



ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Баутин С. П., Кононов С. Н., Левунина Э. С.

г. Снежинск, 2019

Постановка задачи моделирования

Группой учёных под руководством Баутина С.П. в ряде работ предлагается математическое описание восходящих закрученных потоков, учитывающее максимально возможное количество влияющих факторов[1].

Рассмотрим полную систему уравнений Навье-Стокса (НСУНС) в цилиндрических координатах записанную в безразмерных переменных. Решение системы пяти уравнений описывает возникновение и функционирование восходящих закрученных потоков с учётом сил тяжести и Кориолиса, а также свойства вязкости и теплопроводности газа.

[1] - Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси: монография / С.П.Баутин, С.Л.Дерябин, И.Ю.Крутова, А.Г.Обухов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2017. – 335с.

ПСУНС в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned}
 & \rho_t + \zeta \rho_r + \frac{\eta}{r} \rho_\varphi + w \rho_z + \rho \left(\zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0, \\
 & \zeta_t + \zeta \zeta_r + \frac{\eta}{r} \zeta_\varphi - \frac{\eta^2}{r} + w \zeta_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_r + \frac{1}{\gamma} T_r = a\eta - b \cos \varphi w + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\zeta_{rr} + \frac{3}{4r^2} \zeta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \zeta_r - \frac{1}{r^2} \zeta + \frac{1}{4r} \eta_{r\varphi} - \frac{7}{4r^2} \eta_\varphi + \frac{3}{4} \zeta_{zz} + \frac{1}{4} w_{rz} \right), \\
 & \eta_t + \zeta \eta_r + \frac{\zeta \eta}{r} + \frac{\eta}{r} \eta_\varphi + w \eta_z + \frac{T}{\gamma r \rho} \rho_\varphi + \frac{1}{\gamma r} T_\varphi = -a\zeta + b \sin \varphi w + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4r} \zeta_{r\varphi} + \frac{7}{4r^2} \zeta_\varphi + \frac{3}{4} \eta_{rr} + \frac{1}{r^2} \eta_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r} \eta_r - \frac{3}{4r^2} \eta + \frac{3}{4} \eta_{zz} + \frac{1}{4r} w_{\varphi z} \right), \\
 & w_t + \zeta w_r + \frac{\eta}{r} w_\varphi + w w_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_z + \frac{1}{\gamma} T_z = b \cos \varphi \zeta - b \sin \varphi \eta - g + \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{1}{4} \zeta_{rz} + \frac{1}{4r} \zeta_z + \frac{1}{4r} \eta_{\varphi z} + \frac{3}{4} w_{rr} + \frac{3}{4r^2} w_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r} w_r + w_{zz} \right), \\
 & T_t + \zeta T_r + \frac{\eta}{r} T_\varphi + w T_z + (\gamma - 1) T \left(\zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = \\
 & \quad = \frac{\kappa_0}{\rho} \left(T_{rr} + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} + T_{zz} + \frac{1}{r} T_r \right) + \\
 & \quad + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ \left[\cos 2\varphi \left(\zeta_r - \frac{1}{r} \eta_\varphi - \frac{1}{r} \zeta \right) - \sin 2\varphi \left(\eta_r + \frac{1}{r} \zeta_\varphi - \frac{1}{r} \eta \right) \right]^2 + \right. \\
 & \quad + \left[\cos^2 \varphi \zeta_r - \cos \varphi \sin \varphi \eta_r - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{\sin^2 \varphi}{r} \zeta + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta - w_z \right]^2 + \\
 & \quad + \left[\sin^2 \varphi \zeta_r + \cos \varphi \sin \varphi \eta_r + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{\cos^2 \varphi}{r} \zeta - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta - w_z \right]^2 + \\
 & \quad + \frac{3}{2} \left[\sin 2\varphi \left(\zeta_r - \frac{1}{r} \eta_\varphi - \frac{1}{r} \zeta \right) + \cos 2\varphi \left(\eta_r + \frac{1}{r} \zeta_\varphi - \frac{1}{r} \eta \right) \right]^2 + \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} \left[\left(\zeta_z + w_r \right)^2 + \left(\eta_z + \frac{1}{r} w_\varphi \right)^2 \right] \right\}.
 \end{aligned} \right. \tag{1}$$

где:

ρ - плотность газа;
 T - температура газа;
 ζ, η, w - радиальная,
 окружная и
 вертикальная
 составляющие
 скорости газа;
 r, φ, z - цилиндрические
 координаты: радиус,
 угол поворота и
 высота;
 t - время.

Численный метод расчёта

В (1) полная система уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа представлена в цилиндрических координатах. В предложенном виде не представляется возможным рассчитать поведение газа при различных начальных и граничных условиях. Поведение воздушных масс согласно рассмотренной модели для конкретных случаев ведётся численными методами.

Регулярная сетка в цилиндрических координатах задаётся разными шагами по длине радиуса и высоте выбранного объёма и равными углами поворота плоскости, проходящей через ось симметрии. При этом плотность размещения узлов сетки растёт в направлении оси симметрии.

Уравнение неразрывности

Исходное уравнение

$$\rho_t + \zeta \rho_r + \frac{\eta}{r} \rho_\varphi + w \rho_z + \rho \left(\zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0,$$

i, j, k - номера шагов по r, φ, z соответственно,

hr - шаг по r , α - шаг по φ , hz - шаг по z

n - номер шага по времени, τ - шаг по времени.

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k}^{n+1} = & \rho_{i,j,k}^n - \tau \zeta_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\tau \eta_{i,j,k}^n}{ihr} \cdot \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \\ & - \tau w_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \tau \rho_{i,j,k}^n \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \right. \\ & \left. + \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2ihr\alpha} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2hz} \right) \end{aligned}$$

Компоненты скорости: радиальная

$$\begin{aligned}
 & \frac{\zeta_{i,j,k}^{n+1} - \zeta_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{(\eta_{i,j,k}^n)^2}{ihr} - \\
 & - w_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\gamma hr} + a\eta_{i,j,k}^n - \\
 & - b \cos(j\alpha) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \frac{3}{4(ihr)^2} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \right. \\
 & + \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2ihr^2} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{(ihr)^2} + \frac{\eta_{i+1,j+1,k}^n - \eta_{i-1,j+1,k}^n - \eta_{i+1,j-1,k}^n + \eta_{i-1,j-1,k}^n}{16i(hr)^2\alpha} - \\
 & - \frac{7}{4(ihr)^2} \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{3(\zeta_{i,j,k+1}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j,k-1}^n)}{4hz^2} + \\
 & \left. + \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{16hrhz} \right)
 \end{aligned}$$

Компоненты скорости: окружная

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta_{i,j,k}^{n+1} - \eta_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n \zeta_{i,j,k}^n}{ihr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n \eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \\
 & - w_{i,j,k}^n \frac{\eta_{i,j,k+1}^n - \eta_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma i h r \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2i h r \gamma \alpha} - a \zeta_{i,j,k}^n + \\
 & + b \sin(j\alpha) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{\zeta_{i+1,j+1,k}^n - \zeta_{i-1,j+1,k}^n - \zeta_{i+1,j-1,k}^n + \zeta_{i-1,j-1,k}^n}{16i h r^2 \alpha} + \right. \\
 & + \frac{7}{4(i h r)^2} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{3}{4} \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i-1,j,k}^n}{h r^2} + \frac{1}{(i h r)^2} \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \\
 & + \frac{3}{4} \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2i h r^2} - \frac{3}{4} \frac{\eta_{i,j,k}^n}{(i h r)^2} + \frac{3(\eta_{i,j,k+1}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i,j,k-1}^n)}{4h z^2} + \\
 & \left. + \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{16i h r \alpha h z} \right)
 \end{aligned}$$

Компоненты скорости: вертикальная

$$\begin{aligned}
 & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \\
 & - w_{i,j,k}^n \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma ihr \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2hz\gamma} + \\
 & + b \cos(j\alpha) \zeta_{i,j,k}^n - b \sin(j\alpha) \eta_{i,j,k}^n - g + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \cdot \\
 & \cdot \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k+1}^n - \zeta_{i-1,j,k+1}^n - \zeta_{i+1,j,k-1}^n + \zeta_{i-1,j,k-1}^n}{16hrhz} + \frac{1}{4ihr} \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \right. \\
 & + \frac{\eta_{i,j+1,k+1}^n - \eta_{i,j+1,k-1}^n - \eta_{i,j-1,k+1}^n + \eta_{i,j-1,k-1}^n}{16ihr\alpha hz} + \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \\
 & \left. + \frac{3}{4(ihr)^2} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \frac{3}{4ihr} \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{(w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n)}{hz^2} \right)
 \end{aligned}$$

Уравнение энергии

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - w_{i,j,k}^n \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \\
 & - (\gamma - 1) T_{i,j,k}^n \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2hz} \right) + \\
 & + \frac{\varkappa_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left(\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \frac{1}{i^2 hr^2} \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{hz^2} + \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2ihr^2} \right) + \\
 & + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho_{i,j,k}^n} \left\{ \cos 2j\alpha \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) - \right. \\
 & - \sin 2j\alpha \left(\frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) \left. \right]^2 + \\
 & + \left[\cos^2 j\alpha \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \right. \\
 & + \sin^2 j\alpha \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \sin^2 j\alpha \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} - \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2hz} \left. \right]^2 + \\
 & + \left[\sin^2 j\alpha \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \right. \\
 & + \cos^2 j\alpha \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \cos^2 j\alpha \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} - \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2hz} \left. \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[\sin 2j\alpha \left(\frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) + \right. \\
 & + \cos 2j\alpha \left(\frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) \left. \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \frac{w_{i+1,j,k}^n - w_{i-1,j,k}^n}{2hr} \right)^2 + \left(\frac{\eta_{i,j,k+1}^n - \eta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \frac{w_{i,j+1,k}^n - w_{i,j-1,k}^n}{2ihr\alpha} \right)^2 \right] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Реализация сеточной модели

**Моделируемый объем
воздуха**

$$\mathbf{r} \in [0; 1]$$

$$\varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\mathbf{z}: \in [0; H]$$



**Параметры
сетки**

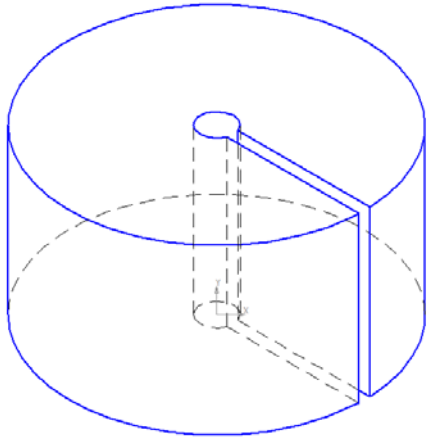
$$\mathbf{i}: \text{от } 0 \dots \text{ до } i_{\max}$$

$$\mathbf{j}: \text{от } 0 \dots \text{ до } j_{\max}$$

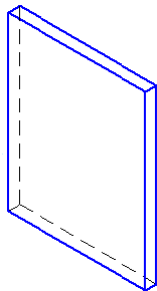
$$\mathbf{k}: \text{от } 0 \dots \text{ до } k_{\max}$$

Разбиение области моделирования

Основной объём

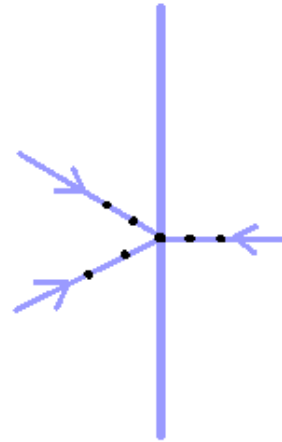


«Замыкание» объёма
при $\varphi = 0 = 2\pi$



для $j = 0$ вместо $j-1$
используется $j_{\max}-1$

Ось при $r = 0$



Параметры на оси
находятся по формуле (2) и
являются разностным
следствием равенства нулю
производной и эти значения
усредняются по количеству
лучей для каждого z .

$$\left. \frac{df}{dr} \right|_{r=0} = 0$$

$$f_{0,j,k}^n \approx \frac{4}{3} f_{1,j,k}^n - \frac{1}{3} f_{2,j,k}^n \quad (2)$$

Проверка построенной схемы

Для проверки счета взяли точное решение ПСУНС (1):

1. Составляющие скорости газа во всех точках равны нулю:

$$\zeta = \eta = w = 0;$$

2. Температура воздуха линейно падает с ростом высоты [1]:

$$T(z) = 1 - \kappa \cdot z = 1 - ((I_* \cdot T_{00})/r_{00}) \cdot z = 1 - 0,1106 \cdot z$$

$$\text{где } I_* = 0,0065 \text{ К/м}$$

3. Плотность воздуха зависит только от высоты [1]:

$$\rho(z) = (1 - 0,1106 \cdot z)^{\nu-1},$$

$$\text{где } \nu = (\gamma \cdot g)/\kappa = 5,471128$$

и его значение были приняты за начальные и краевые условия при разностном счёте по времени.

Физические Параметры модели

- температура воздуха на поверхности земли $T_{00} = 288 \text{ K}$;
- ускорение свободного падения $g_* = 9,8 \text{ м/с}^2$;
- показатель политропы для воздуха $\gamma = 1.4$;
- скорость звука в воздухе $C_{00} = (1/3) \cdot 10^3 \text{ м/с}$;
- вязкость воздуха $\mu_* = 17.9 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$
- плотность воздуха $\rho_{00} = 1.2928 \text{ кг/м}^3$

Расчётные параметры модели

- масштаб времени: $t_{oo} = r_{oo}/C_{oo} = 14,7$ (с),
- безразмерная g : $g = g_* \cdot (t_{oo}/C_{oo}) = 0,43218$;
- модуль вектора скорости вращения Земли вокруг своей оси:
 $\Omega = (2 \cdot \pi \cdot t_{oo}) / (24 \cdot 60 \cdot 60) = 2.18166 \cdot 10^{-5}$
- коэффициенты a и b :
 $a = 2 \cdot \Omega \cdot \sin\psi$, $b = 2 \cdot \Omega \cdot \cos\psi$,
 $a = b = 3.085304 \cdot 10^{-5}$
- безразмерный коэффициент вязкости воздуха:
 $\mu_0 = (4 \cdot \mu_*) / (3 \cdot \rho_{oo} \cdot C_{oo} \cdot r_{oo}) = 1,1302788 \cdot 10^{-11}$;
- безразмерный коэффициент теплопередачи:
 $\kappa_0 = 1,46 \cdot \mu_0 = 1,65020705 \cdot 10^{-11}$.

Выбор параметров модели

1. Количество узлов расчётной сетки:

По радиусу и высоте: $i_{\max} = k_{\max} = 50$,

По углу поворота: $j_{\max} = 200$;

2. Шаги координатной сетки:

$$hr = \frac{1}{(i_{\max} - 1)}; h\alpha = \frac{2\pi}{(j_{\max} - 1)}; hz = \frac{1}{(k_{\max} - 1)};$$

3. Соблюдение условия Куранта, Фридрихса и Леви необходимо для сходимости явной схемы [5], исходя из него выбирается шаг по

времени: $h\tau \leq \frac{h}{|\zeta| + c_{00}}$;

В случае когда скорости равны нулю, выберем шаг $h\tau = \frac{hr \cdot hz}{2}$;

4. Радиус расчётной области и высота $r_{00} = z_{00} = 4900$ м;

5. Широта местности возникновения циклона $\psi = 45^0$

Результаты тестового расчёта

В тестовой программе после 1000 шагов по времени максимальное отклонение значений плотности и температуры составило менее 0,2%. Отклонения остальных газодинамических параметров менее значительные.

Таким образом, нестационарным разностным счётом по разностной схеме точное решение передаётся без искажений.

Выводы

1. Решение полученной системы алгебраических уравнений описывает поведение воздушных масс в поле силы тяжести с учётом силы Кориолиса.
2. Проверочный счёт показал, что точное решение не разрушается.
3. Данная числовая схема после доработки и отладки механизмов распараллеливания будет использоваться в дальнейшем для моделирования восходящих закрученных потоков типа тропический циклон.

Список использованной литературы

1. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси: монография / С.П.Баутин, С.Л.Дерябин, И.Ю.Крутова, А.Г.Обухов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2017. – 335с.
2. В.М.Ковеня, Д.В.Чирков. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Электронное учебное пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. – 87 с.
3. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. – Новосибирск : Наука, 2008. - 96 с.
4. С.П.Баутин, В.Е.Замыслов, П.П.Скачков Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука, 2014. – 90 с.
5. С.К.Годунов, В.С.Рябенский Разностные схемы (введение в теорию), учебное пособие. Главная редакция физико-математической литературы. – М: Наука, 1977 – 440 с.
6. В.Л. Загускин. Основы численных методов для газодинамики с теплопроводностью. М., 2002. – 167 с.

**Спасибо за
внимание!**

Сила Кориолиса и ее проявления

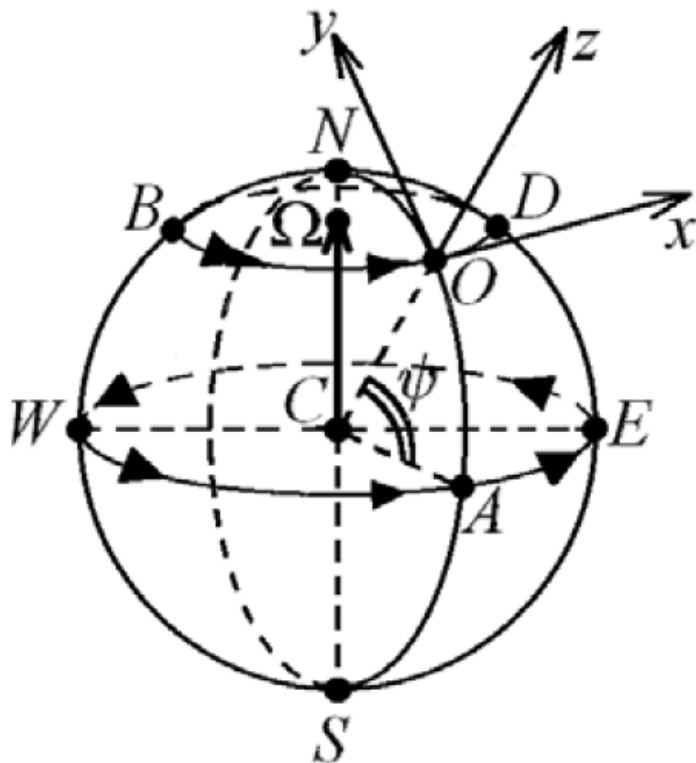


Рисунок 3 – Декартова система координат, вращающаяся вместе с Землёй

В работах группы учёных [Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты, 2013 и др.] основной причиной, приводящей к закручиванию восходящих потоков, является вращение Земли вокруг своей оси, которое проявляется через силу Кориолиса (СК).

Будем полагать Землю шаром, у которого ось вращения совпадает с земной осью юг-север.

- Описание происходящих в воздухе явлений происходит с привязкой к точке O .
- Система xuz образует правую тройку векторов.
- Скорость вращения Земли описывается вектором угловой скорости Ω .

$$\Omega = (0, \Omega_2, \Omega_3)$$

$$\Omega_2 = \Omega \cos \psi, \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

$$\text{модуль } \Omega = \frac{2\pi}{24} \frac{1}{\text{ч}} = 0.26180 \frac{1}{\text{ч}}.$$

Полная система уравнений Навье-Стокса

Запишем полную систему уравнений Навье-Стокса в размерных переменных, учитывающую законы сохранения, вязкость и теплопроводность реального воздуха в поле действия сил тяжести и с учётом силы Кориолиса [Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. - Екатеринбург: УрГУПС - 2017].

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{V}}_t + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} + R \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho} + R \nabla \tilde{T} = \tilde{\mathbf{g}} - 2\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{V}} + \\ + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}} \left[\frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}) + \Delta \tilde{\mathbf{V}} \right], \\ \tilde{T}_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{T} + \frac{R}{\tilde{c}_v} \tilde{T} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho}} \Delta \tilde{T} + \\ + \frac{2\tilde{\mu}}{3\tilde{c}_v \tilde{\rho}} \left\{ [(\tilde{u}_x - \tilde{v}_y)^2 + (\tilde{u}_x - \tilde{\omega}_z)^2 + (\tilde{v}_y - \tilde{\omega}_z)^2] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} [(\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)^2 + (\tilde{u}_z + \tilde{\omega}_x)^2 + (\tilde{v}_z + \tilde{\omega}_y)^2] \right\}. \end{array} \right. \quad (1)$$

Полная система уравнений Навье-Стокса

С учётом формул (6) соотношения (5) переходят в следующую систему уравнений Навье-Стокса в безразмерных переменных в поле действия сил тяжести и с учётом силы Кориолиса [Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. - Екатеринбург: УрГУПС - 2017].

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \\ + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + (u_x - \omega_z)^2 + (v_y - \omega_z)^2] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + \omega_x)^2 + (v_z + \omega_y)^2] \right\}. \end{array} \right. \quad (7)$$

Конечно-разностная схема

Производится замена дифференциального уравнения на конечно-разностную аппроксимацию [2].

i, j, k - номера шагов по r, φ, z соответственно,

hr - шаг по r , α - шаг по φ , hz - шаг по z

n - номер шага по времени, τ - шаг по времени.

$$\frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot hr}$$

(2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{hr^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4hr \cdot \alpha}$$