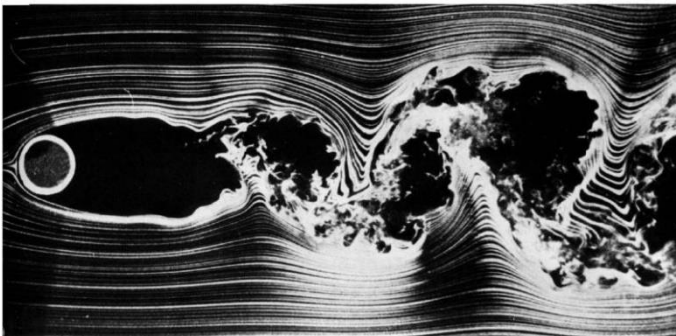
Численное моделирование



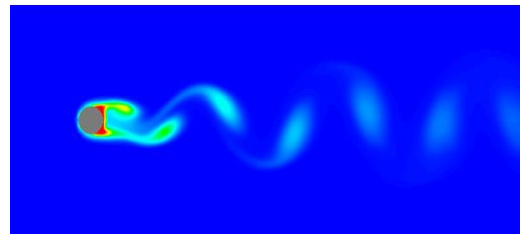
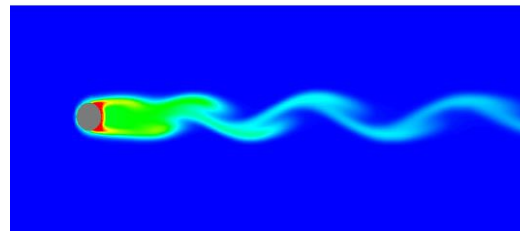
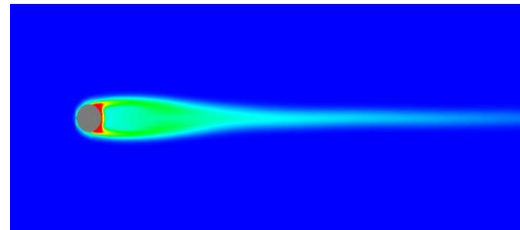
$Re = 140$



$Re = 2000$



$Re = 10000$



Свободная (вдали от стенок) турбулентность не всегда локально изотропна. Часто на фоне крупных вихрей, движение которых является скорее упорядоченным, чем хаотичным, развиваются хаотичные мелкомасштабные завихрения. Такие организованные вихревые структуры, сравнимые по размеру с масштабом области течения, называют **когерентными**. Они захватывают новые порции из внешнего ламинарного потока внутрь турбулизированной области. В результате через эйлеровую точку проходит то турбулентный, то ламинарный поток. Это явление **перемежаемости** сложно моделировать

Подходы к численному моделированию турбулентности



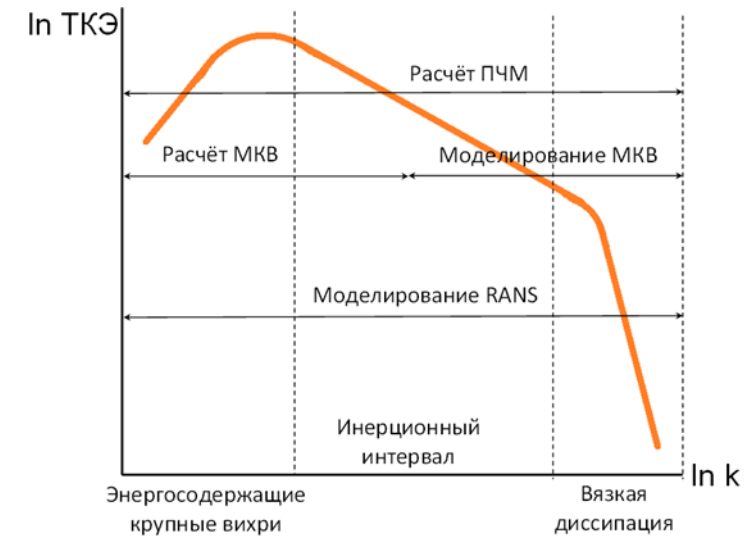
РФАЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

Прямое Численное Моделирование (ПЧМ). Решение уравнений Навье-Стокса на сетке с шагом = колмогоровского масштаба, т.е. $1/1000$ от длины волны энергонесущих вихрей $\rightarrow$ вдоль одного направления количество ячеек $>10^4$, в 3D количество ячеек $>10^{12}$. Превышает возможности современных вычислительных комплексов. *DNS можно использовать для задач с $Re < 10^3$.*

Решение систем уравнений, осредненных по Рейнольдсу (Reynolds Averaged Numerical Simulation, RANS).

$$\bar{a}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} a(\tau) \cdot d\tau$$

Применение осреднения к системе уравнений Навье-Стокса приводит к получению не замкнутой системы. Замыкание - определение турбулентных напряжений $\tau_{ij}^T = \rho \overline{u_i' u_j'}$ производится с помощью полуэмпирических моделей турбулентности – K-Eps, НиК, BHR и др. *Моделируется весь спектр вихрей.*

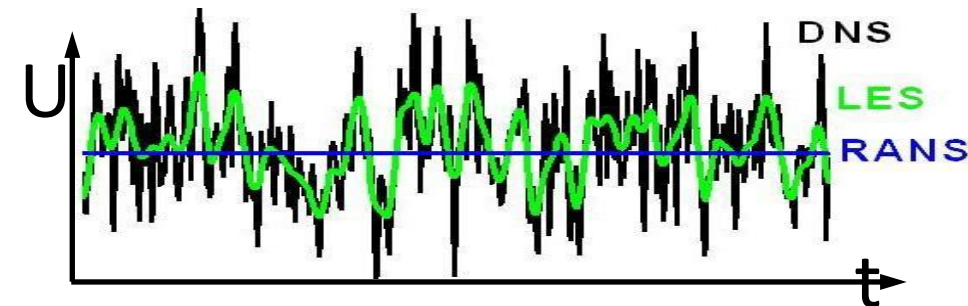


Вихреразрешающее моделирование Методом Крупных Вихрей (МКВ)

- **Фильтрация:** разделение вихрей на «крупные» (больше размера Δ) и «мелкие»

$$\bar{f}(r, t) = \int_V G(r, r') f(r', t) dr'^3, \quad f = \bar{f} + f'$$

- **Отфильтрованные Крупные Вихри:** разрешаются точно
- **Подсеточная модель:** описание «мелких» вихрей и их взаимодействие с «крупными» моделируется. Граница между «крупными» и «мелкими» вихрями лежит в области инерционного интервала



Движение вязкой теплопроводной жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) E + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \Phi - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{cases}$$

$$p = p(\rho, e)$$

уравнение неразрывности

уравнение для импульса

уравнение энергии

уравнение состояния

тензор вязких напряжений

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$$

внутренняя энергия

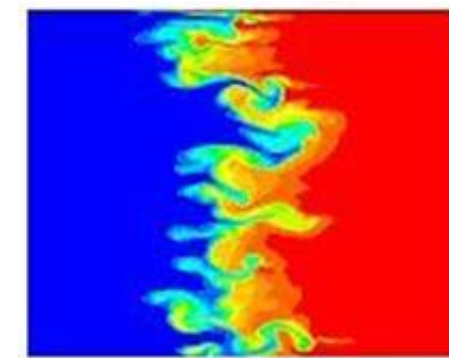
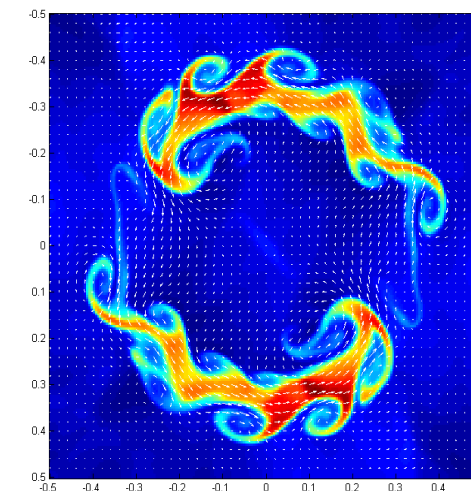
$$e = e(\rho, p)$$

диссипативная функция

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2$$

поток тепла

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, k = \frac{\mu c_p}{Pr}, Pr = const$$



Развитие зоны
турбулентного
перемешивания

Формы записи уравнений Навье-Стокса

Консервативная

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{f}_x - \mathbf{f}_x^V)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{f}_y - \mathbf{f}_y^V)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{f}_z - \mathbf{f}_z^V)}{\partial z} = 0$$

Интегральная

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{q} dV + \oint_S (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_i^V) n_i dS = 0$$

вектор консервативных величин

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ E \end{bmatrix}$$

векторы потоков

$$\mathbf{f}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x u_z \\ (E + p)u_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_y^2 + p \\ \rho u_y u_z \\ (E + p)u_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_z = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z \\ \rho u_y u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ (E + p)u_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_i^V = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{ix} \\ \tau_{iy} \\ \tau_{iz} \\ (E + p)u_i + \tau_{ij}u_j - q_i \end{bmatrix}$$

полная энергия

$$E = \rho \left(e + \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right)$$

Неустойчивости в ФВПЭ возникают в многокомпонентной среде

Для вычисления количества вещества ν используется *молярная масса* M

$$M = \sum_{k=1}^n x_k M_k$$

$$x_n = \frac{\nu_n}{\sum_{k=1}^n \nu_k} - \text{мольная доля}$$

$$\omega_n = \frac{m_n}{\sum_{k=1}^n m_k} = \frac{\rho_n V}{\sum_{k=1}^n \rho_k V} = \frac{\rho_n}{\rho} - \text{массовая доля;}$$

$$\sum_{k=1}^n \omega_k = 1$$

$$\nu_n = \frac{m_n}{M_n} = \frac{\rho \omega_n}{M_n} = \frac{\rho_n}{M_n} - \text{количество вещества}$$

$\rho = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k$ - плотность смеси, где α_k - объемная доля k -ой компоненты

$$\alpha_k = \frac{\omega_k \rho}{\rho_k}, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad \frac{1}{\rho} = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{\rho_k}$$

$$M = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{\rho_k}{M_k} \cdot M_k}{\sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{M_j}} = \frac{\rho \cdot \frac{1}{\rho}}{\sum_{j=1}^n \frac{\rho_j}{M_j} \cdot \frac{1}{\rho}} \longrightarrow M = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{M_k}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{s},$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \omega_n \\ \rho u_x \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \rho \omega_n u_x \\ \rho u_x^2 + p \\ u_x (\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -(\mathbf{j}_n)_x \\ \frac{4}{3} (\mu u_x)_x \\ \frac{4}{3} (\mu u u_x)_x + (\lambda T_x + \sum_{i=1}^n \vec{j}_i^M h_i)_x \end{pmatrix}$$

где ρ – плотность смеси;

$\omega_n = \frac{\rho_n}{\rho}$ – массовая доля n -го компонента;

$p = \frac{\rho}{M} \frac{e}{C_V} R$ – УРС Менделеева-Клапейрона для смеси ;

$\gamma = 1 + \frac{R}{C_V^M M}$ – показатель адиабаты;

$C_V^M = \sum_{i=1}^n \omega_i C_{V_i}^M$ – массовая теплоемкость;

$M = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{M_i}}$ молярная масса смеси.

Система уравнений Навье-Стокса включает в себя уравнения газовой динамики с добавлением диффузионных потоков.

$$S = \left(\begin{array}{c} -(j_n)_x \\ \frac{4}{3} (\mu u_x)_x \\ \frac{4}{3} (\mu u u_x)_x + (\lambda T_x + \sum_{i=1}^n \vec{j}_i^M h_i)_x \end{array} \right)$$

$\frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ – плотность потока импульса,
где μ – коэффициент динамической вязкости
 $\mu = \rho \nu$,
 ν – коэффициент кинематической вязкости;

j_n – диффузионный поток n – ой компоненты
(плотность потока массы)

$$j_k = -\rho D \frac{\partial \omega_n}{\partial x},$$

где D – коэффициент диффузии;

ω_k – массовая доля k – ой компоненты.

$-\lambda T_x + \sum_{i=1}^n \vec{j}_i^M h_i$ – плотность потока энергии,
где λ – коэффициент теплопроводности;

$h_n = e_n + \frac{p_n}{\rho}$ – энтальпия;

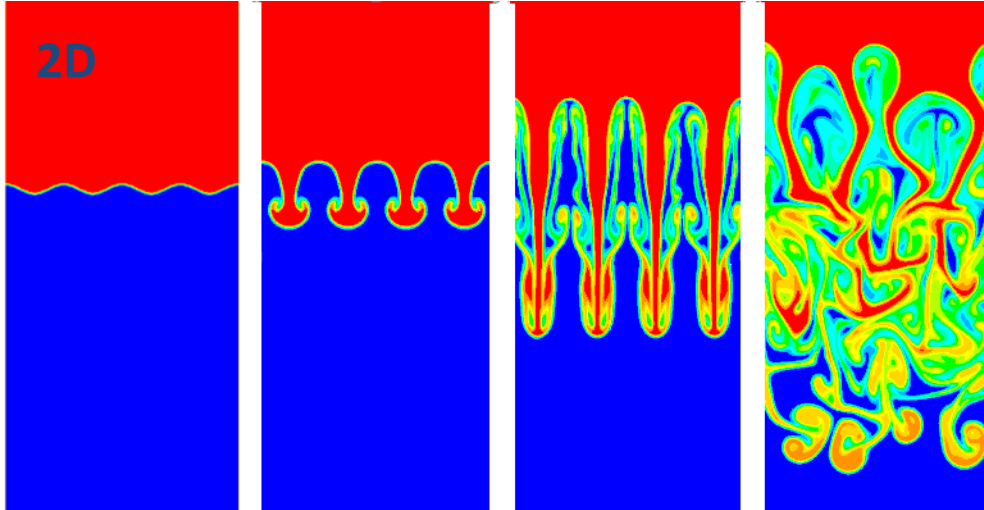
$e_n = C_{V_n} T$ – внутренняя энергия;

C_{V_n} – теплоемкость n – ой компоненты;

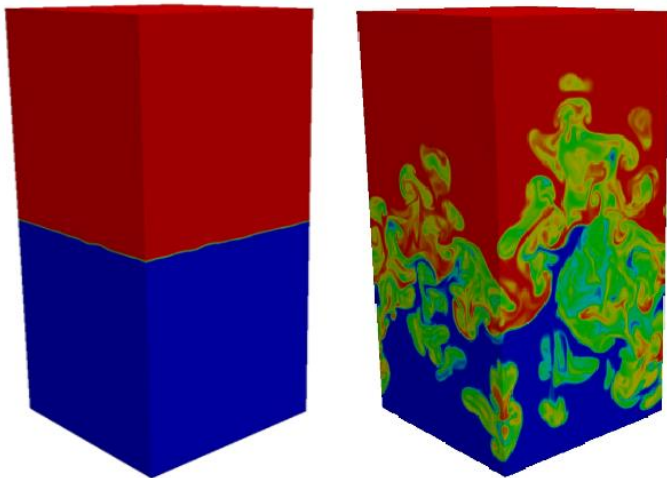
$p_n = \frac{\rho_n}{M_n} RT$ – УРС Менделеева-Клапейрона.

Для разрешения всех масштабов турбулентности нужны очень подробные разностные сетки

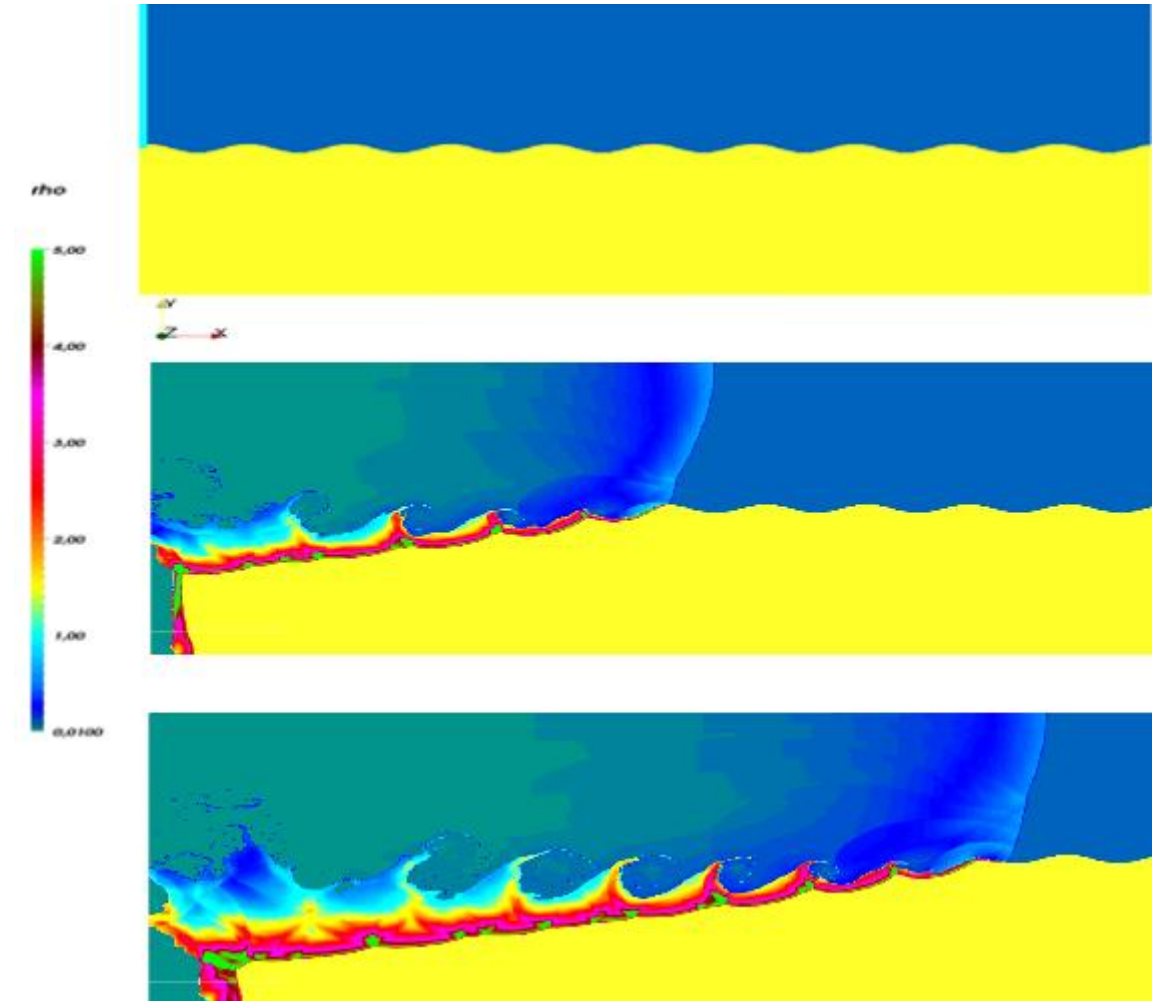
неустойчивость Релея-Тейлора



3D



неустойчивость Кельвина-Гельмгольца



Усреднение по Рейнольдсу
 $f(x_j, t) = \overline{f(x_j, t)} + f(x_j, t)'$

Усреднение по Фавру
 $f(x_j, t) = \widetilde{f(x_j, t)} + f(x_j, t)''$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{\omega}_n)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{\omega}_n\tilde{u}_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(D + \frac{\nu_t}{Sc} \right) \bar{\rho} \frac{\partial(\tilde{\omega}_n)}{\partial x_j} \right) \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_l)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_l\tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}R_{lj} &= -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}\delta_{lj} + \frac{\partial\bar{\sigma}_{lj}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j}(R_{lj}\tilde{u}_l) &= \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda + \frac{\bar{\rho}\nu_t\bar{C}_V}{Pr} \right) \frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\sigma}_{lj}\tilde{u}_l) - \frac{\partial\bar{H}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{p}\tilde{u}_j + \bar{p}u_j'') \end{aligned} \right.$$

где ρ – плотность смеси;

$\omega_n = \frac{\rho_n}{\rho}$ – массовая доля;

u – скорость;

p – давление;

$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$ – турбулентная кинематическая вязкость;

$k = \frac{\overline{u_j''^2}}{2}$ – турбулентная кинетическая энергия;

$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_l''}{\partial x_j} \right)^2$ – диссипация турбулентной кинетической энергии;

$R_{lj} = -\overline{\rho u_l'' u_j''} = \bar{\rho} \nu_t \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{lj} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{lj}$ – тензор Рейнольдса;

$\bar{\sigma}_{lj} = \bar{\rho} \nu_t \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \right) - \frac{2}{3} \delta_{lj} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \right)$ – тензор вязких напряжений;

D – коэффициент диффузии;

λ – коэффициент теплопроводности;

Sc, C_μ, Pr – безразмерные константы;

$\bar{H} = \sum \bar{J}_n \bar{h}_n, \bar{h}_n = \bar{C}_{Vn} \tilde{T} + \frac{R\tilde{T}}{M_n}$ – энтальпия n -ой ком-ты;

$\tilde{E} = \frac{\tilde{u}_j^2}{2} + \tilde{e} + k$ – полная энергия;

$p = (\gamma - 1)\rho e$ – УРС идеального газа;

$\gamma = 1 + \frac{R}{C_V^M M}$ – показатель адиабаты;

$M = \frac{1}{\sum \frac{\omega_n}{M_n}}$ – молярная масса смеси;

$C_V^M = \sum \omega_n C_{Vn}^M$ – массовая теплоемкость.

Для замыкания усредненных уравнений Навье-Стокса применяется $k - \varepsilon$ модель турбулентности

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}k\tilde{u}_j) = G_b + G_s - \bar{\rho}\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \rho \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\varepsilon\tilde{u}_j) = \frac{\varepsilon}{k} \left(C_0 G_b + C_1 R_{lj}^d \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j} \right) - C_2 \bar{\rho} \frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{2}{3} C_3 \bar{\rho} \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$$

где $G_s = R_{lj} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j}$ – генерационный член сдвиговой турбулентности;

$G_b = -\overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$ – генерационный член гравитационной турбулентности;

$$\overline{u''} = \frac{\nu_t}{\sigma_\rho} \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right);$$

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma_\rho, C_0, C_1, C_2, C_3$ – эмпирические константы.

Аврамеко М.И. О $k-\varepsilon$ модели турбулентности. – 2-е изд., перераб. и дополн. – Снежинск: Из-во РФЯЦ – ВНИИТФ, 2010. – 102 с.

Schilling, O.: Application of a $K-\varepsilon$ Turbulence Model to Reshocked Richtmyer-Meshkov Instability Corresponding to a Heavy-to-Light Gas Transition. Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7) Conference Proceedings (2012)

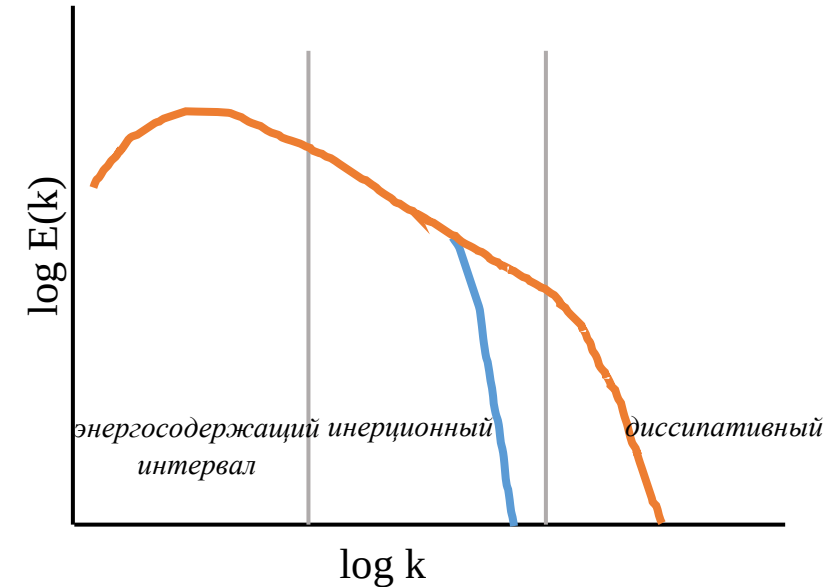
- Основная идея: движение крупных вихрей рассчитывается прямо из нестационарных уравнений Навье-Стокса, вклад мелкомасштабной турбулентности учитывается с помощью подсеточной модели
- Выделение крупномасштабных движений производится с помощью процедуры фильтрации

$$\bar{u}(x, t) = \int G(x - x') u(x', t) dx'$$

- Примеры фильтров:

$$G_G = \sqrt{6 / \pi \Delta^2} \exp(-6x^2 / \Delta^2)$$

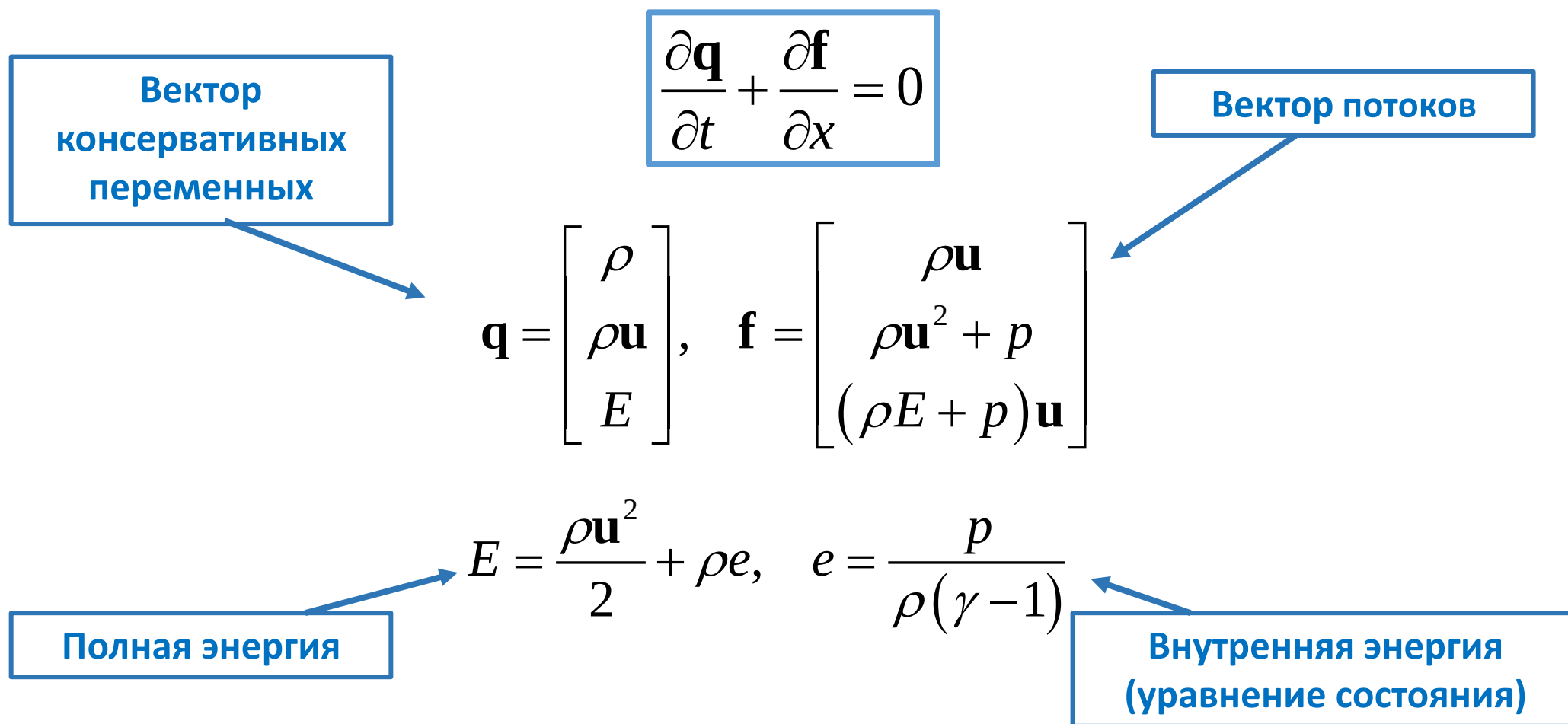
$$G_B = \begin{cases} 1 / \Delta, & \text{при } |x| \leq \Delta / 2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$



- После фильтрации в уравнениях появляются новые неизвестные члены. Для их вычисления используются подсеточные модели.

Считаем, что газ – это сплошная среда: $I/L \ll 1$, где I – длина свободного пробега, L – характерный размер задачи.

Дивергентная форма записи (в форме законов сохранения)



$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = 0$$

Характеристическая
форма

Матрица
Якоби

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{u}^2 + \theta b & 2\mathbf{u} - \mathbf{u}b & b \\ -\mathbf{u}h + \mathbf{u}\theta b & h - \mathbf{u}^2 b & \mathbf{u} + \mathbf{u}b \end{bmatrix}$$

$$p_e = \left(\frac{\partial p}{\partial e} \right)_\rho, \quad p_\rho = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_e, \quad h = \frac{E + p}{\rho}, \quad \theta = \mathbf{u}^2 - \frac{E}{\rho} + \frac{\rho p_\rho}{p_e}, \quad b = \frac{p_e}{\rho}$$

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} - \lambda \mathbf{I} \right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mathbf{u} + c \\ \lambda_2 = \mathbf{u} \\ \lambda_3 = \mathbf{u} - c \end{cases}$$

Скорость звука

$$c = \sqrt{p_\rho + \frac{\rho p_e}{\rho^2}}$$

Решение в одномерном плоском случае. Скалярный закон сохранения

Задача Коши:

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$f(u) = au$ -- линейное ур-е переноса

$f(u) = u^2/2$ -- невязкое ур-е Бюргерса

Неконсервативная форма:
(дифференцирование f'_x)

$$u_t + a(u)u_x = 0, \quad a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}$$

Интегральная форма:
(интегрирование на $x \in [a, b]$)

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(t, a)) - f(u(t, b))$$

Решение линейного уравнения перенос $u(x, t) = \varphi(x - at)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} = 0, \quad \text{если } \frac{dx}{dt} = a$$

На плоскости $(x - t)$ гиперболическое уравнение превращается в ОДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(u(t, x(t)))$$

Если решение *дифференцируемо*, то вдоль характеристик оно постоянно

$$\frac{du(t(x(t)))}{dt} = u_t + \frac{dx(t)}{dt} u_x = u_t + a(u) u_x = 0$$

Если решение задачи Коши *дифференцируемо*, то оно определяется неявной формулой

$$u = \varphi(x - a(u)t)$$

Решение может иметь разрыв функции или разрыв производной. Обобщённое решение удовлетворяет интегральному закону сохранения

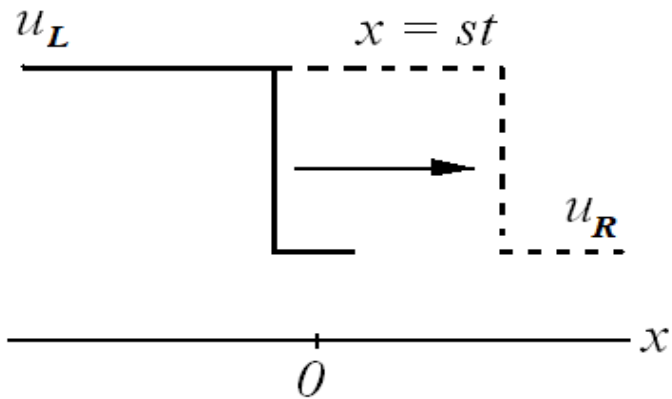
$$\int_{t_1}^{t_2} \int_a^b \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right] dx dt = -0 \quad \forall t_1, t_2, a, b$$

Пробная функция $\eta(x, t)$ непрерывно дифференцируемая, ограниченная, обращается в нуль за границами промежутка

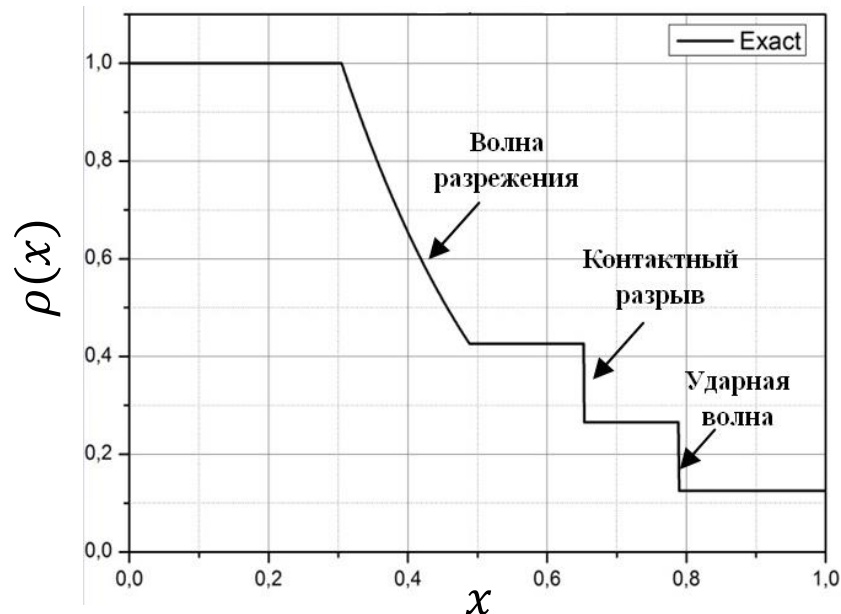
Слабое решение $u(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \eta_t u + \eta_x f(u) dx dt = - \int_{-\infty}^\infty \eta_t(x, 0) + u(x, 0) dx, \quad u(x, 0) = \phi(x)$$

s – скорость движения разрыва
 $x(t)$ – траектория
 u_L – значение u слева от разрыва
 u_R – значение u справа от разрыва



Задача Сода. Профиль плотности



Соотношения Ренкина-Гюгонио:

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - D) = \rho_0(\mathbf{u}_0 - D)$$

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - D)^2 + p_1 = \rho_0(\mathbf{u}_0 - D)^2 + p_0$$

$$\rho_1(\mathbf{u}_1 - D) \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\mathbf{u}_1^2}{2} \right) = \rho_0(\mathbf{u}_0 - D) \left(e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{\mathbf{u}_0^2}{2} \right)$$

Разрывы

Ударные волны

$$\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_0$$

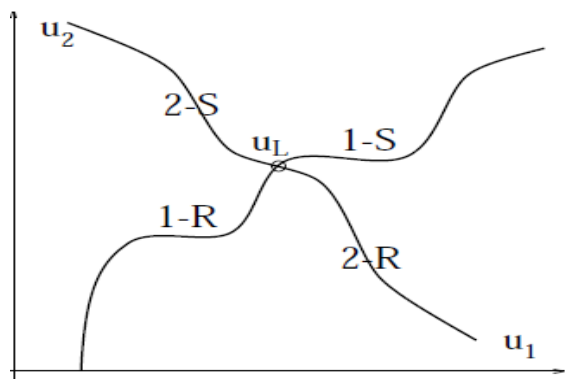
$$p_1 \neq p_0$$

$$\rho_1 \neq \rho_0$$

Контактные – нет
потока массы
вещества через
разрыв

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 = D$$

$$p_1 = p_0, \rho_1 \neq \rho_0$$



Для заданного состояния $\mathbf{u}_L$ существует однопараметрическое семейство состояний

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}(p), \quad -p_0 \leq p \leq p_0,$$

которые связаны либо посредством УВ $p \leq 0$, либо волны разрежения $p \geq 0$.

k -инвариант Римана - это гладкая скалярная функция $w(u_1, u_2, \dots, u_n)$:

$$\mathbf{r}_k^T \nabla_{\mathbf{u}} w = 0$$

Существует $(n-1)$ k -инвариантов Римана с линейно независимыми градиентами

Преобразование координат $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u})$ приводит векторное поле $\mathbf{r}_k^T \nabla_{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_i}$ к виду $\frac{\partial}{\partial v_1}$.

Выберем $w_1(\mathbf{v}) = v_2, \dots, w_{n-1}(\mathbf{v}) = v_n$. Тогда функции w_i , $i=1, \dots, n$ удовлетворяют уравнению $\frac{\partial w_i}{\partial v_1} = 0$ и имеют линейно независимые градиенты. Обратное преобразование даёт функции $w_i(\mathbf{u})$, которые обладают желаемыми свойствами

k -инварианты Римана постоянны в k -м характеристическом поле постоянны в волне разрежения.

Решение в волне разрежения удовлетворяют соотношению $\mathbf{u}'(\xi) = \mathbf{r}_k(\mathbf{u}(\xi))$.

Пусть $w = \text{const}$ есть k -инвариант Римана. Тогда в волне разрежения $\frac{dw}{d\xi} = 0$.

Связь двух состояний через волну разрежения $w_i(\mathbf{u}_L) = w_i(\mathbf{u}_R), \quad i = 1, \dots, n-1$

**Численное моделирование на базе усреднённых
уравнений Навье-Стокса.
Расчёты турбулентных течений с использованием k - ε
модели**

Для пространственной переменной x введём равномерную сетку ячеек N с шагом Δx

$$\Delta x = \frac{L}{N}, \quad \text{где } L - \text{длина области, } N - \text{число ячеек.}$$

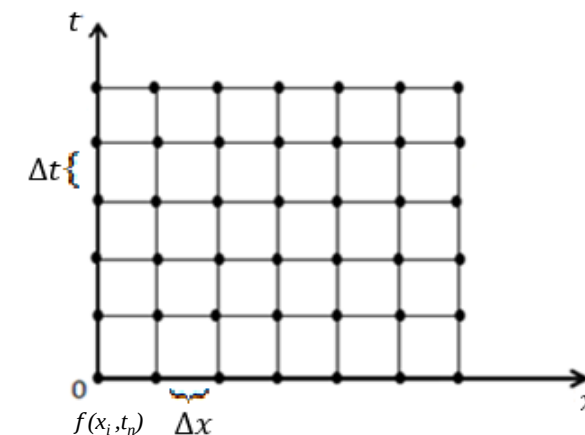
Введем сетку по времени $t_n = n \cdot \Delta t$, $n = 0, 1 \dots, n$ – временные слои, Δt – шаг

$$\Delta t = K \cdot \frac{\Delta x}{S_{\max}}, \quad \text{где } S_{\max} = \max(|u - c|, |u + c|) - \text{максимальная скорость распространения}$$

возмущений;

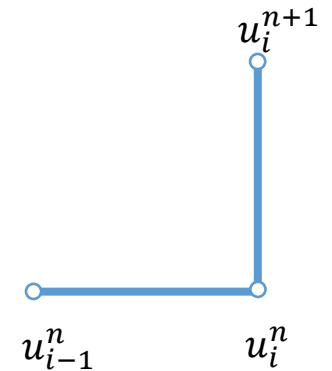
$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} - \text{скорость звука; } K - \text{число Куранта.}$$

Значения функции в центрах ячеек будем обозначать $f_i^n = f(x_i, t_n)$.

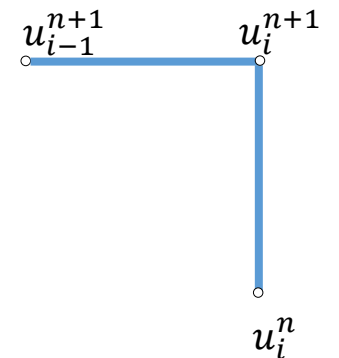


ПРИМЕР Разностные схемы против потока для решения линейного уравнение переноса $u_t + au_x = 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$



Решается система уравнений $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = L\mathbf{u}$, где L в общем случае нелинейный оператор.

Дискретизация $\mathbf{u}^{n+1} = T(\Delta t, \Delta x)\mathbf{u}^n$, где T - оператор перехода $\mathbf{u}^n \equiv \mathbf{u}(n \Delta t)$

Разностная схема **аппроксимирует уравнение** (или **согласована с уравнением**), если

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(\Delta t, \Delta x) - I}{\Delta t} = L \quad (\Delta t / \Delta x \rightarrow \beta)$$

Пусть $u_e(x, t)$ – точное решение. Тогда локальная ошибка аппроксимации записывается как

$$LTE \equiv u_e^{n+1} - Lu_e^n = O\left(\Delta t \sum_{p, q \geq 0, p+q=1} \Delta t^p \Delta x^q\right)$$

В этом случае порядок локальной ошибки аппроксимации равен $l+1$, а порядок схемы l

ПРИМЕР

Разностная схема против потока для решения линейного уравнение переноса $u_t + au_x = 0$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad (Lu_e^n)_j = u_{e,j}^n + \sigma(u_{e,j-1}^n - u_{e,j}^n), \quad \sigma = a\Delta t / \Delta x$$

$$LTE = u_e^{n+1} - Lu_e^n = (\partial u_e / \partial t + a \partial u_e / \partial x) \Delta t + O(\Delta x \Delta t + \Delta t^2) = \Delta t O(\Delta x + \Delta t)$$

Вектор ошибки, появившийся на n -м шаге $\varepsilon^n = u^n - u_e^n$

Матрица перехода G определяется $\varepsilon^{n+1} = G\varepsilon^n$

В случае линейного уравнения матрица перехода G эквивалентна оператору перехода T .

В общем случае $G = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(T\mathbf{u})$, $G_{\mu\nu} = \frac{\partial u_{\mu}^{n+1}}{\partial u_{\nu}^{\mu}}$

Схема **устойчива**, если $\|\varepsilon^{n+1}\| = \|u^{n+1} - u_e^{n+1}\|$ может быть ограничена $\|\varepsilon^n\|$,

умноженной на константу, независящую как от u^n , так и от u_e^n

$$\|\varepsilon^{n+1}\| \leq (1 + K\Delta t) \|\varepsilon^n\|$$

Если точное решение не растёт со временем, то никакого роста не должно происходить и в численном решении, т.е. должно быть $K=0$.

Если уравнение перехода приведено к диагональному виду $\varepsilon_{\mu}^{n+1} = g_{\mu}\varepsilon_{\mu}^n$, тогда для устойчивости требуется, чтобы для всех μ норма каждого собственного вектора ошибка не возрастала

$$|g_{\mu}| = \sqrt{g_{\mu}g_{\mu}^*} \leq 1$$

Приближенное решение сходится к точному, когда $\|u^n - u_e^n\| \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, $n\Delta t \rightarrow T$

Теорема Лакса-Филиппова-Рябенкова об эквивалентности

Аппроксимация + Устойчивость $\rightarrow$ Сходимость

$$\begin{aligned}\|u^n - u_e^n\| &\leq \|Lu^{n-1} - Lu_e^{n-1}\| + \|Lu_e^{n-1} - u_e^n\| \leq \|u^{n-1} - u_e^{n-1}\| + \Delta t \left(\sum_{p+q=1} \Delta x^p \Delta t^q \right) \leq \\ &\leq \|u^0 - u_e^0\| + n\Delta t \left(\sum_{p+q=1} \Delta x^p \Delta t^q \right)\end{aligned}$$

Искомый результат получается при $\Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \rightarrow T$

Теорема полезна только для линейных разностных схем

u_j – сеточная функция. $u(x)$ -- кусочно-непрерывная функция такая, что $u(x) = u_j$ на каждом интервале $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$.

ТЕОРЕМА Дана последовательность сеток $\{\mathfrak{T}_l\}$, для которой $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ когда $l \rightarrow \infty$. Пусть $u_l(x, t)$ – численная аппроксимация, вычисленная с помощью согласованной с уравнением консервативной схеме на сетке $\{\mathfrak{T}_l\}$. Предположим, что при $l \rightarrow \infty$ u_l сходится к $u(x, t)$ почти всюду (т.е. за исключением множества меры нуль). Тогда $u(x, t)$ есть слабое решение закона сохранения

Вместо сходимости почти всюду требуется выполнение двух условий

1) Над каждым ограниченным $\Omega = [a, b] \times [0, T]$

$$\int_0^T \int_a^b |U_1(x, t) - u(x, t)| dx dt \rightarrow 0, \quad \text{когда } l \rightarrow \infty$$

2) Для каждого T существует $R > 0$ такое, что

$$TV(U_l(x, t)) < R, \quad \forall \quad 0 \leq t \leq T, \quad l = 1, 2, \dots$$

Полная вариация $TV(v) = \sup \sum_{j=1}^N |v(\xi_j) - v(\xi_{j-1})|$, где $\sup$ берётся по всем разбиениям вещественной прямой

$$-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_N = \infty$$

Для дифференцируемых функций $TV(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |v'(x)| dx$

Метод конечных объемов

Аппроксимация дивергенции осуществлялась с помощью теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\nabla f_i = \frac{1}{V_c} \int_{S_c} f \vec{n} dS = \frac{1}{V_c} \sum_{j=1 \dots S_c} f_j \vec{n}_j S_j = \sum_{j=1 \dots S_c} \int_S f_j^c \vec{n}_j \frac{S_j}{V_c}$$

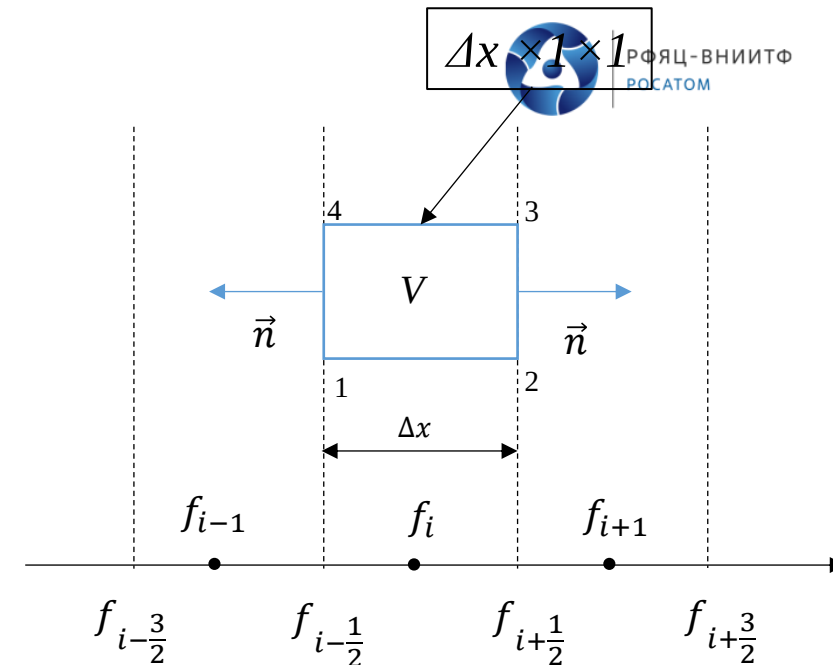
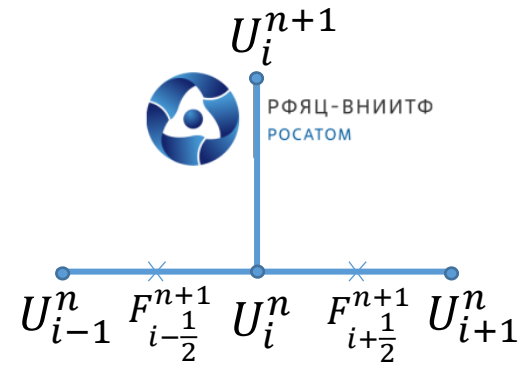


Схема Эйлера

Аппроксимация производной по времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0,$$



Шаблон явной схемы

где $U = \begin{pmatrix} \rho\omega_n \\ \rho u \\ \rho E \\ \rho k \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}$ – вектор консервативных величин, $F(U) = \begin{pmatrix} \rho\omega_n u \\ p + \frac{2}{3}\rho k \\ u \left(\rho E + p + \frac{2}{3}\rho k \right) \\ \rho k u \\ \rho \varepsilon u \end{pmatrix}$ – вектор потоков;

Метод Годунова

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{i+1/2} - F_{i-1/2}]$$

$F_{i+1/2}$ —численный поток через границу ячейки с координатой $x_{i+1/2}$, аппроксимирующий физический поток $F(U)$

Диффузионный этап:



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

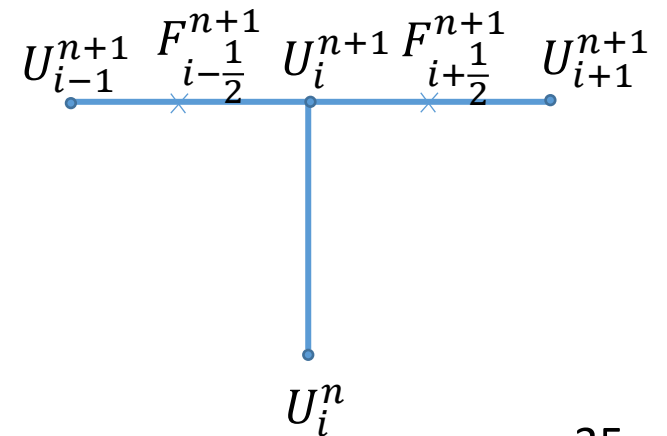
$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\lambda + \frac{\rho v_t C_V}{Pr} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \sum \left(\left(D + \frac{v_t}{Sc} \right) \rho \frac{\partial (\omega_k)}{\partial x} h_k \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4}{3} (\nu + \nu_t) u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (10)$$

где $F(U) = \begin{pmatrix} \left(D + \frac{v_t}{Sc} \right) \rho \frac{\partial (\omega_n)}{\partial x} \\ \frac{4}{3} (\nu + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \rho \frac{\partial k}{\partial x} \\ \left(\nu + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}$ – вектор диффузионных потоков с турбулентными величинами;

Неявная схема

$$\frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - F_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}}{\Delta x},$$

где $F_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{2}$; $F_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \approx \frac{U_{i-1}^{n+1} + U_i^{n+1}}{2}$.



Шаблон неявной схемы

Уравнение для турбулентной кинетической энергии k с добавлением ИСТОЧНИКОВ

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} = G_s + G_b - \rho \varepsilon, \quad (11)$$

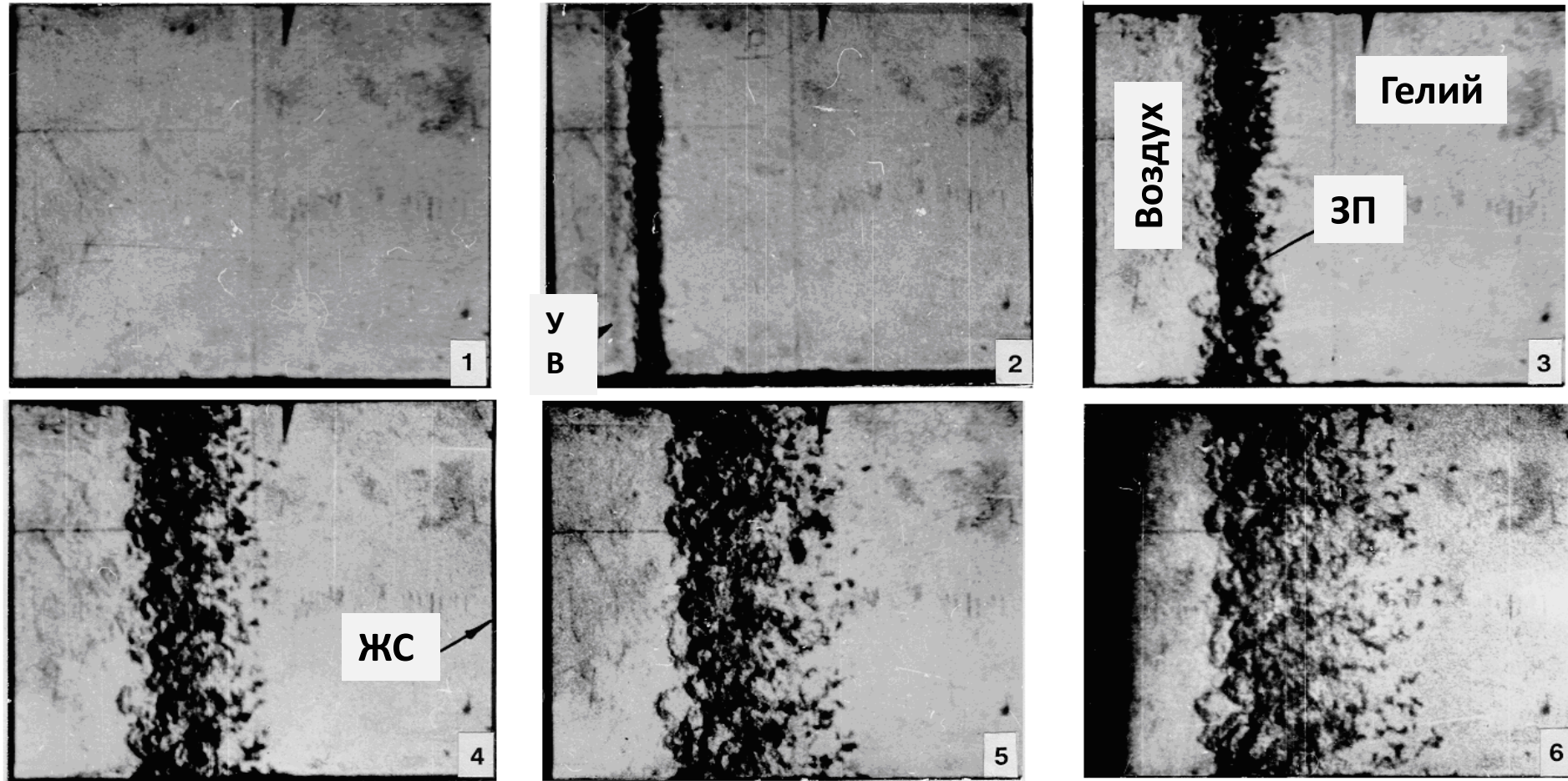
Уравнение для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии ε

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{k} \left(C_0 G_b + C_1 R^d \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} - \frac{2}{3} C_3 \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12)$$

Уравнение для баланса внутренней энергии

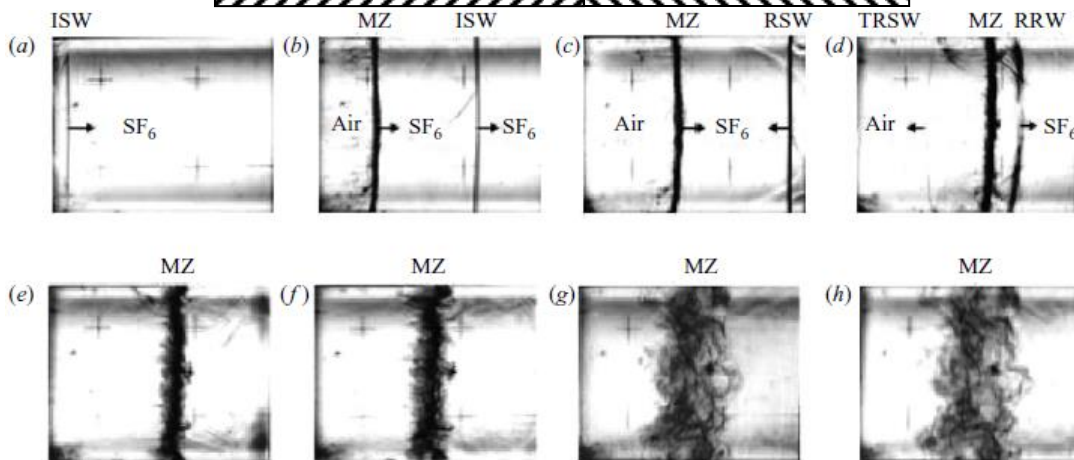
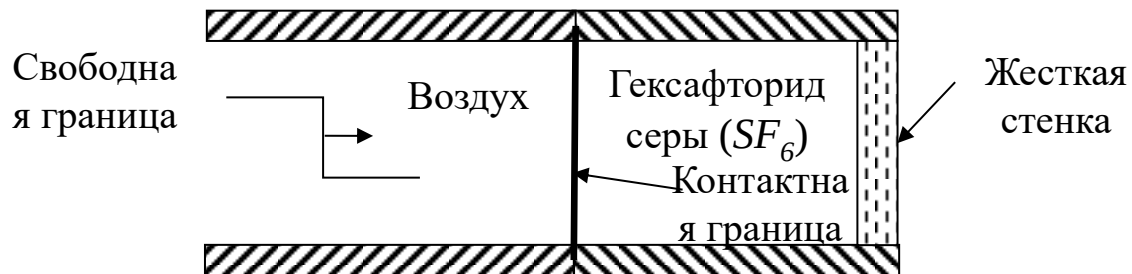
$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = \rho \varepsilon - G_b. \quad (13)$$

Эксперимент Е.Е.Мешкова, Саров 1969*



Развитие зоны турбулентного перемешивания (ЗТП) на границе воздух – гелий. Обозначения:
УВ – ударная волна; ЖС – жёсткая стенка. Визуализация течения осуществлялась теневым
методом

*Андронов В.А., Бахрах С.М., Мешков Е.Е., Мохов В.Н., Никифоров В.В., Певницкий А.В., Толшмяков А.И.. Турбулентное перемешивание на контактной поверхности, ускоряемой ударными волнами, 1976.



Эксперимент Леинова**

Начальные данные:

- $p = 23000 \text{ Па}; T = 294 \text{ К}$
- $\rho_{air} = 0.273 \text{ кг/м}^3; \rho_{SF_6} = 1.3738 \text{ кг/м}^3$

Газы рассматривались как идеальные

- $C_V^{air} = 748.3 \text{ Дж/кг}; C_V^{SF_6} = 605.6 \text{ Дж/кг}$

$$\rho_0 = \frac{\rho_k Ma_s^2 (\gamma_k + 1)}{Ma_s^2 (\gamma_k - 1) + 2}, \quad (13)$$



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

$$u_0 = \frac{2c(Ma_s^2 - 1)}{Ma_s(\gamma_k + 1)}, \quad (14)$$

$$p_0 = \frac{p(2\gamma_k Ma_s^2 - (\gamma_k - 1))}{(\gamma_k + 1)}, \quad (15)$$

$$k = 0.1(At u_0)^2, \quad (16)$$

$$\varepsilon = kW, \quad (17)$$

где Ma_s – число Маха;

$W = k_{rms}|At|\Delta u$ – линейная скорость;

$k_{rms} = \frac{2\pi}{\lambda_{rms}}$ – среднеквадратичное волновое число;

λ_{rms} – начальная длина волны;

$At = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ – число Атвуда.

Sc	Pr	σ_k	σ_ε	σ_μ	C_0	C_1	C_2	C_3
0.5	0.5	0.5	0.5	0.09	0.9	1.44	1.92	2

* Moran-Lopez, J.T., Holloway, J.P., Schilling, O.: Application of a K - ε Turbulence Model to Reshocked Richtmyer-Meshkov Instability Corresponding to a Heavy-to-Light Gas Transition. Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7) Conference Proceedings (2012)

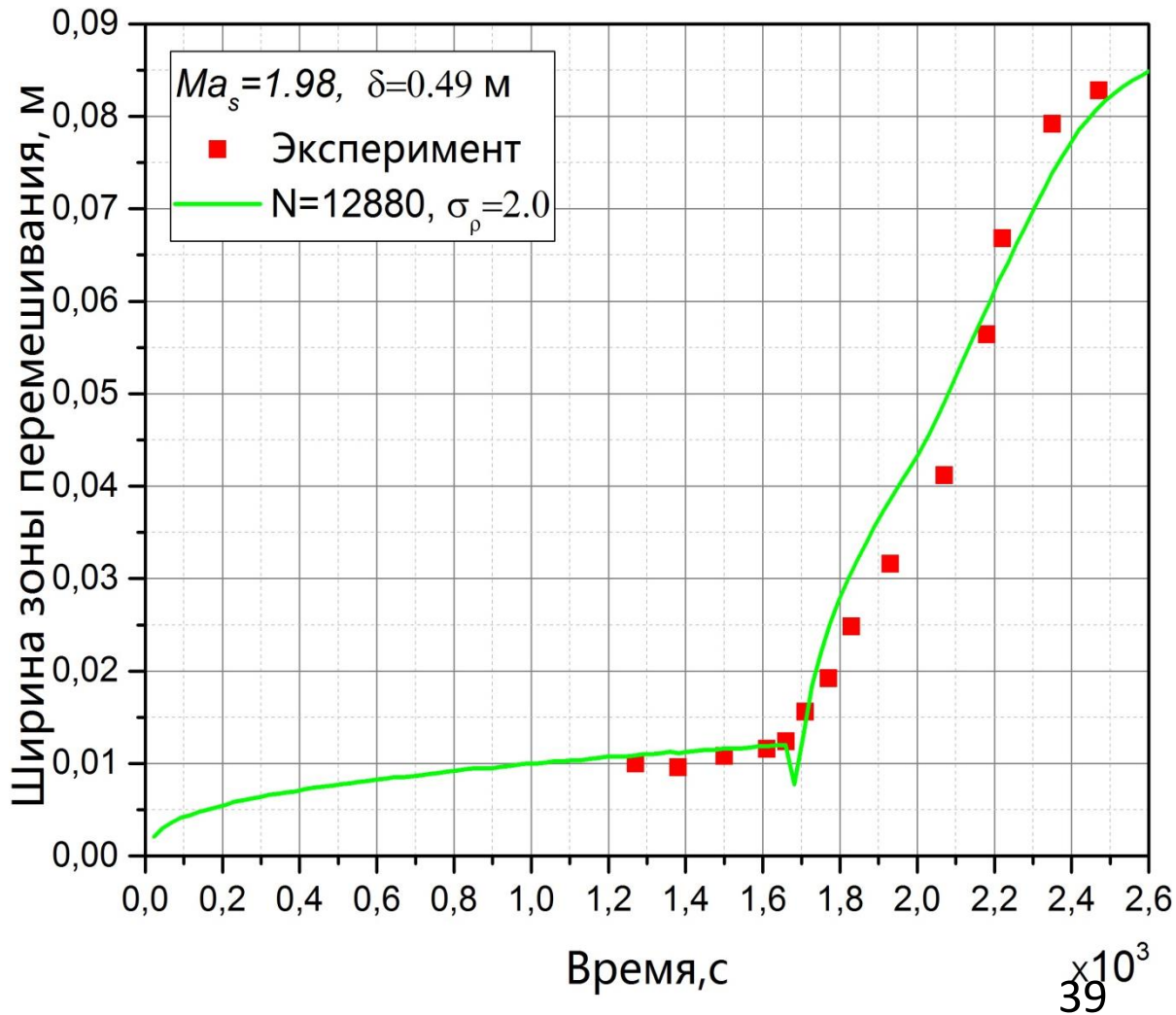
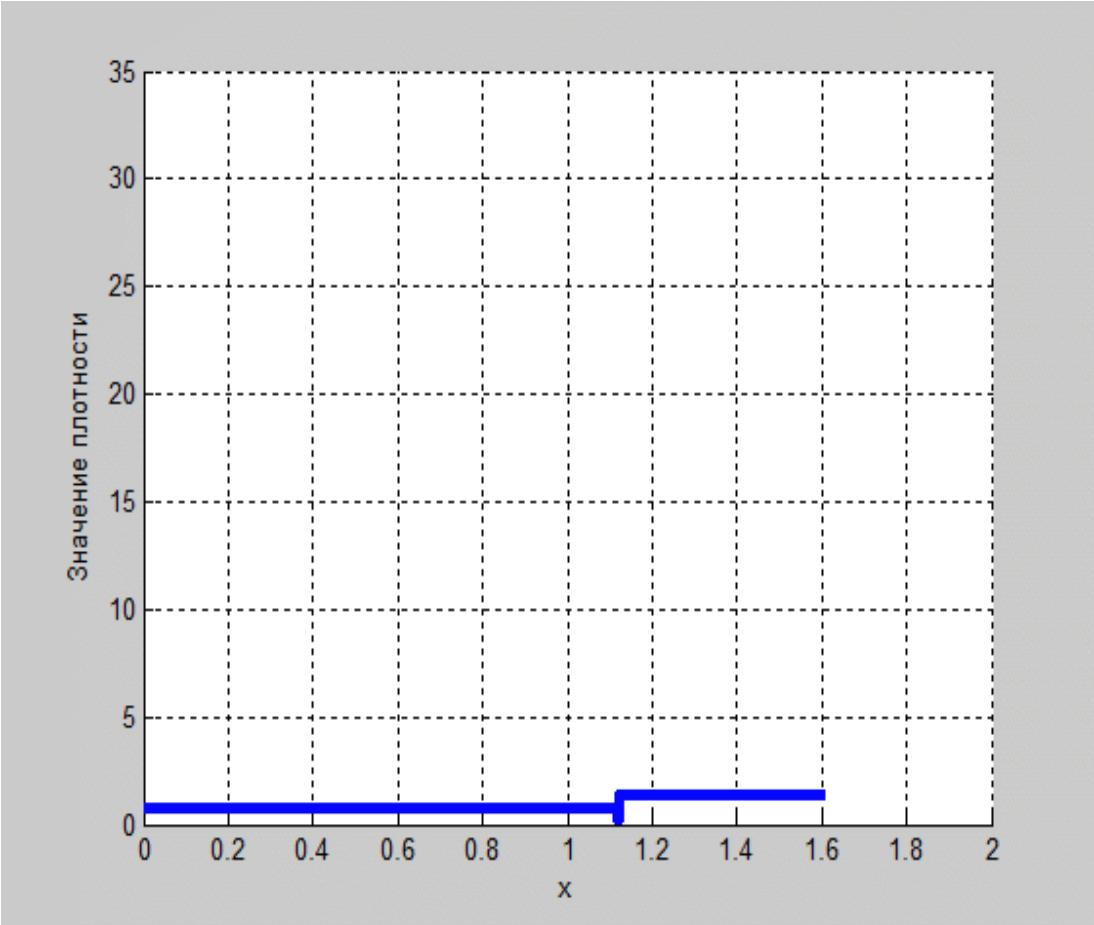
**Leinov E., Malamud G. et al. Experimental and numerical investigation of the Richtmyer–Meshkov instability under re-shock conditions Journal of Fluid Mechanics, 2009, v.626. – 449-475 p.

Эксперимент *Веттера* и *Стуртеванта**. Сравнение с экспериментом



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

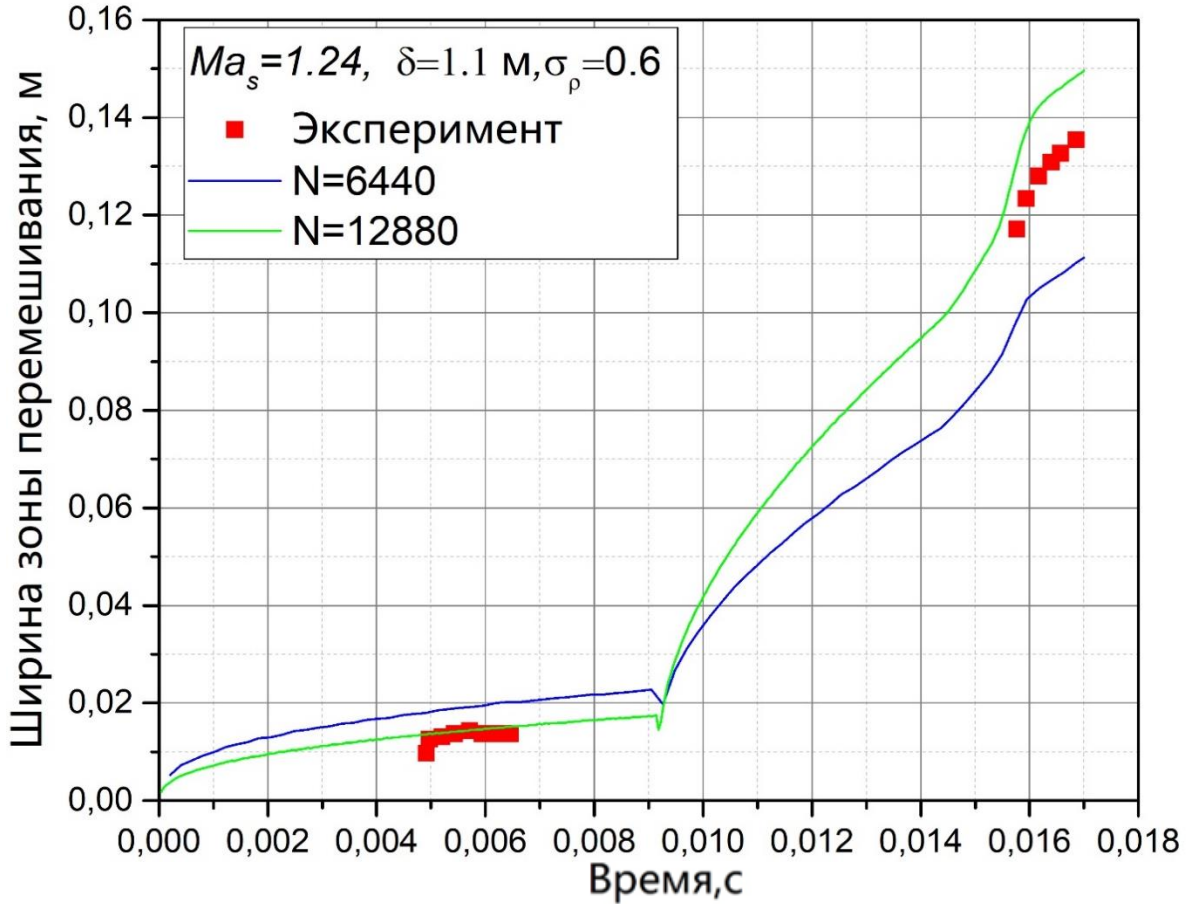
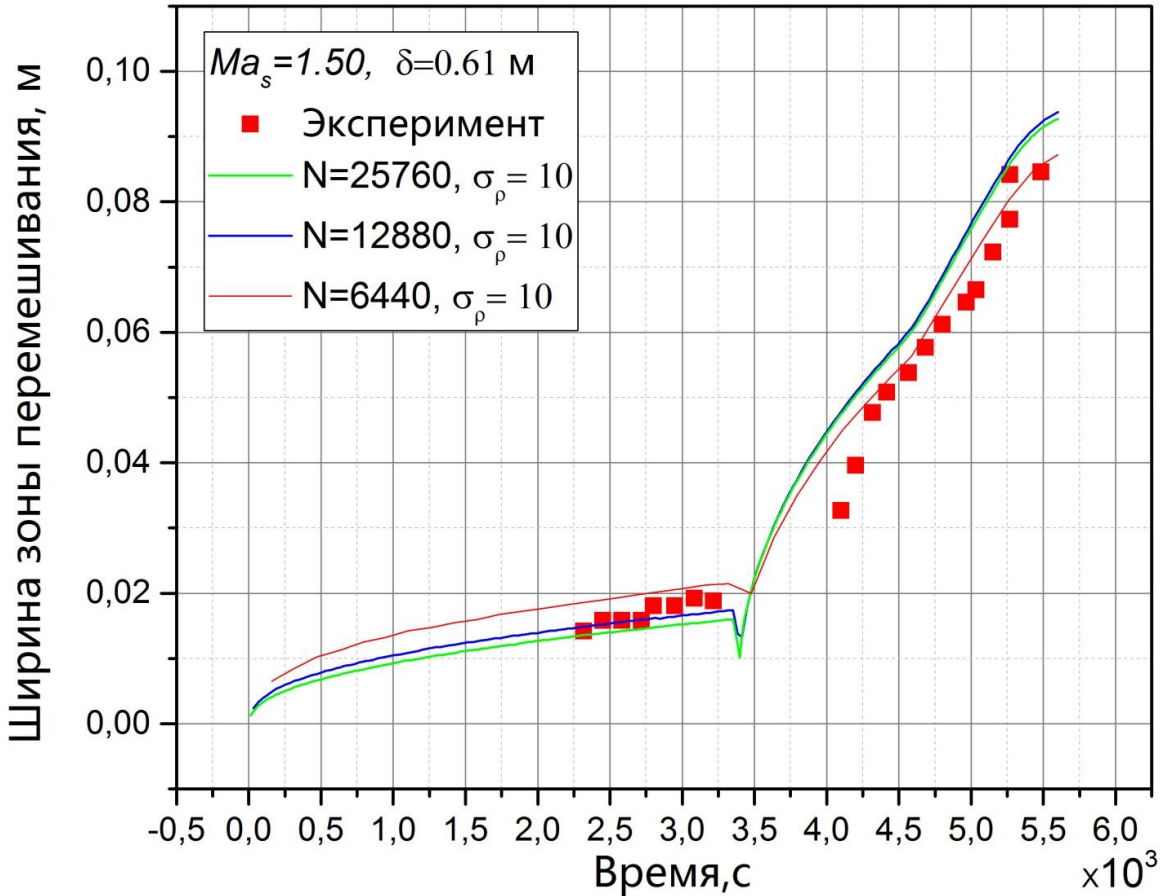
Число Маха, Ma_s	Число Атвуда, At	Длина тестовой секции δ , м	Конечное время t , с	Длина области L , м	λ_{rms}
1.98	0.67	0.49	0.0026	1.61	0.005



* Vetter M., Sturtevant B. Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability of an air/SF₆ interface // Shock Wave, 1995. – 247 p.

Эксперимент *Веттера и Стуртеванта**. Сравнение с экспериментом

Число Маха, Ma_s	Число Атвуда, At	Длина тестовой секции δ , м	Конечное время t , с	Длина области L , м	λ_{rms}
1.50	0.67	0.61	0.0056	1.61	0.01
1.24		1.1	0.017		0.01



* Vetter M., Sturtevant B. Experiments on the Richtmyer-Meshkov instability of an air/SF₆ interface // Shock Wave, 1995. – 247 p.

Перечень научно-исследовательских работ



РФЯЦ-ВНИИТФ
РОСАТОМ

1. Получение фильтрованных по Фавру осреднённых уравнений Навье-Стокса
2. Схема Годунова для гиперболической части уравнений Навье-Стокса
3. Оптимальная эйлерова сетка для задач сферического сжатия
4. Подбор параметров динамической адаптации сетки - критериев и уровней адаптации для моделирования неустойчивых течений получения сходящегося численного решения задачи о сферическом сжатии
5. Разработка явно-неявного численного подхода при использовании адаптивной сетки
6. Использование искусственного интеллекта для определения параметров квазимонотонной схемы высокого разрешения, обеспечивающей минимальную численную диффузию
7. Использование GPU для увеличения эффективности численного решения уравнений Навье-Стокса на гибридном вычислительном кластере
8. Полуэмпирические модели турбулентного перемешивания для описания процессов горения водородо-воздушных смесей и процессов при сжатии мишеней инерциального лазерного синтеза
9. Метод Крупных Вихрей для описания турбулентных течений в физике высоких плотностей энергии
10. Ламинарной-турбулентный переход при горении и детонации водородо-воздушных смесей
11. Шаровой и ячеистый режимы горения водородо-воздушных смесей
12. Возникновение спонтанной детонации
13. Развитие неустойчивостей и переход в турбулентное перемешивание при сжатии мишеней инерциального лазерного синтеза
14. Трёхмерное численное моделирование процессов в жидко-соляных ядерных реакторах

Перечень тем для курсовых работ

1. Вывод частично осреднённых по Фавру уравнений Навье-Стокса
2. Реализация схемы Годунова для одномерных уравнений идеальной газовой динамики
3. Реализация алгоритмов адаптации численной сетки, состоящей из квадратных ячеек, в двумерном случае
4. Использование машинного обучения для выбора параметров ограничителя потоков в схеме Годунова для обеспечения минимальной численной диффузии
5. Реализация схемы Годунова для одномерного течения на гибридном вычислительном кластере CPU+GPU
6. Численная схема для решения уравнения диффузии в многокомпонентном газе
7. Полуэмпирическая k -eps модель турбулентного перемешивания для физики высоких плотностей энергии
8. Учёт энерговыделения, рассчитанного методом Монте-Карло, для задач процессов в ядерных реакторах

Перечень тем для дипломных работ

1. Двумерная эйлерова схема высокого разрешения для решения уравнений Навье-Стокса
2. Использование искусственного интеллекта для подбора параметров численной схемы для задач сферического сжатия
3. Разработка программы для расчетов двумерных газодинамических течений на гибридной архитектуре CPU+GPU
4. Численное моделирование трёхмерных эффектов при поглощении мишенью лазерного излучения
5. Подход частичного осреднения уравнений Навье-Стокса для описания ламинарно-турбулентного перехода
6. Совместное описание гидродинамических процессов с нейтронным энерговыделением методом Монте-Карло в импульсном ядерном реакторе

Перечень тем для диссертационных работ

1. Численная схема для описания трёхмерных эффектов развития неустойчивостей и турбулентного перемешивания при сжатии мишеней инерциального лазерного синтеза
2. Комплекс программ для решения трёхмерных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной среды с фазовыми переходами, диффузией и теплопроводностью
3. Полуэмпирическая модель для учёта турбулентной диффузии веществ в физике высоких плотностей энергии
4. Подход частичного осреднения уравнений Навье-Стокса для описания турбулентных течений
5. Численное моделирование гидродинамических процессов с учётом нейтронного энерговыделения в импульсном ядерном реакторе