



ПРЕДПРИЯТИЕ ГОСКОРПОРАЦИИ "РОСАТОМ"

ФГУП "ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ им. Н.Л.Духова"

Численный метод конечного объема для решения гиперболических неконсервативных систем дифференциальных уравнений

А.А. Серёжкин

Международная конференция
XIV Забабахинские научные чтения

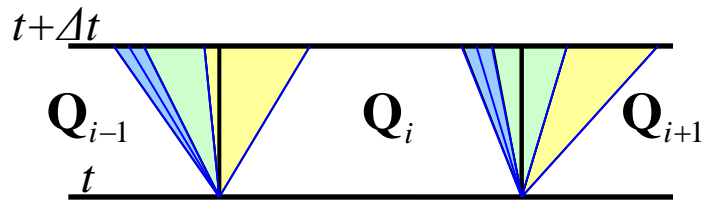
Снежинск
18-22 марта 2019

Введение. Мотивация.

- Построение численного метода для моделирования процессов, описываемых нелинейной гиперболической (в общем случае неконсервативной) системой ДУ (гидродинамика, упругопластика, многофазная динамика).

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

- Моделирование на эйлеровых сетках, с использованием конечнообъемной дискретизации. Расчет нового временного слоя производится с использованием решения Задачи Римана.



$$\Delta l \mathbf{Q}_i^{j+1} = \Delta l \mathbf{Q}_i^j - \Delta t [W_{i-1/2}^+ + W_{i+1/2}^-]$$

$$W_{i-1/2}^+ = \int_0^{c_{i-1/2}^+} (\mathbf{Q}_{i-1/2}^+ - \mathbf{Q}_i) dx; \quad W_{i+1/2}^- = \int_{c_{i+1/2}^-}^0 (\mathbf{Q}_{i+1/2}^- - \mathbf{Q}_i) dx$$

Цель:

Построение методики аппроксимации решения Задачи Римана.

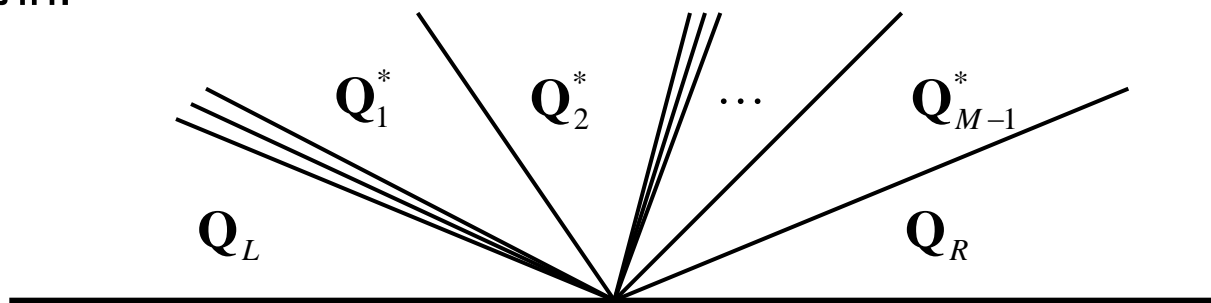
- Учет полной волновой структуры решения ЗР
- Точное решение ЗР в случае консервативных систем

Основные предположения.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

- Матрица A ($N \times N$) имеет полный набор действительных собственных значений: $\lambda_1, \dots, \lambda_M$
- Собственные значения могут быть упорядочены, порядок возрастания не зависит от \mathbf{Q} : $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_M$

Решение ЗР автомодельное, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\xi)$ $\xi = \frac{x}{t}$, определяется полным набором волн:

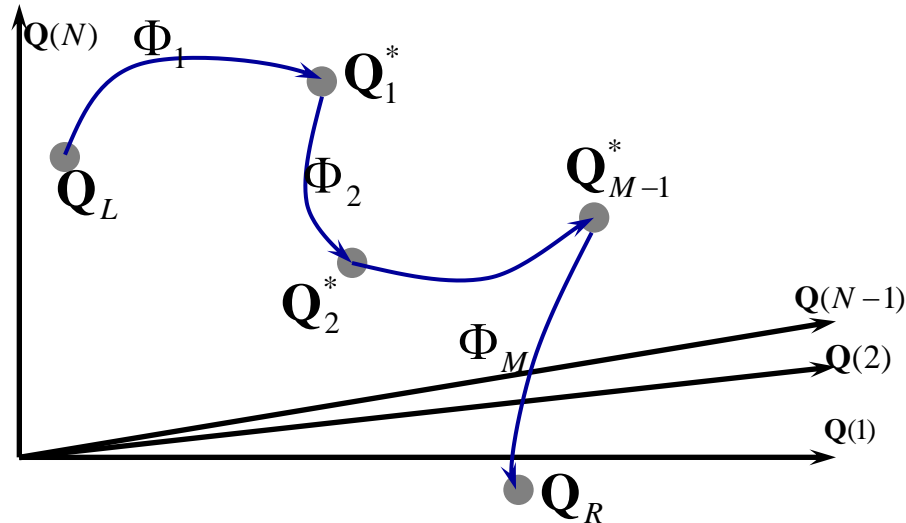


Решение ЗР представляет собой набор областей с постоянным распределением вектора состояния \mathbf{Q}_i^* , связанных разрывными либо непрерывными распределениями по автомодельной переменной.

* P.D. Lax. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and Mathematical Theory Shock Waves. SIAM, 1973.
О.А. Олейник. Тр. ММО, 1956, том 5, 433-454.

Решение Задачи Римана.

Определение пути* в фазовом пространстве



$$\Phi_i(0) = \mathbf{Q}_i^*$$

$$\Phi_i(1) = \mathbf{Q}_{i+1}^*$$

- Состояния слева и справа от волны, задаваемой с.з. λ_i связаны непрерывной параметризуемой кривой $\Phi_i(s)$.
- Путь в фазовом пространстве, выходящий из точки \mathbf{Q}_i^* рассматривается как множество состояний, связанных с \mathbf{Q}_i^* волной.
- Путь определяется в зависимости от типа волны – непрерывного или разрывного распределения

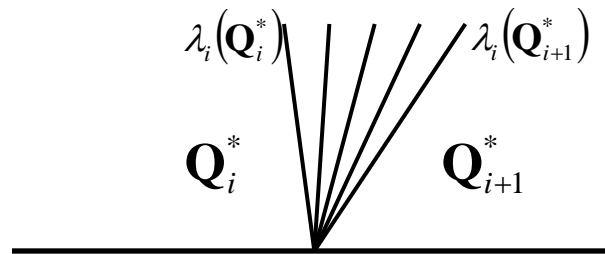
$$\mathbf{Q}^*(s_1) = \mathbf{Q}_i^* + \int_0^{s_1} \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} ds$$

*M.J. Castro et.al. ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. 47 (2013) 1-32
M. Dumbser et.al. Comput. Fluids 38 (2009) 1731-1748
C.Pares, SIAM J.Numer. Anal. 44 (2006) 300-321

Решение Задачи Римана.

Непрерывное распределение

$$\lambda_i(\mathbf{Q}_i^*) \leq \lambda_i(\mathbf{Q}_{i+1}^*)$$



Уравнение в автомодельных переменных $\xi = \frac{x}{t}$:

$$(A - \xi I) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} = 0$$

Условие существования нетривиального решения: $\xi = \lambda_i(\mathbf{Q})$.

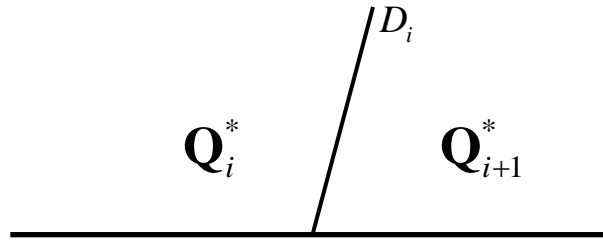
В каждой точке пути $\Phi_i(s)$:

$$\boxed{(A - \lambda_i I) \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = 0}$$

Решение Задачи Римана.

Разрывное распределение

$$\lambda_i(\mathbf{Q}_i^*) > \lambda_i(\mathbf{Q}_{i+1}^*)$$



Соотношение на разрыве, распространяющимся со скоростью D_i – обобщенное условие Рэнкина-Гюгоньо (M.L. Munoz-Ruiz, C. Pares, M2AN, 2007; Dal Maso et.al, J.Math.Pures Appl. 1995):

$$\int_0^1 A \frac{\partial \Phi_i}{\partial s} ds = D_i (\mathbf{Q}_{i+1}^* - \mathbf{Q}_i^*)$$

Положим, что в каждой точке пути $\Phi_i(s)$ выполняются соотношения:

$$\boxed{(A - D_i I) \frac{\partial \Phi_i(s)}{\partial s} - \frac{\partial D_i(s)}{\partial s} (\Phi(s) - \mathbf{Q}_i^*) = 0}$$

$$\boxed{D_i(0) = \lambda_i(\mathbf{Q}_i^*)}$$

Решение Задачи Римана.

Определение величины $\frac{\partial \Phi_i(s)}{\partial s}$

Уравнения касательного пространства $T_i(\mathbf{Q}^*)$ к пути в точке \mathbf{Q}^*

Непрерывное распределение

$$(A(\mathbf{Q}^*) - \lambda_i(\mathbf{Q}^*)I)(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}) = 0$$

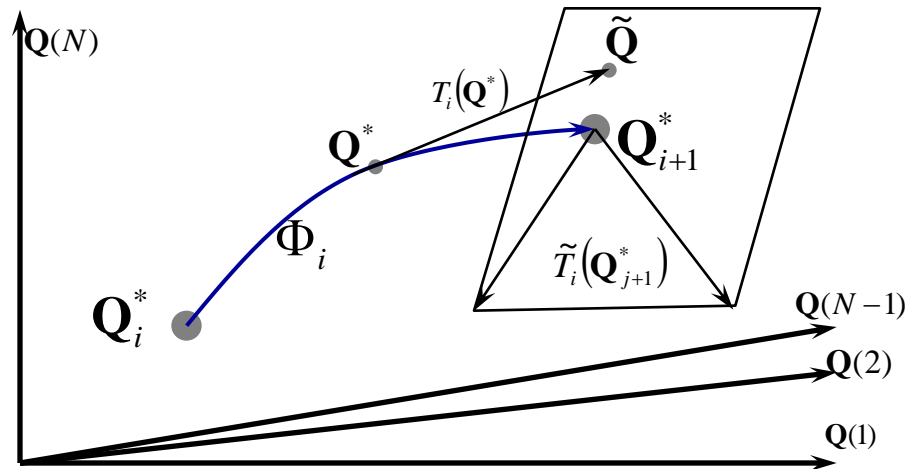
Разрывное распределение

$$(A(\mathbf{Q}^*) - D_i I)(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}) - (D_i^* - D_i)(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}_i^*) = 0$$

Построение вспомогательного подпространства $\tilde{T}_i(\mathbf{Q}_{i+1}^*)$, содержащего точку \mathbf{Q}_{i+1}^* , являющегося прямой суммой подпространств $T_j(\mathbf{Q}_{i+1}^*)$ (для всех $j \neq i$):

$$(A(\mathbf{Q}_{i+1}^*) - \lambda_j(\mathbf{Q}_{i+1}^*)I)(\mathbf{Q}_{i+1}^* - \mathbf{Q}) = 0$$

Нахождение точки $\tilde{\mathbf{Q}}$ пересечения $T_i(\mathbf{Q}^*)$ и $\tilde{T}_i(\mathbf{Q}_{j+1}^*)$



Решение Задачи Римана.

Определение величины производной вдоль пути $\Phi_i(s)$

Точка $\tilde{\mathbf{Q}}$ является решением системы линейных уравнений:

Непрерывное распределение

$$\begin{bmatrix} B_1(\mathbf{Q}_{i+1}^*) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & B_i(\mathbf{Q}^*) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_M(\mathbf{Q}_{i+1}^*) \\ I & \dots & -I & \dots & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{i+1}^* - \hat{\mathbf{Q}}_1 \\ \dots \\ \mathbf{Q}^* - \tilde{\mathbf{Q}} \\ \dots \\ \mathbf{Q}_{i+1}^* - \hat{\mathbf{Q}}_M \end{pmatrix} = 0$$

Разрывное распределение

$$\begin{bmatrix} B_1(\mathbf{Q}_{i+1}^*) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & B'_i(\mathbf{Q}^*) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & B_M(\mathbf{Q}_{i+1}^*) \\ I & \dots & -I' & \dots & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{i+1}^* - \hat{\mathbf{Q}}_1 \\ \dots \\ \mathbf{Q}^* - \tilde{\mathbf{Q}} \\ D_i^* - \tilde{D}_i \\ \dots \\ \mathbf{Q}_{i+1}^* - \hat{\mathbf{Q}}_M \end{pmatrix} = 0$$

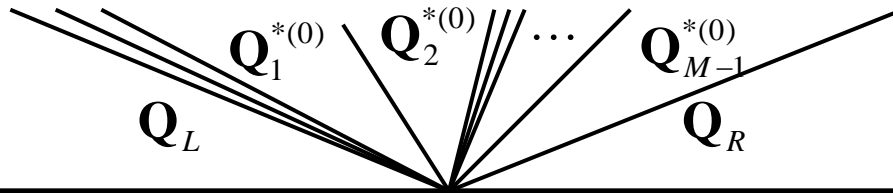
$$B_i(\mathbf{Q}) = A(\mathbf{Q}) - \lambda_i(\mathbf{Q})I \quad B'_i(\mathbf{Q}) = \left[(A(\mathbf{Q}) - \lambda_i(\mathbf{Q})I) \quad | \quad (\mathbf{Q}_i^* - \mathbf{Q}) \right] \quad I' = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi_i(s, \mathbf{Q}_i^*, \mathbf{Q}_{i+1}^*)}{\partial s} = \frac{\tilde{\mathbf{Q}} - \Phi_i(s)}{1-s}$$

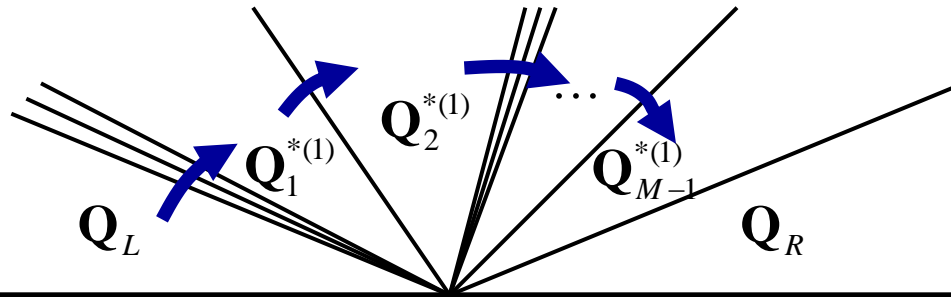
$$\frac{\partial D_i(s)}{\partial s} = \frac{\tilde{D}_i - D_i(s)}{1-s}$$

Процедура Построения Решения Задачи Римана.

1. Построение некоторого аппроксимационного решения $Q_1^{*(0)}, \dots, Q_{M-1}^{*(0)}$

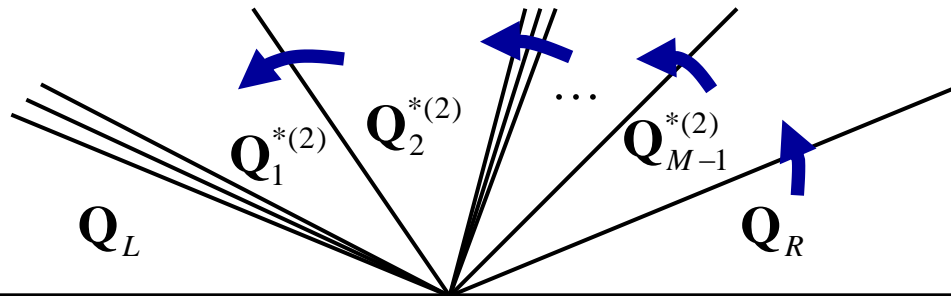


2. Построение нечетной итерации путем последовательного, слева направо, интегрирования вдоль путей $\Phi_1, \dots, \Phi_{M-1}$



$$Q_{i+1}^{*(j+1)} = Q_i^{*(j+1)} + \int_0^1 \frac{\partial \Phi_i(Q_i^{*(j+1)}, Q_{i+1}^{*(j)}, s)}{\partial s} ds$$

3. Построение четной итерации путем последовательного, справа налево, интегрирования вдоль путей Φ_M, \dots, Φ_2



$$Q_i^{*(j+1)} = Q_{i+1}^{*(j+1)} + \int_0^1 \frac{\partial \Phi_i(Q_{i+1}^{*(j+1)}, Q_i^{*(j)}, s)}{\partial s} ds$$

Система уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E + P u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} P &= P(\rho, e) \\ e &= E - \frac{u^2}{2} \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{Q(2)^2}{Q(1)^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial e} \left(-\frac{Q(3)}{Q(1)^2} + \frac{Q(2)^2}{Q(1)^3} \right) & 2 \frac{Q(2)}{Q(1)} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{Q(2)}{Q(1)^2} & \frac{\partial P}{\partial e} \frac{1}{Q(1)} \\ -\frac{Q(2)(Q(3)+P)}{Q(1)^2} + \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{Q(2)}{Q(1)} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{Q(2)Q(3)}{Q(1)^2} + \frac{Q(2)^2}{Q(1)^4} & \frac{Q(3)}{Q(1)} + \frac{P}{Q(1)} - \frac{\partial P}{\partial e} \frac{Q(2)^2}{Q(1)^3} & \frac{Q(2)}{Q(1)} + \frac{\partial P}{\partial e} \frac{Q(2)}{Q(1)^2} \end{bmatrix}$$

Рассматривается итерационная сходимость решения ЗР к точному решению на примере трех задач с различной волновой конфигурацией:

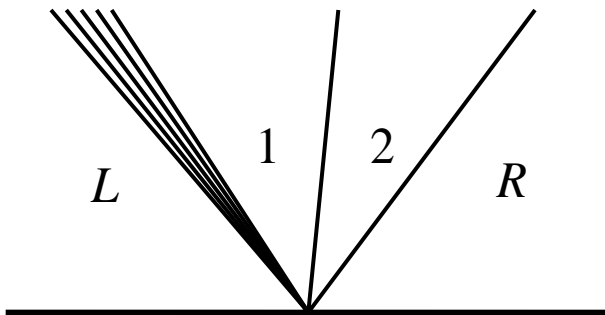
1. ВР – КР – УВ
2. ВР – КР - ВР
3. УВ – КР - УВ

Аппроксимация и сходимость методики на примере задач гидродинамики.

Тест 1.

ВР – КР – УВ

	left	right
ρ	1.0	0.75
u	0.0	0.05
P	1.0	0.9



№ итерации	ρ_L	ρ_1	ρ_2	ρ_R
0	1.00000000	0.166666667	0.416666667	0.750000000
1	1.00000000	0.977724084	0.748226072	0.750000000
2	1.00000000	0.942092483	0.761795623	0.750000000
3	1.00000000	0.942055255	0.761765707	0.750000000
4	1.00000000	0.942055360	0.761765792	0.750000000
5	1.00000000	0.942055359	0.761765791	0.750000000

№ итерации	$\rho_L u_L$	$\rho_1 u_1$	$\rho_2 u_2$	$\rho_R u_R$
0	0.00000000	0.025000000	-0.012500000	0.037500000
1	0.00000000	0.0458859568	0.0351152946	0.037500000
2	0.00000000	0.0661901334	0.0535227219	0.037500000
3	0.00000000	0.0661394123	0.0534817209	0.037500000
4	0.00000000	0.0661395555	0.0534818366	0.037500000
5	0.00000000	0.0661395551	0.0534818363	0.037500000

№ итерации	$\rho_L E_L$	$\rho_1 E_1$	$\rho_2 E_2$	$\rho_R E_R$
0	2.50000000	0.667291667	0.916354167	2.25093750
1	2.50000000	2.24362977	2.24337703	2.25093750
2	2.50000000	2.30202325	2.30157826	2.25093750
3	2.50000000	2.30189334	2.30144901	2.25093750
4	2.50000000	2.30189371	2.30144937	2.25093750
5	2.50000000	2.30189371	2.30144937	2.25093750

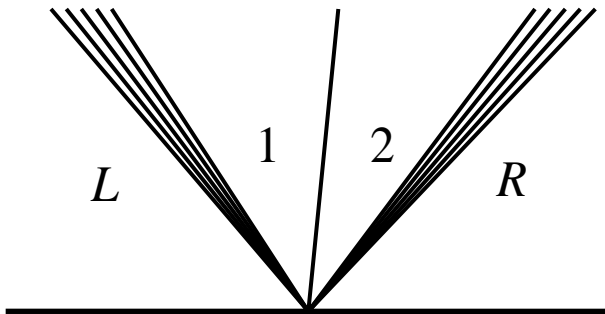
	ρ_1	ρ_2	u_1	u_2	P_1	P_2
Численное	0.942055359	0.761765791	0.070207715	0.070207715	0.91982875	0.91982878
Точное	0.942055351	0.761765807	0.070207723		0.91982877	

Аппроксимация и сходимость методики на примере задач гидродинамики.

Тест 1.

BP – KP - BP

	left	right
ρ	1.0	0.75
u	-1.0	1.0
P	1.0	0.9



№ итерации	ρ_L	ρ_1	ρ_2	ρ_R
0	1.00000000	0.899999999	0.850000001	0.750000000
1	1.00000000	0.810658090	0.431855540	0.750000000
2	1.00000000	0.399441213	0.322937270	0.750000000
3	1.00000000	0.398848104	0.322517326	0.750000000
4	1.00000000	0.398849573	0.322518509	0.750000000
5	1.00000000	0.398849569	0.322518506	0.750000000
6	1.00000000	0.398849569	0.322518506	0.750000000

№ итерации	$\rho_L u_L$	$\rho_1 u_1$	$\rho_2 u_2$	$\rho_R u_R$
0	-1.0000000	-1.10000000	0.850000001	0.750000000
1	-1.0000000	0.261539728	0.139328012	0.750000000
2	-1.0000000	-0.00203640980	-0.00164638149	0.750000000
3	-1.0000000	-0.00260183273	-0.00210389902	0.750000000
4	-1.0000000	-0.00260024004	-0.00210261111	0.750000000
5	-1.0000000	-0.00260024455	-0.00210261475	0.750000000
6	-1.0000000	-0.00260024453	-0.00210261474	0.750000000

№ итерации	$\rho_L E_L$	$\rho_1 E_1$	$\rho_2 E_2$	$\rho_R E_R$
0	3.00000000	2.90000000	0.916354167	2.62500000
1	3.00000000	1.08108449	0.224337703	2.62500000
2	3.00000000	0.691618487	0.230157826	2.62500000
3	3.00000000	0.690362846	0.230144901	2.62500000
4	3.00000000	0.690366382	0.230144937	2.62500000
5	3.00000000	0.690366372	0.230144937	2.62500000
6	3.00000000	0.690366372	0.690364749	2.62500000

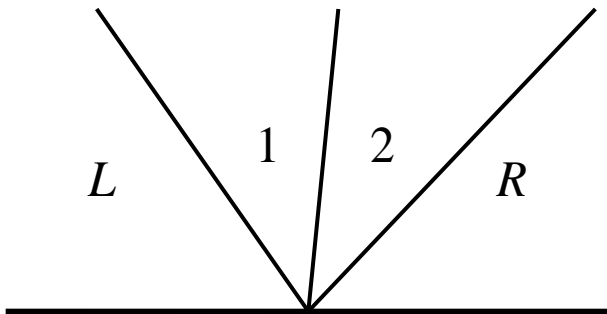
	ρ_1	ρ_2	u_1	u_2	P_1	P_2
Численное	0.398849569	0.322518506	-0.0065193615	-0.0065193615	0.276143158	0.276143159
Точное	0.398844397	0.322514081	-0.0065221891		0.276137186	

Аппроксимация и сходимость методики на примере задач гидродинамики.

Тест 1.

УВ – КР - УВ

	left	right
ρ	1.0	0.75
u	1.0	-1.0
P	1.0	0.9



№ итерации	ρ_L	ρ_1	ρ_2	ρ_R
0	1.00000000	0.375000000	0.400000000	0.750000000
1	1.00000000	1.95200293	1.56869636	0.750000000
2	1.00000000	1.95353727	1.56448433	0.750000000
3	1.00000000	1.95349845	1.56449649	0.750000000
4	1.00000000	1.95349856	1.56449646	0.750000000
5	1.00000000	1.95349856	1.56449646	0.750000000

№ итерации	$\rho_L u_L$	$\rho_1 u_1$	$\rho_2 u_2$	$\rho_R u_R$
0	1.00000000	-0.37500000	0.850000001	-0.750000000
1	1.00000000	0.209410744	0.168289641	-0.750000000
2	1.00000000	0.199959315	0.160136805	-0.750000000
3	1.00000000	0.199983055	0.160160244	-0.750000000
4	1.00000000	0.199982986	0.160160176	-0.750000000
5	1.00000000	0.199982987	0.160160176	-0.750000000

№ итерации	$\rho_L E_L$	$\rho_1 E_1$	$\rho_2 E_2$	$\rho_R E_R$
0	3.00000000	1.31250000	1.20000000	2.62500000
1	3.00000000	6.66452409	6.66231835	2.62500000
2	3.00000000	6.63507006	6.63303200	2.62500000
3	3.00000000	6.63515458	6.63311622	2.62500000
4	3.00000000	6.63515434	6.63311597	2.62500000
5	3.00000000	6.63515434	6.63311598	2.62500000

	ρ_1	ρ_2	u_1	u_2	P_1	P_2
Численное	1.95349856	1.56449646	0.102371709	0.102371709	2.649967216	2.649967218
Точное	1.95382698	1.565271757	0.10246096		2.650149125	

Аппроксимация методики на примере задач упругопластики.

Система уравнений Прандтля-Рейса

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + P - S_{xx}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u E + (P - S_{xx})u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho S_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u S_{xx}}{\partial x} = \frac{4}{3} \mu \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{S_{xx}^2 H(S_{xx} - \sqrt{2/3} Y)}{Y^2} \frac{\partial u}{\partial x} \end{array} \right.$$

$$P = P_C + \Gamma \rho (e - e_C)$$

$$e = E - \frac{u^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{S_{xx}^2}{4\mu\rho}$$

$$P_C = \frac{\rho C_0^2}{n} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right)$$

$$e_C = \frac{C_0^2}{n} \left(\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n-1} - 1 \right) \frac{1}{n-1} + \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)$$

Рассмотрим ЗР в постановках:

$$\rho_L = \rho_R = 1$$

$$u_L = -u_R = u^*$$

$$P_L = P_R = 1$$

$$S_{xxL} = S_{xxR} = 0$$

$$u^* = 0.05; -0.05; 0.2; -0.2$$

$$Y = 0.05$$

$$\mu = 4$$

$$\rho_0 = 1$$

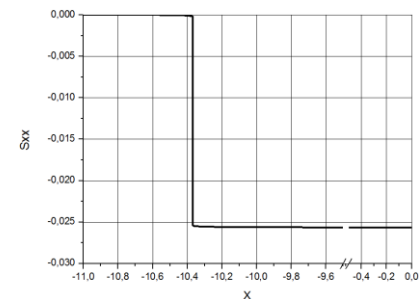
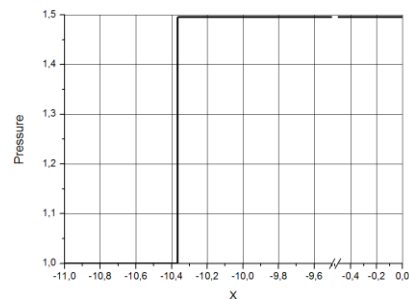
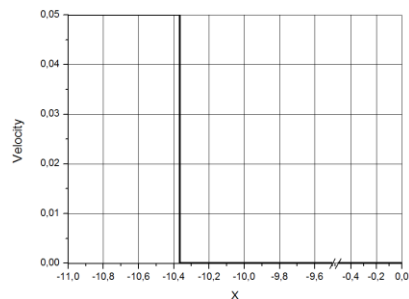
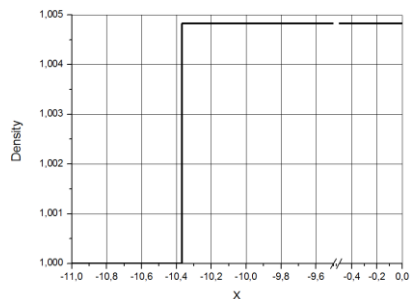
$$C_0 = 10$$

$$n = 2$$

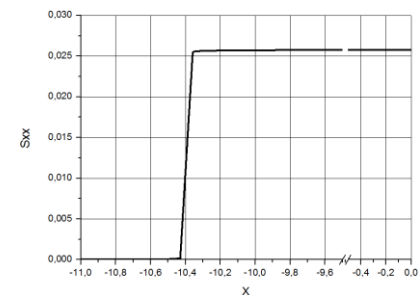
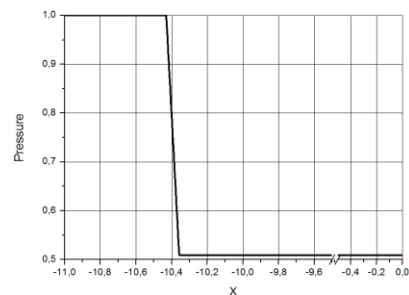
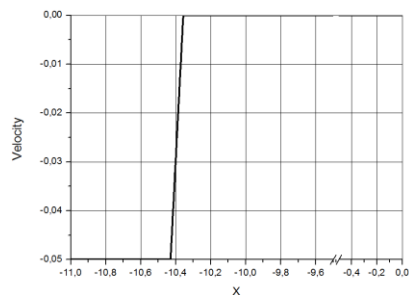
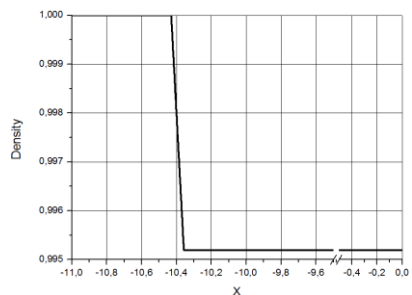
$$\Gamma = 1.4$$

Аппроксимация методики на примере задач упругопластики.

Распределение параметров в постановке $u^* = 0.05$:

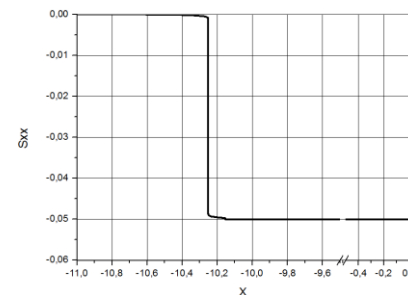
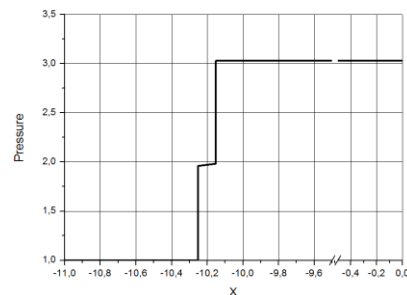
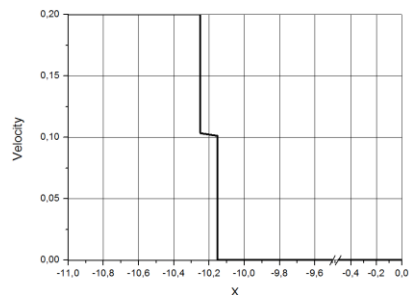
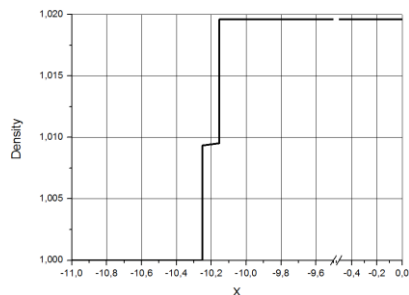


Распределение параметров в постановке $u^* = -0.05$:

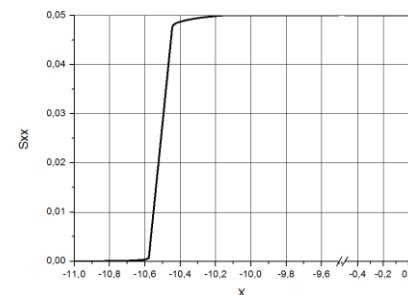
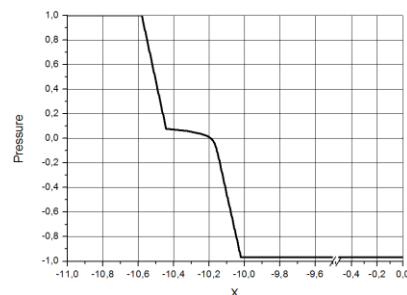
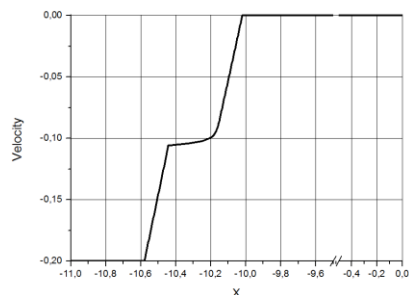
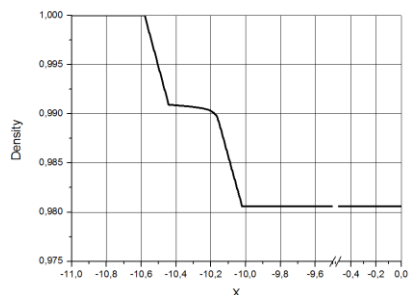


Аппроксимация методики на примере задач упругопластики.

Распределение параметров в постановке $u^* = 0.2$:

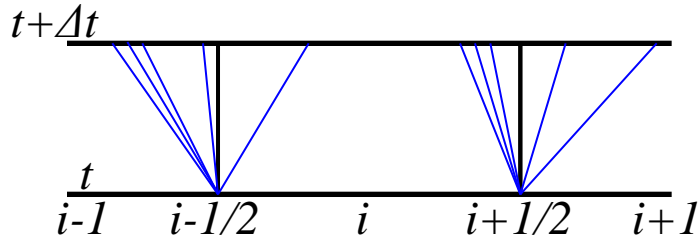


Распределение параметров в постановке $u^* = -0.2$:



Метод Годунова.

Дискретизация системы уравнений методом конечного объема.



$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0$$

$$\Delta t \mathbf{Q}_i^{j+1} = \Delta t \mathbf{Q}_i^j - \Delta t \left[\sum_{k=1}^M W_{i-1/2}^{k+} + \sum_{k=1}^M W_{i+1/2}^{k-} \right]$$

$$W_{i-1/2}^{k+} = \begin{cases} D_k (\mathbf{Q}_k^* - \mathbf{Q}_{k+1}^*), & \text{если } k \text{ - я волна - разрывное распределение и } D_k > 0 \\ \int_{\max(0, \lambda_k(\mathbf{Q}_{k+1}^*))}^{\max(0, \lambda_k(\mathbf{Q}_k^*))} A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} d\xi, & \text{если } k \text{ - я волна - непрерывное распределение} \end{cases}$$

$$W_{i+1/2}^{k-} = \begin{cases} D_k (\mathbf{Q}_k^* - \mathbf{Q}_{k+1}^*), & \text{если } k \text{ - я волна - разрывное распределение и } D_k < 0 \\ \int_{\min(0, \lambda_k(\mathbf{Q}_k^*))}^{\min(0, \lambda_k(\mathbf{Q}_{k+1}^*))} A \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} d\xi, & \text{если } k \text{ - я волна - непрерывное распределение} \end{cases}$$

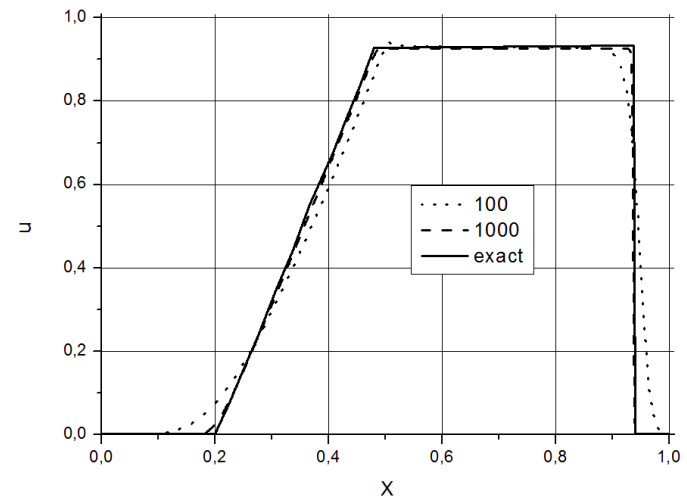
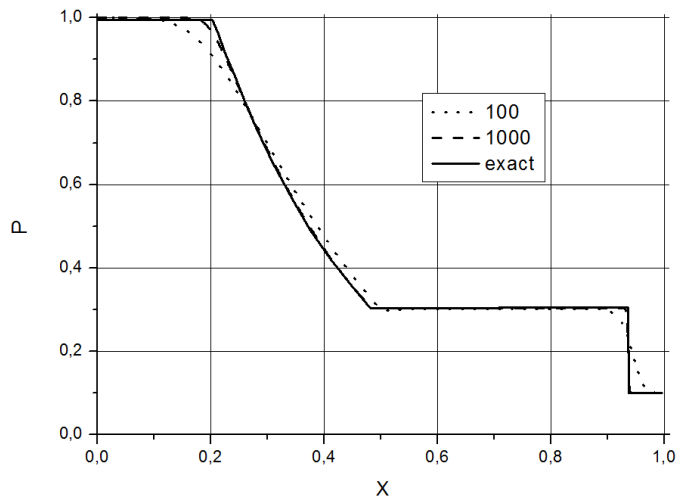
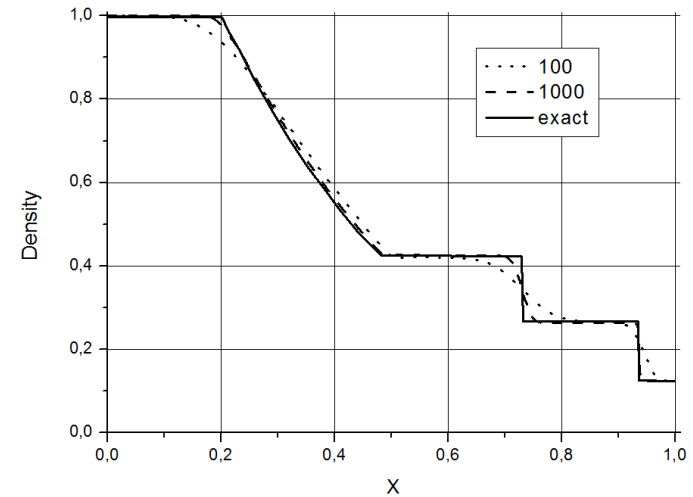
SOD-тест.

Начальные данные:

	left	right
ρ	1.0	0.125
u	0.0	0.0
P	1.0	0.1

Точное решение:

$P_1 = P_2$	$u_1 = u_2$	ρ_1	ρ_2
0.30313	0.92745	0.42632	0.26557



Заключение.

Преимущества метода:

- аппроксимация решения ЗР для гиперболических неконсервативных систем ДУ, учитывающая полную структуру волн.
- Точное решение ЗР для консервативных систем ДУ.

Недостатки метода:

- Большие вычислительные затраты

Направления дальнейшей деятельности:

- Развитие метода для систем уравнений с изменяющимся порядком возрастания собственных значений в зависимости от вектора состояния (Модели многофазных сред, Баера-Нунзиато).
- Повышение эффективности метода
 - - изменяемое количество шагов интегрирования
 - - построение более точных начальных аппроксимаций).

Спасибо за внимание!