Российский Федеральный Ядерный Центр - Всероссийский НИИ технической физики
имени академика Е.И. Забабахина

Решение системы уравнений переноса теплового излучения в различных приближениях

Чубарешко Илья Сергеевич, Уракова А.В., Шестаков А.А.

Введение

Одной из наиболее трудных задач теории переноса является решение спектрального уравнения переноса теплового излучения, сложность которого определяется главным образом большой размерностью рассматриваемого пространства. Из-за такой вариативности решение уравнения переноса в 3D-геометрии требует огромных вычислительных мощностей и в ближайшем обозримом будущем в кинетической постановке существенно затруднено*. В связи с этим для решения уравнения переноса применяют различные приближения, сводящие задачу переноса излучения к более простой. К таким приближениям относятся квазидиффузионное приближение, метод сферических гармоник, диффузионное приближение и другие. Часть этих приближений использует решение кинетического уравнения для получения вспомогательных осредненных коэффициентов.

В работе рассмотрено применение диффузионного, P_1, $P_{1/3}$ и M_1 – приближений, не использующих решение кинетического уравнения, и исследовано поведение решений при расчете ряда модельных задач переноса теплового излучения.

[*] Tomoyuki Hanawa, Edouard Audit. Reformulation of the M1 model of radiative transfer, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer 145 (2014) 9-16

Кинетическое уравнение переноса излучения

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_g}{\partial t}+\mu\frac{\partial I_g}{\partial x}+\alpha_g I_g=\frac{1}{2}\left(\alpha_{cg}B_g+\alpha_{sg}U_g\right), \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}=\sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}(U_g-B_g)+\rho Q,$$

где I_g *– интенсивность группы* g, g *– индекс группы,* $g=1,2,\ldots,G$,

μ *– косинус угла между направлением полета фотонов и осью* x,

$\alpha_g=(\alpha_{cg}+\alpha_{sg})$ *– коэффициент ослабления фотонов,*

α_{cg} *– коэффициент поглощения фотонов,*

α_{sg} *– коэффициент рассеяния фотонов,*

B_g *– равновесная плотность излучения,*

U_g *– плотность излучения.*

Вывод приближений

$$\frac{1}{c}\frac{\partial U_g}{\partial t}+\frac{\partial S_g}{\partial x}+\alpha_{cg}U_g=\alpha_{cg}B_g, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S_g}{\partial t}+\frac{\partial P_g}{\partial x}+(\alpha_{sg}+\alpha_{cg})S_g=0, \qquad (3)$$

$U,\ S,\ P$ – первые три угловых момента интенсивности:

$$U=\frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{+1} I\,d\mu \ – \text{плотность энергии излучения},$$

$$S=2\pi\int_{-1}^{+1} \mu I\,d\mu \ – \text{поток энергии излучения},$$

$$P=\frac{2\pi}{c}\int_{-1}^{+1} \mu^2 I\,d\mu \ – \text{давление излучения}.$$

P_1 - приближение

P_1 – *приближение можно получить, введя замыкание* $P = \frac{1}{3}U$ *в уравнение* (3):

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{c}\frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g = 0. \end{cases}$$

Достоинства:

– *Дешевле кинетического приближения.*

– *Нет лучевого эффекта.*

Недостатки:

– *Менее точно в оптически прозрачных средах, чем кинетическое приближение, то есть имеет ограниченную область применимости*[*].

– *Нет монотонной схемы второго порядка аппроксимации и выше в классе линейных разностных схем.*

– *Скорость распространения света в вакууме равна* $c/\sqrt{3}$.

[*] Карлыханов Н.Г., Селиванова Н.В. Об одном алгоритме склейки кинетического уравнения … //ВАНТ. -2012. –Вып. 2. – С. 51-63.

$P_{1/3}$ - приближение

$P_{1/3}$ – приближение можно получить домножением $\frac{\partial S}{\partial t}$ на $\frac{1}{3}$ в P_1 – приближении:

$$\begin{cases} \frac{1}{c}\frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{1}{3c}\frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g = 0. \end{cases}$$

Достоинства:

– Дешевле кинетического приближения.

– Нет лучевого эффекта.

– Скорость распространения света в вакууме равна c.

Недостатки:

– Менее точно в оптически прозрачных средах, чем кинетическое приближение, то есть имеет ограниченную область применимости.

– Нет монотонной схемы второго порядка аппроксимации и выше в классе линейных разностных схем.

РФЯЦ–ВНИИТФ

Диффузионное приближение

Диффузионное приближение можно получить, отбросив $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ *в* P_1 *– приближении:*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U_g}{\partial t} + \dfrac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\ \quad + \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g = 0 \text{ или } S_g = -\dfrac{1}{3\alpha_g}\dfrac{\partial U_g}{\partial x}. \end{cases}$$

Достоинства:

– Дешевле кинетического приближения.

– Нет лучевого эффекта.

– Можно построить монотонную разностную схему высокого порядка точности.

Недостатки:

– Менее точно в оптически прозрачных средах, чем кинетическое приближение, то есть имеет ограниченную область применимости.

– Скорость распространения света в оптически прозрачных средах равна бесконечности. (Может корректироваться введением ограничения на поток).

M_1 - приближение

M_1 – *приближение*[*] *можно получить, введя замыкание* $P = DU$ *в уравнение* (3):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U_g}{\partial t} + \dfrac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial S_g}{\partial t} + \dfrac{\partial D_g U_g}{\partial x} + \alpha_g S_g = 0, \quad \text{где } D_g = \left(\dfrac{3 + 4 f_g^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3 f_g^2}}\right), \quad f_g = \dfrac{S_g}{U_g}. \end{cases}$$

Достоинства:

– *Дешевле кинетического приближения.*

– *Нет лучевого эффекта.*

– *Скорость распространения света в вакууме равна c.*

Недостатки:

– *Менее точно в оптически прозрачных средах, чем кинетическое приближение, то есть имеет ограниченную область применимости.*

– *Нет монотонной схемы второго порядка аппроксимации и выше в классе линейных разностных схем.*

[*] Tomoyuki Hanawa, Edouard Audit. Reformulation of the M1 model of radiative transfer, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer 145 (2014) 9-16

Постановка задачи в общем виде

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial U_g}{\partial t} + \dfrac{\partial S_g}{\partial x} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g ; \\ \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\partial S_g}{\partial t} + \dfrac{\partial D U_g}{\partial x} + (\alpha_{sg} + \alpha_{cg}) S_g = 0; \\ \rho \dfrac{\partial E}{\partial t} = \sum\limits_{g=1}^{G} \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q; \qquad\qquad g = 1, 2, ..., G. \end{cases}$$

$$\beta = 0,\ D = \frac{1}{3}\ -\ \textit{диффузионное приближение};$$

$$\beta = 1,\ D = \frac{1}{3}\ -\ P_1 - \textit{приближение};$$

$$\beta = \frac{1}{3},\ D = \frac{1}{3}\ -\ P_{1/3} - \textit{приближение};$$

$$\beta = 1,\ D = \frac{3 + 4 f_g^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3 f_g^2}},\ f_g = \frac{S_g}{U_g}\ - M_1 - \textit{приближение}.$$

Начальные условия: $U_g(x, t_0) = U_g^0(x);\ S_g(x, t_0) = S_g^0(x);\ E(x, t_0) = E^0(x).$

Граничные условия: $\xi_i\, U_{g,i} + \eta_i S_{g,i} = \varphi_i$ *при* $i = 0;\quad \xi_i\, U_{g,i} - \eta_i S_{g,i} = \varphi_i$ *при* $i = I.$

Разностная аппроксимация

$$\text{Система разностных уравнений:}$$

$$\begin{cases} U_{g,i+1/2}^{n+1} + \dfrac{1}{q_1 h}\Delta S_{g,i}^{n+1} = \left(F_0\right)_{g,i+1/2}^{n+1}; \\ S_{g,i+1/2}^{n+1} + \dfrac{D}{qh}\Delta U_{g,i}^{n+1} = \left(F_1\right)_{g,i+1/2}^{n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{c\tau} + \left(\alpha_{cg}\right)_{i+1/2}^{n+1}; \qquad \Delta S_{g,i}^{n+1} = S_{g,i+1}^{n+1} - S_{g,i}^{n+1}; \qquad \left(F_0\right)_{g,i+1/2}^{n+1} = \dfrac{1}{q_1}\left[\dfrac{1}{c\tau}U_{g,i+1/2}^{n} + \left(\alpha_{cg}B\right)_{g,i+1/2}^{n+1}\right]; \\ q = \dfrac{\beta}{c\tau} + \left(\alpha_{cg} + \alpha_{sg}\right)_{i+1/2}^{n+1}; \qquad \Delta U_{g,i}^{n+1} = U_{g,i+1}^{n+1} - U_{g,i}^{n+1}; \qquad \left(F_1\right)_{g,i+1/2}^{n} = \dfrac{\beta}{c\tau q}S_{g,i+1/2}^{n}; \end{cases}$$

$$\text{Система разностных уравнений на } \nu+1 \text{ итерации:}$$

$$\begin{cases} U_{g,i+1/2}^{\nu+1} + \dfrac{1}{q_1 h}\Delta S_{g,i}^{\nu+1} = \left(F_0\right)_{g,i+1/2}^{\nu+1}; \\ S_{g,i+1/2}^{\nu+1} + \dfrac{D}{qh}\Delta U_{g,i}^{\nu+1} = \left(F_1\right)_{g,i+1/2}^{n}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{c\tau} + \left(\alpha_{cg}\right)_{i+1/2}^{\nu}; \qquad \Delta S_{g,i}^{\nu+1} = S_{g,i+1}^{\nu+1} - S_{g,i}^{\nu+1}; \qquad \left(F_0\right)_{g,i+1/2}^{\nu+1} = \dfrac{1}{q_1}\left[\dfrac{1}{c\tau}U_{g,i+1/2}^{n} + \left(\alpha_{cg}^{\nu}B^{\nu+1}\right)_{g,i+1/2}\right]; \\ q = \dfrac{\beta}{c\tau} + \left(\alpha_{cg} + \alpha_{sg}\right)_{i+1/2}^{\nu}; \qquad \Delta U_{g,i}^{\nu+1} = U_{g,i+1}^{\nu+1} - U_{g,i}^{\nu+1}; \qquad \left(F_1\right)_{g,i+1/2}^{n} = \dfrac{\beta}{c\tau q}S_{g,i+1/2}^{n}; \end{cases}$$

Разностная аппроксимация

Соотношения связи схемы Ромб[*] :

$$\begin{cases} U_{g,i+1/2} = 0.5\left(U_{g,i} + U_{g,i+1}\right) + \delta_{g,i+1/2}\Delta S_{g,i}; \\ S_{g,i+1/2} = 0.5\left(S_{g,i} + S_{g,i+1}\right) + \theta_{g,i+1/2}\Delta U_{g,i}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{g,i} + U_{g,i+1} + 2a_{i+1/2}\Delta S_{g,i} = 2\left(F_0\right)_{g,i+1/2}; \\ S_{g,i} + S_{g,i+1} + 2m_{i+1/2}\Delta U_{g,i} = 2\left(F_1\right)_{g,i+1/2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{i+1/2} = \delta_{g,i+1/2} + \dfrac{1}{q_1 h}; \\ m_{i+1/2} = \theta_{g,i+1/2} + \dfrac{D}{qh}; \end{cases}$$

Параметры δ и θ отвечают за порядок аппроксимации и за монотонность разностной схемы.

Полученная система разностных уравнений решается методом встречной прогонки.

[*] Гаджиев А.Д., Шестаков А.А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1-приближении // ВАНТ. – 1989. – Вып. 3. – С. 66-70.

Линеаризация по температуре внутренней энергии и функции Планка

Уравнение внутренней энергии вещества:

$$\rho \frac{dE}{dt} = \sum_{g=1}^{G} \alpha_{cg} (U_g - B_g) + \rho Q.$$

Линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка, применяя метод Ньютона:

$$E^{\nu+1}(T) = E^{\nu}(T) + E_T^{\nu}\left(T^{\nu+1} - T^{\nu}\right),$$

$$B_g^{\nu+1}(T) = B_g^{\nu}(T) + B_{gT}^{\nu}\left(T^{\nu+1} - T^{\nu}\right).$$

Подставляя эти выражения в уравнение энергии, получаем:

$$T^{\nu+1} = T^{\nu} + \left\{\rho(E^{n} - E^{\nu}) + \tau\rho Q + \tau\sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}\left(U_g^{\nu+1} - B_g^{\nu}\right)\right\}\left\{\rho E_T^{\nu} + \tau\sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg} B_{gT}^{\nu}\right\}^{-1}.$$

Итерации по нелинейности заканчиваются при выполнении условия:

$$\left|T_{i_n}^{\nu+1} - T_{i_n}^{\nu}\right| \le \varepsilon\left(1 + T_{i_n}^{\nu+1}\right).$$

Численные расчеты

Задача 1

Неравномерная сетка со сгущением к границам веществ.

$$\text{Левая граница}: \quad \frac{1}{4}U_g + \frac{1}{2}S_g = \frac{1}{4}B_g\left(T=1\right), \quad \text{правая граница}: \ \frac{1}{4}U_g - \frac{1}{2}S_g = 0.$$

$$\alpha_s = 0, \qquad \alpha_{cg} = \begin{cases} \dfrac{27}{\varepsilon_g^3}\left(1-e^{-\varepsilon_g/T}\right), & \text{в остальной области;} \\ \dfrac{10000}{\varepsilon_g^3}\left(1-e^{-\varepsilon_g/T}\right), & 103 \le x \le 103.4. \end{cases}$$

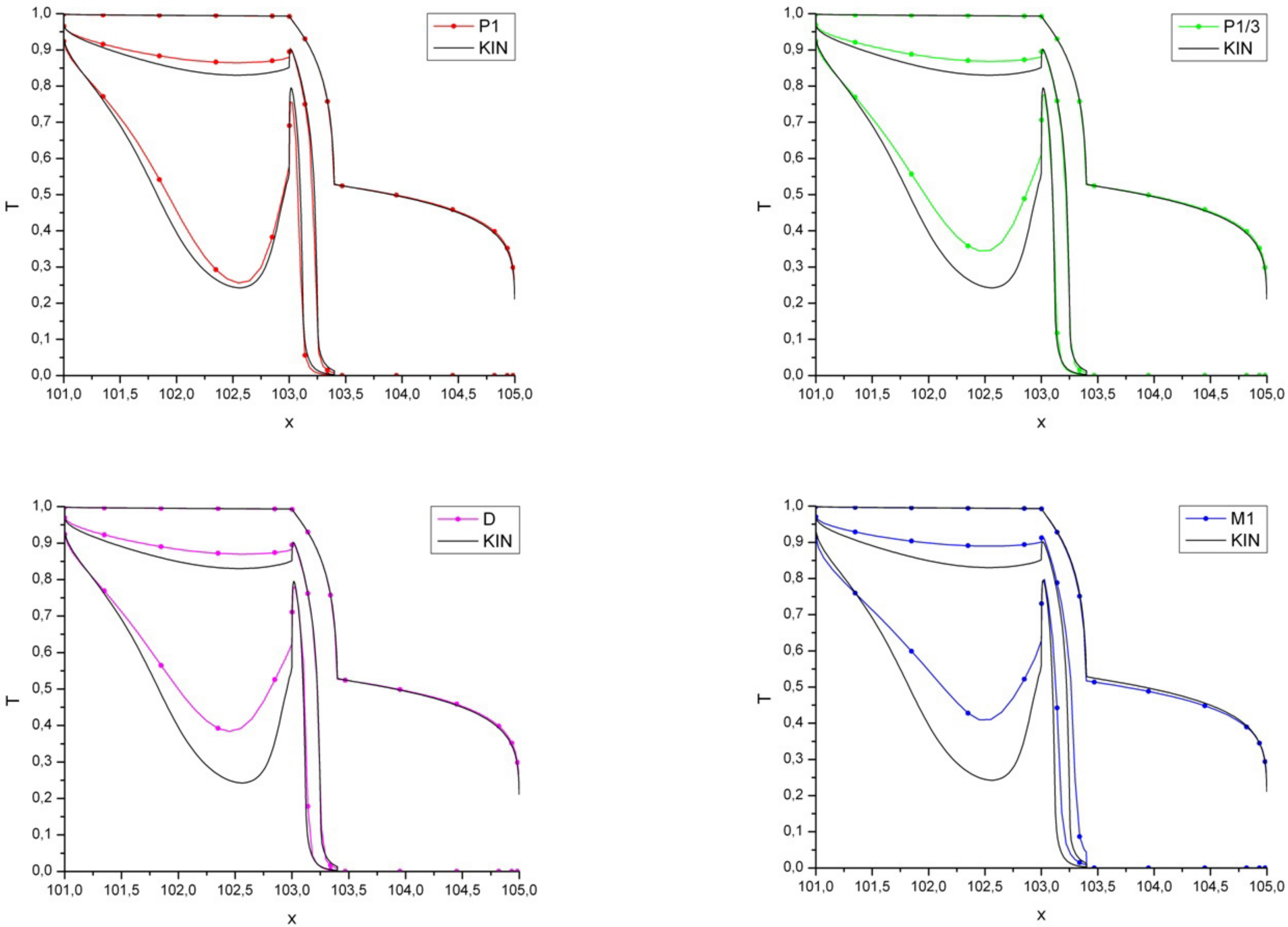
По энергии бралось 15 групп:

$$\varepsilon_g = 0.15, 0.45, 0.7, 1, 1.35, 1.65, 2.1, 2.55, 2.85, 3.5, 4.5, 6, 8, 10, 13.$$

$$\text{УРС}: \ \mathrm{E} = 0.81\mathrm{T}, \qquad \rho = 1, \qquad \varepsilon = 10^{-5}, \qquad \tau = 2\cdot 10^{-4}.$$

Численные расчеты

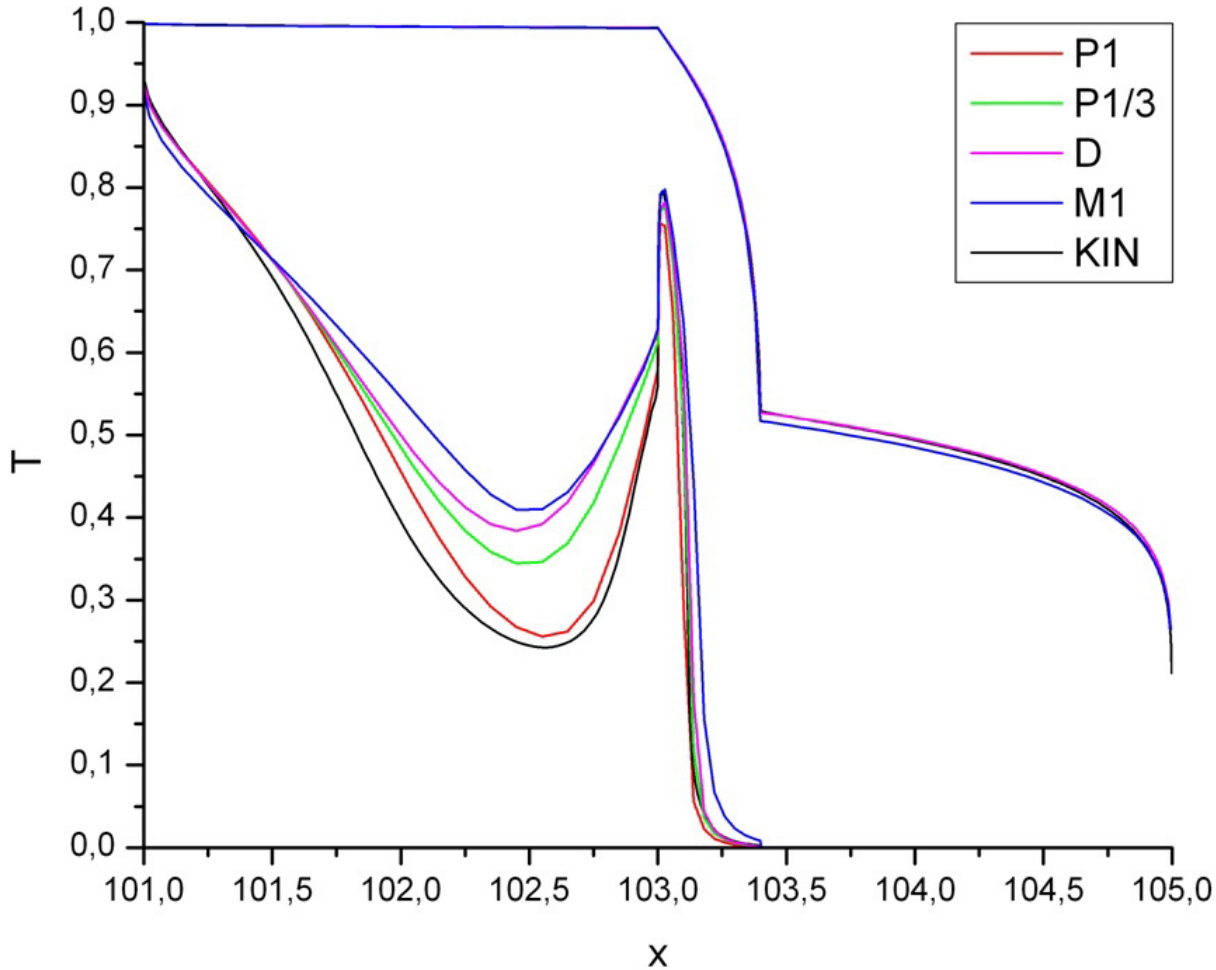
Задача 1



Профили температуры вещества.

Численные расчеты

Задача 1



Профили температуры вещества.

Приближение	**Кинетическое**	**P_1**	**$P_{1/3}$**	**M_1**	**D**
Время счета,сек.	175	35	35	36	34

Численные расчеты

Задача 2

На левую границу плоского слоя падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 10$. *На правой границе задается условие свободной поверхности.*

Слой состоит из двух физических областей. Коэффициент поглощения:

В первой области: $$\alpha_{cg} = \begin{cases} \dfrac{27}{\varepsilon_g^3}\left(1 - e^{-\varepsilon_g/T}\right), & 0 \le x \le 0.1, \varepsilon_g \le 30; \\ 10000, & 0 \le x \le 0.1, \varepsilon_g > 30. \end{cases}$$

Во второй области: $$\alpha_{cg} = \left\{ \dfrac{0.001}{\varepsilon_g^3}\left(1 - e^{-\varepsilon_g/T}\right), \quad 0.1 \le x \le 0.2. \right.$$

Коэффициент рассеяния $\alpha_s = 0$.

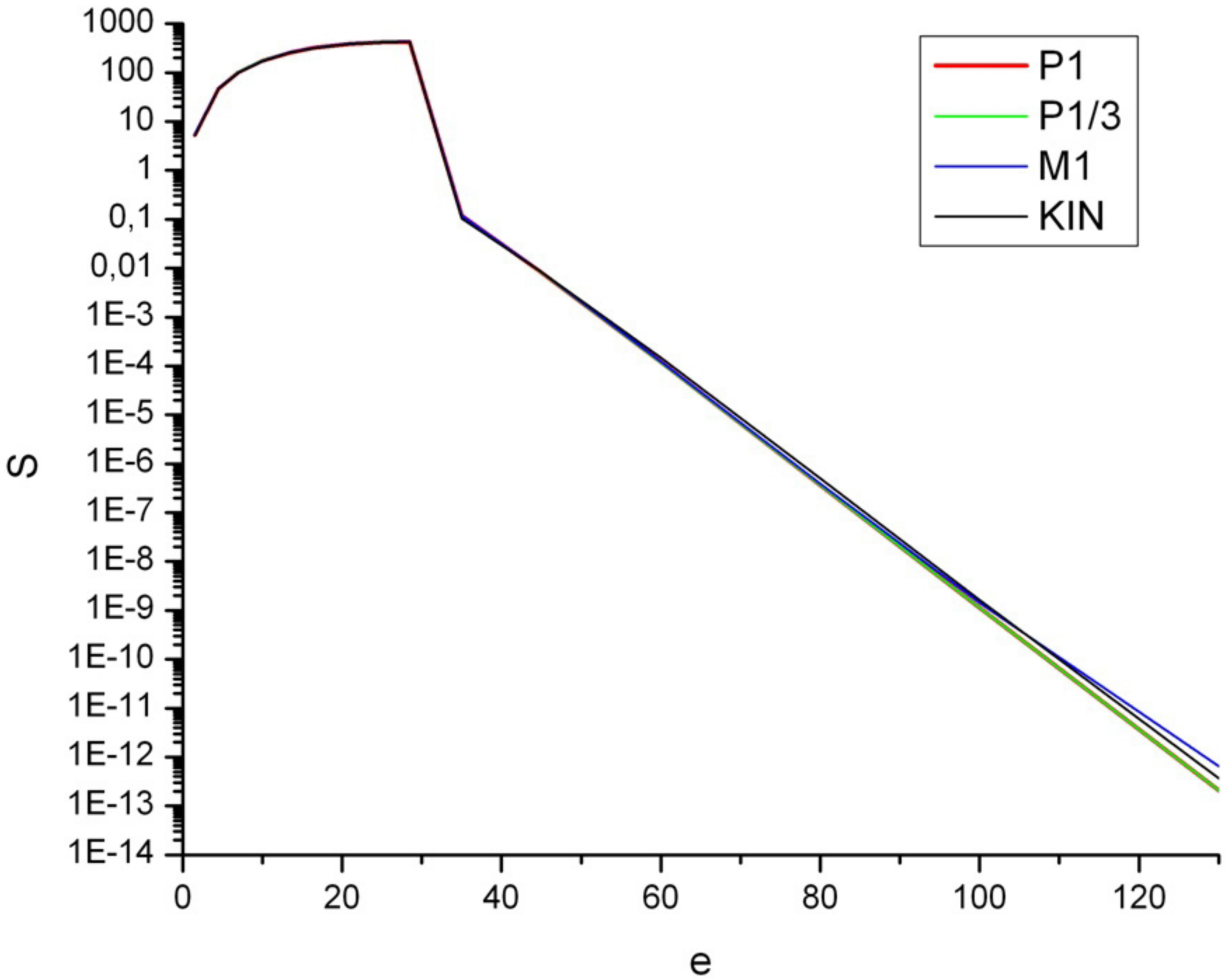
По энергетической переменной задается 15 *групп*

$\varepsilon = 1.5,\ 4.5,\ 7,\ 10,\ 13.5,\ 16.5,\ 21,\ 25.5,\ 28.5,\ 35,\ 45,\ 60,\ 80,\ 100,\ 130.$

УРС: $\mathrm{E} = 0.81\mathrm{T}, \qquad \varepsilon = 10^{-5}, \qquad \tau = 10^{-5}.$

Численные расчеты

Задача 2



Выходящий спектральный поток.

Приближение	**Кинетическое**	**P_1**	**$P_{1/3}$**	**M_1**
Время счета, сек.	850	181	187	192

Численные расчеты

Задача 3

Рассмотрим решение для вакуумной области между двумя неподвижными концентрическими сферами с радиусами $R_1 = 10$ *и* $R_2 = 25$. *На внутреннем радиусе* R_1 *– условие свободной поверхности* : $I(t, R_1 = 10; \theta; \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0) = 0.$

На внешнем радиусе R_2 *задана интенсивность входящего излучения* :

$$I(t, R_2 = 25; \theta; \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0) = \frac{c\sigma T^4_{f,гран}(t)}{4\pi}, \; T_{f,гран}(t) = 1.$$

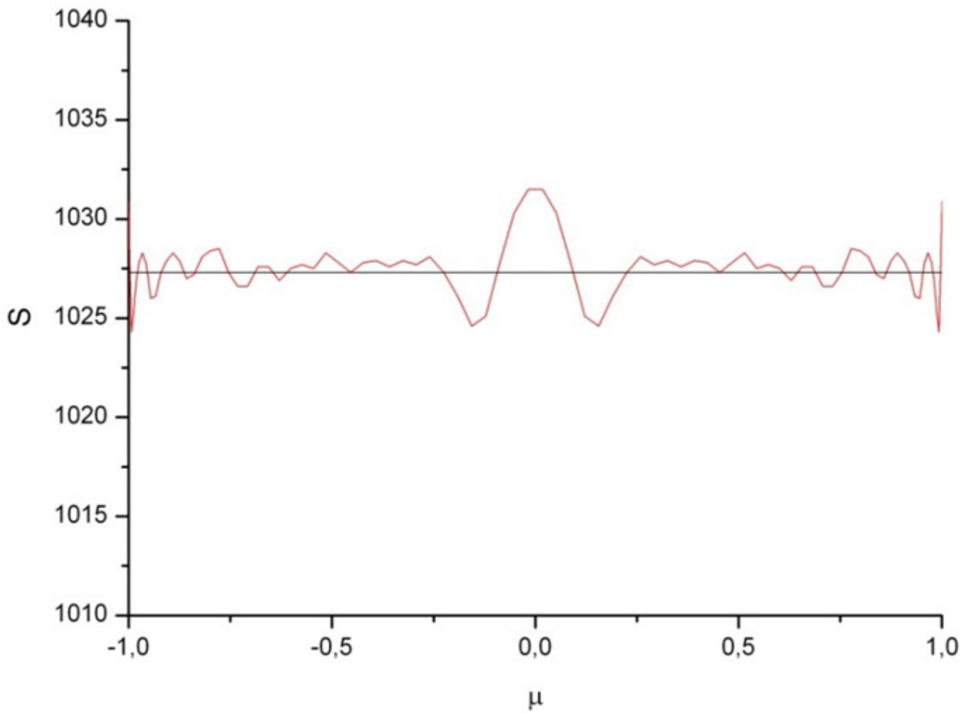
Для P_1 *и* $P_{1/3}$ *приближений на внутреннем радиусе* R_1 *граничные условия задаются в виде условий Маршака на свободной поверхности*

$\frac{1}{4} U(R_1) - \frac{1}{2}\left(\vec{S}(R_1)\vec{n}\right) = 0$, *где* $\vec{n}$ – *внешняя нормаль к поверхности счетной области. На внешнем радиусе* R_2 *формируется односторонний поток*

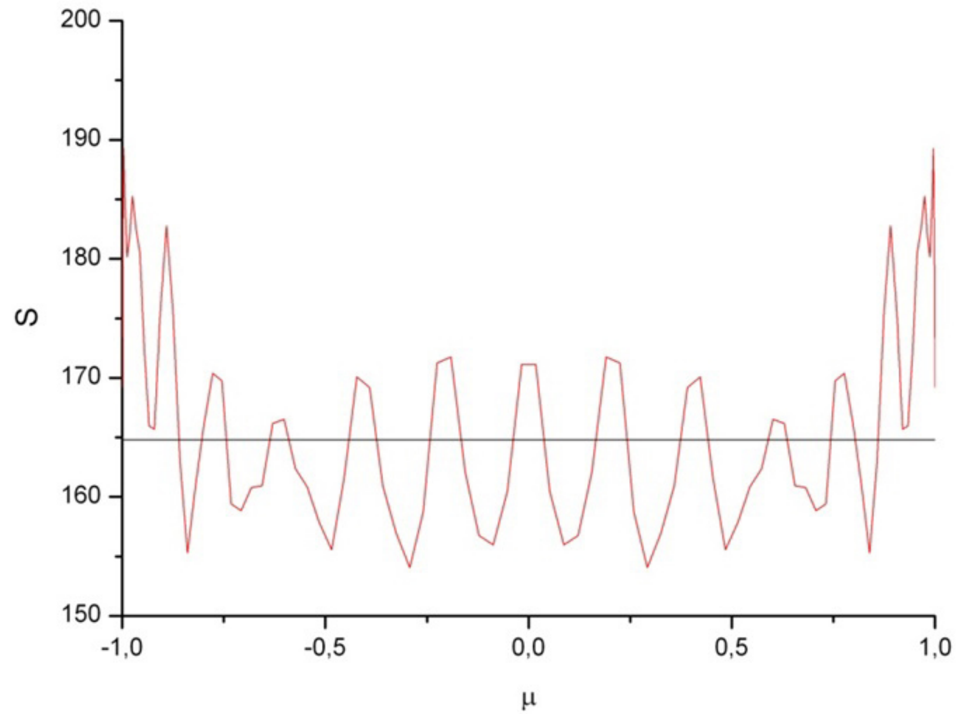
$\frac{1}{4} U - \frac{1}{2} S = \frac{c\sigma T^4_{f,гран}}{4}$. *На оси симметрии заданы условия отражения* $\left(\vec{S}\vec{n}\right) = 0.$

Численные расчеты

Задача 3



Зависимости удельных потоков от μ на внутренней границе.



Зависимости удельных потоков от μ на внешней границе.

Красная линия – Кинетическое приближение, черная – P_1 -приближение.

Численные расчеты

Задача 4

Рассмотрим двухоболочечные мишени, которые представляют собой две концентрические оболочки, разделенные малоплотным веществом. Обе оболочки могут быть достаточно толстыми, а внутренняя оболочка может быть выполнена из материала с высокой плотностью и заполнена газом.

На внешнем радиусе заданы условия жесткой стенки и интенсивность входящего излучения $I(t, R = 30, \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0) = \dfrac{c\sigma T^4_{f,гран}}{4\pi}$,

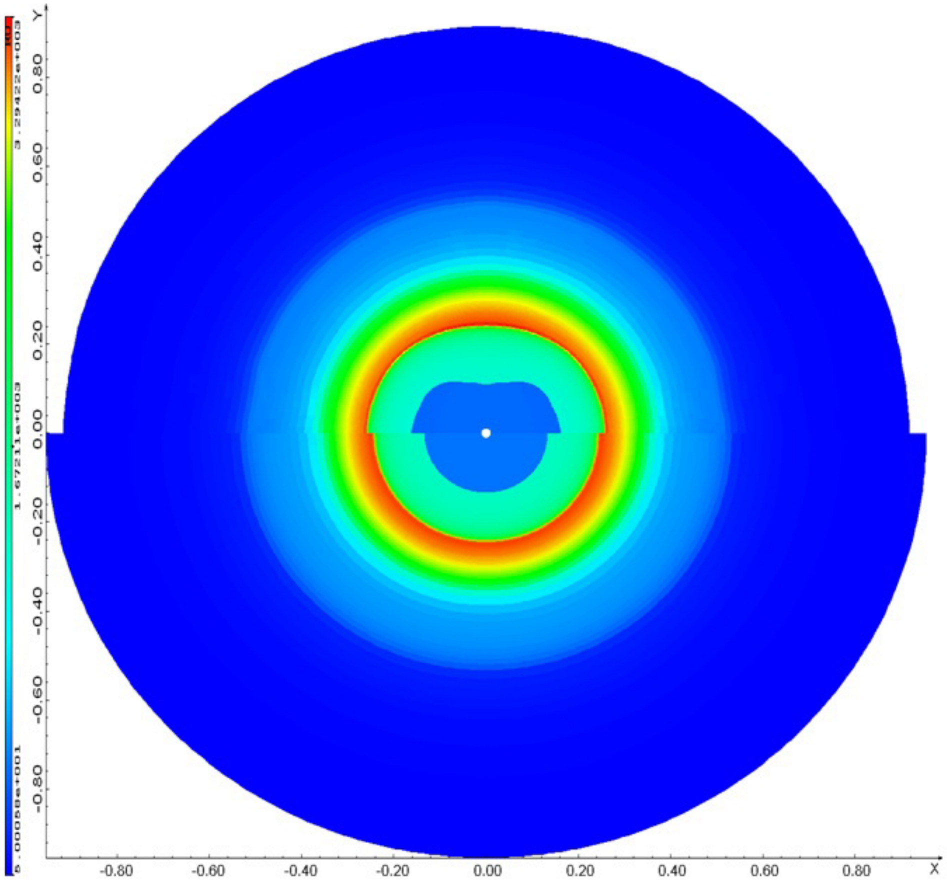
$T_{f,гран.}$ – *граничная температура. Расчеты проводились в сером кинетическом,* P_1 *и диффузионном приближениях.*

Число ячеек по радиусу в областях :15; 100; 35; 80; 100; 5.

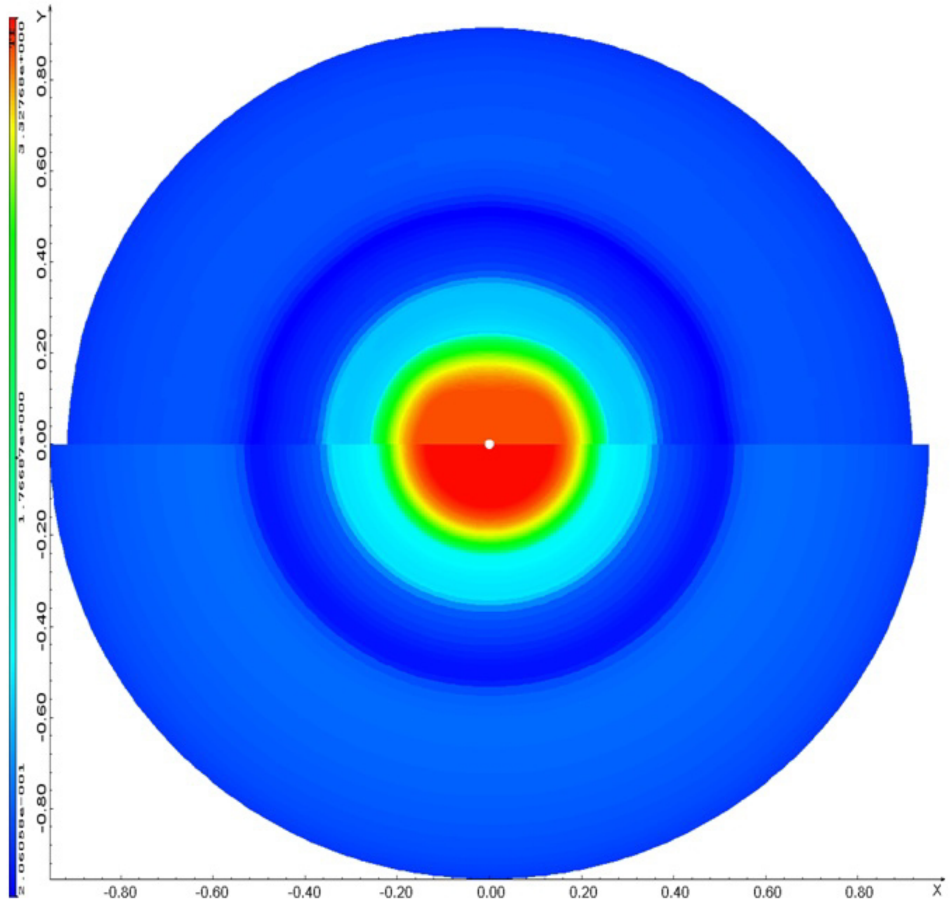
Сетка по углу равномерная с числом ячеек 90.

Численные расчеты

Задача 4



Распределение плотности в Кинетическом (вверху) и P1 (внизу) приближениях.



Распределение температуры в Кинетическом (вверху) и P1 (внизу) приближениях.

Выводы

Были проведены численные расчеты тестовых задач по диффузионному, P_1, $P_{1/3}$ и M_1 – приближениям при одинаковой разностной аппроксимации дифференциальных операторов.

Из полученных результатов следует вывод, что данные приближения могут давать хорошее согласие с кинетическим приближением при значительно меньших затратах и отсутствии лучевого эффекта.

Достоинством диффузионного, P1, P1/3 и M1 – приближений является то, что они сохраняют симметрию в сферически-симметричных задачах. Это снимает вопрос о влиянии лучевого эффекта на результаты расчетов, и позволяет контролировать счет в кинетическом приближении.

Тестирование задачи 1 (задачи Флека) показывает отличие моделирования переноса излучения в диффузионном, P_1, $P_{1/3}$ и M_1 – приближениях при прогревании прозрачных областей многослойной системы. Все приближения на стационаре дают одинаковое решение, близкое к точному.

Задача 2 (фильтр для жестких квантов) показывает согласие (до 12 знака после запятой) по выходящему потоку в различных приближениях в двухслойной многогрупповой системе.

Выводы

Проведенное тестирование задачи 3 подтвердило возможность использования переноса излучения в P_1, $P_{1/3}$ в вакууме.

Задача 4 показывает сохранение симметрии в диффузионном, P1, P1/3–приближениях при сжатии многослойной лазерной мишени.

Каждое из рассмотренных приближений имеет определенную область применимости. Поэтому надо разбираться в физике моделируемых процессов, чтобы знать, где можно или нельзя применять эти приближения.

Надо изучать эти приближения и получаемые по ним решения для более широкого и регулярного использования их в задачах математической физики, чтобы не применять сложные и дорогие приближения там, где можно обойдись более простыми и дешевыми приближениями.

Спасибо за внимание