

# КРИТИЧНОСТЬ СИСТЕМЫ И ЕЕ ОТДЕЛЬНЫХ ЧАСТЕЙ

В.М. Шмаков

Российский федеральный ядерный центр – ВНИИТФ  
им. академика Е.И. Забабахина  
[v.m.shmakov@vniitf.ru](mailto:v.m.shmakov@vniitf.ru)

Снежинск 2019

# Введение

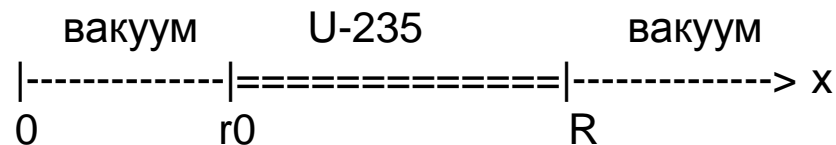
На первом этапе рассмотрим задачу на собственное значение и собственные функции уранового шара с вакуумной полостью. Будем искать плотность нейтронов  $u(x)$ , полный ток нейтронов  $\nu s(x)$  и временную постоянную интенсивности размножения  $\lambda$ . Точное аналитическое решение этой задачи в приближении *вперед–назад* приведено в [1, 2].

Основными положениями или особенностями этого приближения являются: одномерная геометрия, однотрупповое приближение, перенос нейтронов разрешен только вдоль нормалей к поверхности сферы (плоскости, цилиндра). Заметим, что приближения *вперед–назад* для переноса нейтронов принципиально отличается от приближения *вперед–назад* Шварцшильда для переноса излучения.

Полученные решения будут использованы при выводе ряда выражений для расчета  $\lambda$  всей системы и  $\lambda_k$  её отдельных областей. Будет показано, что для любых  $k$ -тых частей системы  $\lambda_k = \lambda$ .

Далее будет дан краткий обзор нескольких известных и новых методов или подходов расчета статической и динамической критичности, в которых предлагается использовать полные сечения воспроизводства нейтронов.

**Шар с центральной полостью**  
 **$r_0=2\text{см}, R=12, \lambda=2.6520 \text{ сек-7}$**



В [1, 2] приведено решение задачи для уранового шара с полостью.

|   |  |   |
|---|--|---|
| $\begin{cases} u(x) = C \cosh\left(\frac{\lambda x}{\nu}\right) \\ s(x) = -C \sinh\left(\frac{\lambda x}{\nu}\right) \end{cases}$ |  | $\begin{cases} u(x) = C^* B^* \exp\left(-\frac{\lambda x}{\nu}\right) \\ s(x) = u(x) \end{cases}$ |
| для полости шара $0 < x \leq r_0$   |  | для внешней области $x \geq R$  |

где:  $B = \exp\left(\frac{\lambda R}{\nu}\right) \left[ \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \cos\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \sin\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \right] \sqrt{\frac{(b+a)}{(b-a)}}$

$$\begin{cases} u(x) = C \cdot \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) + C \cdot \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \cdot \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \\ s(x) = C \cdot \cosh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \sqrt{\frac{b-a}{b+a}} \cdot \sin\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) - C \cdot \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \cdot \cos\left(\rho(x-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) \end{cases}$$

для шарового уранового слоя  $r_0 < x \leq R$

Далее **C=1** <sup>3</sup>

Значение  $\lambda$  находится из решения трансцендентного уравнения, в которое входят  $\lambda$ ,  $r_0$ ,  $R$  и одногрупповые константы.

$$\operatorname{tg}\left(\rho(R-r_0)\sqrt{b^2-a^2}\right) = \frac{\left(1 + \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{v}\right)\right)}{\left(\sqrt{\frac{b-a}{b+a}} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}} \operatorname{tgh}\left(\frac{\lambda r_0}{v}\right)\right)}$$

Здесь одногрупповые константы собраны в комбинации  $(b+a)$  и  $(b-a)$ :

$$b+a = \left[\sigma_t - \sigma_s(1-2q)\right] + \frac{\lambda}{\rho v} \qquad b-a = \left[\sigma_f(v_f-1) - \sigma_a\right] - \frac{\lambda}{\rho v}$$

Эти комбинации получаются при выводе системы уравнений приближения вперед-назад [1, 2]. При этом взаимодействие с ядром описывается тремя реакциями:

Рассеяние:  $\sigma_s(\mu' \rightarrow \mu) = \sigma_s[(1-q)\delta(\mu - \mu') + q\delta(\mu + \mu')]$

$\sigma_s$  – сечение рассеяния,

$q$  – вероятность рассеяния назад,  $(1-q)$  – вероятность рассеяния

вперед

Деление:  $\sigma_f(\mu' \rightarrow \mu) = v_f \sigma_f \left[ \frac{1}{2} \delta(\mu - \mu') + \frac{1}{2} \delta(\mu + \mu') \right]$

$\sigma_f$  – сечение деления,

$v_f$  – число нейтронов деления,  $q_f = 1/2$  – вероятность вылета вперед или назад.

Поглощение:  $\sigma_a$  – сечение поглощения,

Полное сечение:  $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_f + \sigma_a$

Для демонстрации корректности полученных выражений, на рисунках 1-2 представлено сравнение аналитики и численных расчетов Монте-Карло (ПРИЗМА) этой задачи. На рисунках 1-2 представлены потоки нейтронов в шаре с  $R=12\text{cm}$ ,  $r_0=2\text{cm}$  и  $\lambda=2.6520$  [1/c-7].

На рисунке 2 более подробно показана область около центра шара.

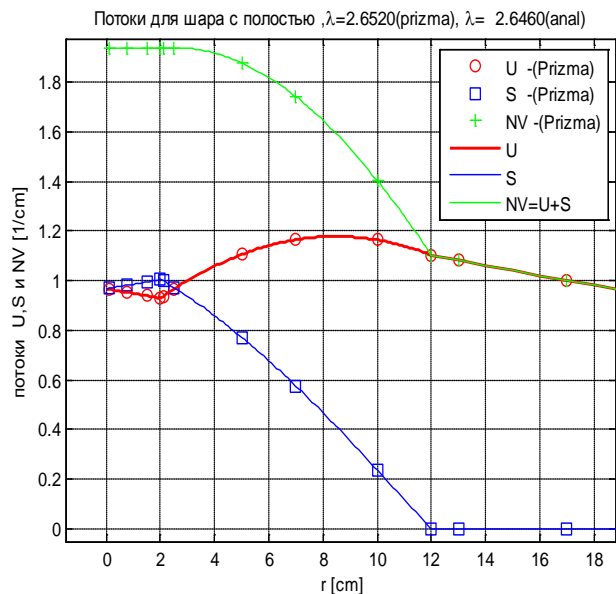


Рис 1. Потоки в шаре с полостью

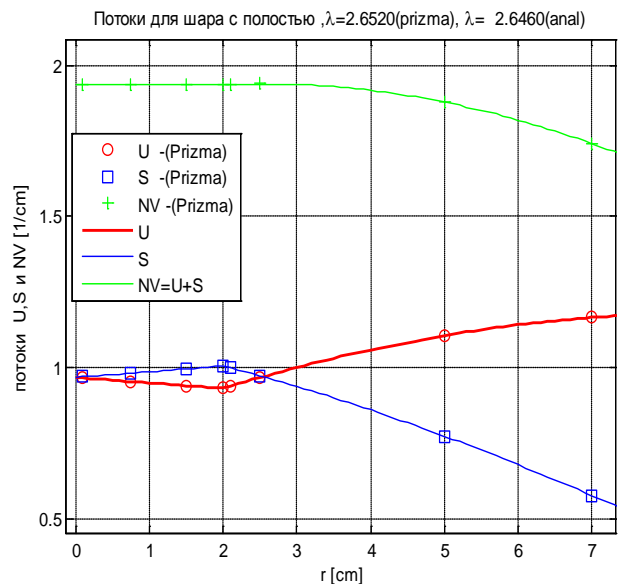


Рис. 2. Потоки в районе полости шара

$N$  – поток к центру шара,  $S$  - поток от центра шара,  $N+S=u$  – полный поток

На рисунках хорошо видно, как работает “временное поглощение” в полости шара и вне его. Рисунки демонстрируют полное совпадение аналитики (сплошные линии) и результатов расчета Монте-Карло.

Для вычисления  $\lambda$  всей системы и  $\lambda_k$  её отдельной части нам потребуются три функционала:

- $N, N_k$  – полное число нейтронов в системе и в  $k$ -той области,
- $\Delta J, \Delta J_k$  – баланс между влетевшими и вылетевшими нейтронами через поверхность системы и поверхность  $k$ -ой области,
- $B, B_k$  – полное воспроизводство нейтронов в системе и в  $k$ -той области.

В общем случае, для области  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ , эти выражения выглядят так:

$$N_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx$$

$$\Delta J_k = \nu s_{k-1} - \nu s_k$$

$$B_k = \rho \nu \sigma_t (\nu_t - 1) \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx = \rho \nu \left[ \sigma_f (\nu_f - 1) - \sigma_a \right] N_k = \rho \nu \left[ (b - a) + \frac{\lambda}{\rho \nu} \right] N_k$$

При выводе выражения для  $B_k$  использовали полное микроскопическое сечение воспроизводства нейтронов:

$$\sigma_t (\nu_t - 1)$$

в котором  $\nu_t$  – среднее число вторичных нейтронов, рождающихся на одном столкновении:

$$\nu_t = \frac{\sigma_s + \sigma_f \nu_f}{\sigma_t}$$

Для расчета  $\lambda$  и  $\lambda_k$  предложим формулы, в которых будут использованы функционалы  $N, N_k, \Delta J, \Delta J_k, B$  и  $B_k$

$$\lambda_k = \frac{B_k + \Delta J_k}{N_k} \quad - \text{ для } k\text{-ой области системы}$$

$$\lambda = \frac{B + \Delta J}{N} \quad - \text{ для полной системы}$$

Используя решение задачи для шара с полостью вычислим эти функционалы

## Область 1 – полость шара $0 \leq x \leq r_0$

### Напомним вид решения

$$\begin{cases} u(x) = \cosh\left(\frac{\lambda x}{\nu}\right) \\ s(x) = -\sinh\left(\frac{\lambda x}{\nu}\right) \end{cases}$$

### Функционалы

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= \nu s(0) - \nu s(r_0) = \nu \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \\ N_1 &= \int_0^{r_0} u(x) dx = \int_0^{r_0} \cosh\left(\frac{\lambda x}{\nu}\right) dx = \frac{\nu}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right) \\ B_1 &= 0 \end{aligned}$$

### $\lambda_1$ для полости шара

$$\lambda_1 = \frac{B_1 + \Delta J_1}{N_1} = \frac{0 + \nu \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)}{\frac{\nu}{\lambda} \sinh\left(\frac{\lambda r_0}{\nu}\right)} = \lambda$$

## Область 2 – урановый шаровой слой $r_0 \leq x \leq R$

В этом случае можно напрямую использовать громоздкие выражения из решения нашей задачи, но лучше воспользоваться вторым уравнением из системы уравнений приближения *вперед-назад* и выразить нейтронную плотность  $u$  через  $s$ .

**Система уравнений:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -s\rho(b+a) \\ \frac{\partial s}{\partial x} = u\rho(b-a) \end{cases}, \text{ то есть } u = \frac{1}{\rho(b-a)} \frac{\partial s}{\partial x}, \text{ тогда}$$

### **Функционалы**

$$N_2 = \int_{r_0}^R u(x) dx = \int_{r_0}^R \frac{1}{\rho(b-a)} \frac{\partial s}{\partial x} dx = \frac{s(R) - s(r_0)}{\rho\sigma_t(v_t - 1) - \frac{\lambda}{v}} = \frac{\nu[s(R) - s(r_0)]}{\rho\nu\sigma_t(v_t - 1) - \lambda}$$

$$\Delta J_2 = \nu[s(0) - s(r_0)]$$

$$B_2 = \int_{r_0}^R \rho\nu\sigma_t(v_t - 1)u(x) dx = \rho\nu\sigma_t(v_t - 1)N_2$$

**В результате получим  $\lambda_2$  для уранового слоя :**

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{B_2 + \Delta J_2}{N_2} = \frac{B_2}{N_2} + \frac{\Delta J_2}{N_2} = \frac{\rho\nu\sigma_t(v_t - 1)N_2}{N_2} + \nu[s(r_0) - s(R)] \frac{\rho\nu\sigma_t(v_t - 1) - \lambda}{\nu[s(R) - s(r_0)]} = \\ &= \rho\nu\sigma_t(v_t - 1) - [\rho\nu\sigma_t(v_t - 1) - \lambda] = \lambda \end{aligned}$$



## Область 3 – вакуумный слой вне шара $R \leq x \leq R_3$

### Напомним вид решения

$$\begin{cases} u(x) = B * \exp\left(-\frac{\lambda x}{\nu}\right) \\ s(x) = u(x) \end{cases}$$

### Функционалы

$$B_3 = 0$$

$$\Delta J_3 = \nu [s(R) - s(R_3)] = B * \nu \left[ \exp\left(-\frac{\lambda R}{\nu}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda R_3}{\nu}\right) \right]$$

$$N_3 = \int_R^{R_3} u(x) dx = \int_R^{R_3} B * \exp\left(-\frac{\lambda x}{\nu}\right) dx = -\frac{B}{\lambda} * \left[ \exp\left(-\frac{\lambda R_3}{\nu}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda R}{\nu}\right) \right]$$

**$\lambda_3$  для вакуумного слоя вне шара**

$$\lambda_3 = \frac{0 + \Delta J_3}{N_3} = -\frac{B * \nu \left[ \exp\left(-\frac{\lambda R}{\nu}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda R_3}{\nu}\right) \right]}{\left(\frac{B}{\lambda}\right) * \left[ \exp\left(-\frac{\lambda R_3}{\nu}\right) - \exp\left(-\frac{\lambda R}{\nu}\right) \right]} = \lambda$$

В завершении этого этапа вычислим  $\lambda_{12}$  для всей системы.

## Шар с полостью $0 < x < R$

**Заметим, что:**

$$\begin{cases} N_{12} = N_1 + N_2 \\ \Delta J_{12} = 0 - \nu s(R) = (0 - \nu s(r_0)) + (\nu s(r_0) - \nu s(R)) = \Delta J_1 + \Delta J_2 \\ B_{12} = B_1 + B_2 \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \frac{B_{12} + \Delta J_{12}}{N_{12}} = \frac{(B_1 + \Delta J_1) + (B_2 + \Delta J_2)}{N_{12}} = \frac{N_1}{N_{12}} \left[ \frac{(B_1 + \Delta J_1)}{N_1} \right] + \frac{N_2}{N_{12}} \left[ \frac{(B_2 + \Delta J_2)}{N_2} \right] = \\ &= \frac{N_1}{N_{12}} \lambda_1 + \frac{N_2}{N_{12}} \lambda_2 = \lambda \left( \frac{N_1 + N_2}{N_{12}} \right) = \lambda \end{aligned}$$

**В результате временная константа интенсивности размножения всей системы и любой её части одна и та же.**

$$\lambda_{12} = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

## Почему выбрали эти функционала ?

Расчеты задач на собственные значения методом установления начинаются с произвольного мгновенного по времени распределения источника и заключаются в прослеживании потока нейтронов во времени. Предполагается, что, в конечном счете, распределение плотности нейтронов в поколении установится в соответствии с собственной функцией (система релаксирует в основное состояние). К этому моменту происходит разделение энергетических, пространственных и угловых переменных и времени. В результате последующее поведение системы будет характеризоваться простой экспоненциальной зависимостью потока от времени:

$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[\lambda_0 t]$$

## Почему выбрали эти функционала ?

Для расчетов интенсивности размножения нейтронов  $\lambda$  известны два метода – статический метод (метод Келлога) и динамический метод (метод установления) [3]. В первом случае рассматривается уравнение с пробной  $\lambda$  во временном сечении поглощения:

$$\vec{\Omega}\vec{\nabla} \nu N = -\left(\Sigma_t + \frac{\lambda}{\nu}\right) \nu N + \iint \left[ \frac{\Sigma'_f \nu'_f f'_f}{k} + \Sigma'_s f'_s \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega}$$

Итерациями по  $\lambda$  ищется корень уравнения  $k(\lambda) = 1$

Во втором случае рассматривается уравнение:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{\Omega}\vec{\nabla} \nu N = -\Sigma_t \nu N + \iint \left[ \Sigma'_f \nu'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega}$$

и ищется логарифмическая производная по времени от полного числа нейтронов  $N_0$  в системе на момент выхода нейтронной плотности на собственную функцию:

$$\lambda = \frac{d \ln(N_0)}{dt}$$

# Почему выбрали эти функционала ?

## Динамическая интенсивность размножения

Здесь и далее будут рассматриваться интегралы от левой и правой частей уравнения Больцмана по пространству системы (или области  $V$ ), по всем энергиям и всем направлениям.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \iiint \left[ \Sigma'_f \nu'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega} - \Sigma_t \nu N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} \nu N$$

После интегрирования получим:  $\frac{\partial N_0}{\partial t} = B + \Delta J$

$$N_0 = \iiint_{V, E, \Omega} N(r, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} dE d\vec{\Omega} \quad - \text{ полное число нейтронов в системе (V)}$$

$$\Delta J = \iiint_{V, E, \Omega} \vec{\Omega} \vec{\nabla} \nu N d\vec{r} dE d\vec{\Omega} \quad - \text{ баланс между влетевшими и вылетевшими нейтронами через поверхность системы (V)}$$

$$B = \iiint_{V, E, \Omega} \rho \sigma_t (\nu_t - 1) \nu N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} dE d\vec{\Omega} \quad - \text{ полное воспроизводство нейтронов в системе (V)}$$

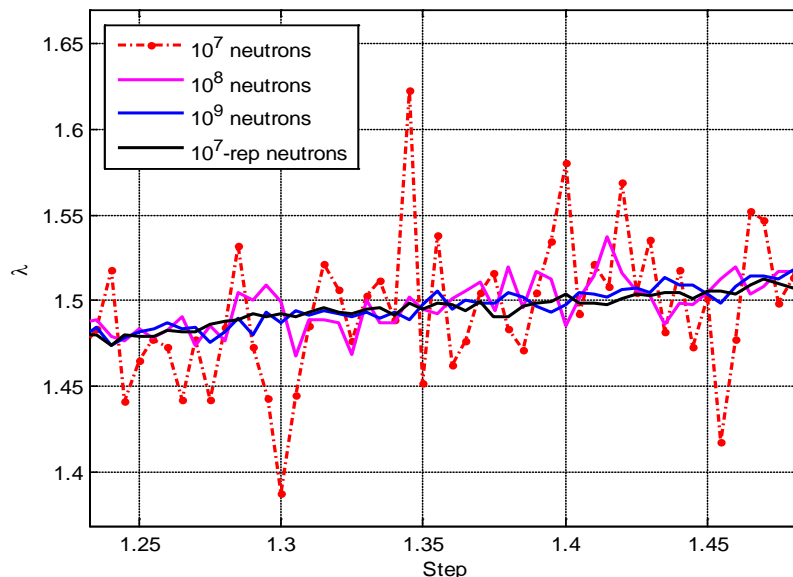
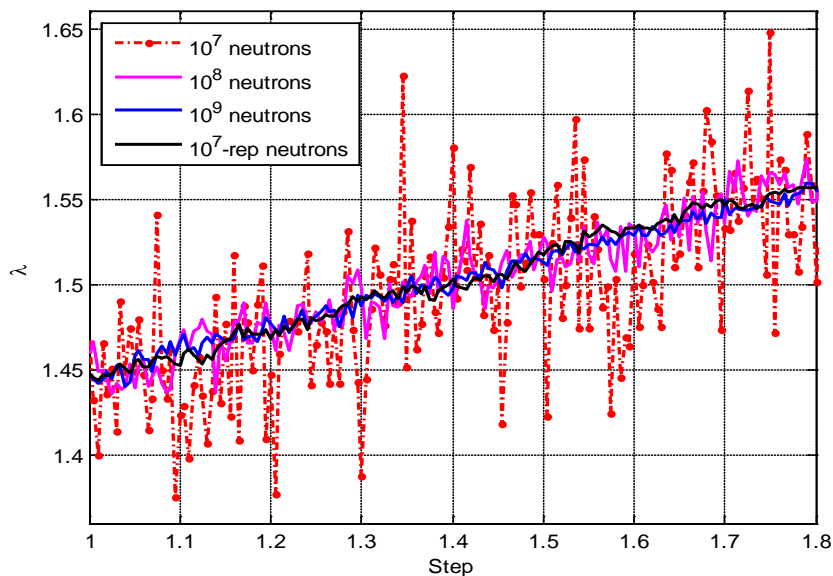
В результате правая и левая части уравнения переноса равны, следовательно получим:

$$\lambda = \frac{\partial \ln(N_0)}{\partial t} = \frac{B + \Delta J}{N_0}$$

## Пример расчетов Монте-Карло (СФИНКС) при сжатии слоистой системы методом установления с логарифмической производной и с использованием сечения воспроизводства нейтронов

- слоистая система содержит U, Pu, Be, Al, C и др.
- спектральные константы ENDF/B-V в формате PROM

Сравнение метода установления и метода баланса при использовании  $10^7$ ,  $10^8$  и  $10^9$  историй нейтронов

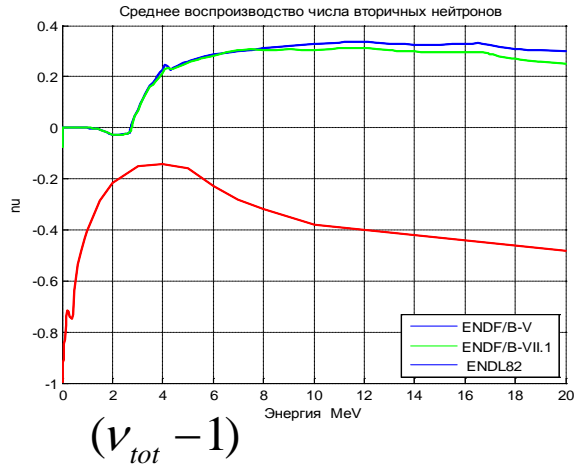


Эффективность расчета правой части уравнения с использованием сечения воспроизводства в 100 раз выше чем расчета производной из левой части.

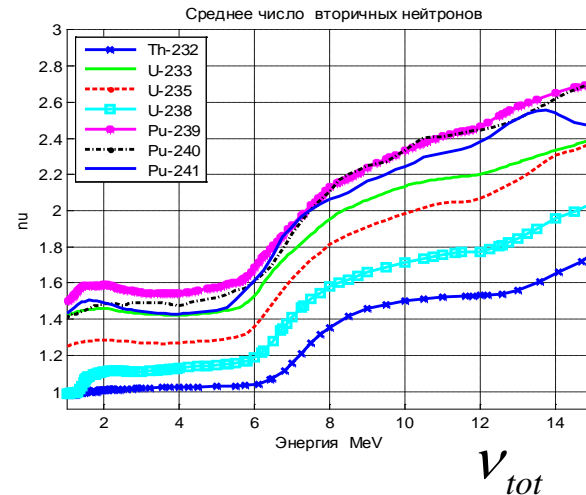
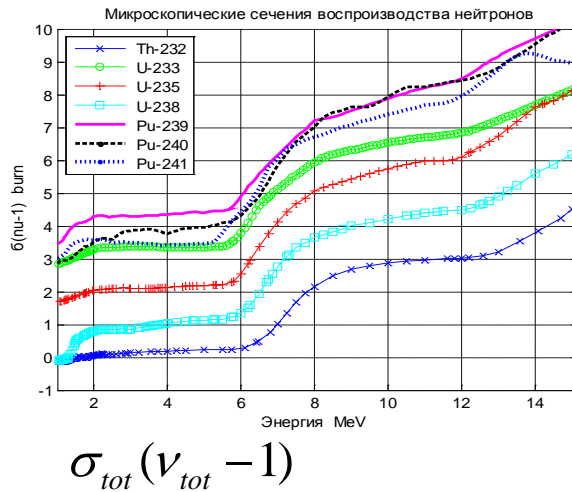
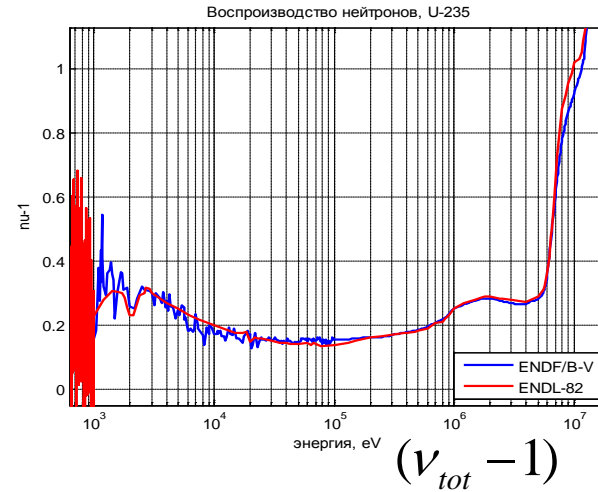
# Данные о воспроизводстве нейтронов в библиотеках формата PROM [4,5]

$$(\bar{\nu} - 1) = \sum_i \frac{N_{xs} \sigma_i(E)}{\sigma_{tot}(E)} \sum_k (\nu_i^{(k)}(E) - 1)$$

Be-9



U-235



## Статическая интенсивность размножения

Рассмотрим уравнение для статической критичности с добавкой  $\pm \Sigma'_f f'_f$

$$\lambda N = \iiint \left[ \frac{\Sigma'_f \nu'_f f'_f}{k} + \Sigma'_s f'_s \pm \Sigma'_f f'_f \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega}' - \Sigma_t \nu N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} \nu N$$

Проведем интегрирование правой и левой частей этого уравнения  $\iiint_{V,E,\Omega} \cup d\vec{r} dE d\vec{\Omega}$

После интегрирования получим  
зависимость  $\lambda(k)$

$$\lambda N_0 = \left( \frac{1}{k} - 1 \right) (\nu N)_f + B + \Delta J$$

где:  $(\nu N)_f = \iiint_{V,E,\Omega} \rho \sigma_f \nu_f \nu N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} dE d\vec{\Omega}$  - число нейтронов деления в системе

Это четвертый функционал, который потребуется в дальнейшем.  
Остальные три функционала нам уже знакомы.

Корень уравнения  $k(\lambda) = 1$  ищется итерациями.

Для пробной  $\lambda_n$  решается  
задача на Кэфф и  
вычисляются функционалы

$$N_{0,n}, B_n, \Delta J_n \Rightarrow \lambda_n = \left[ \left( \frac{1}{k} - 1 \right) (\nu N)_{f,n} + B_n + \Delta J_n \right] / N_{0,n}$$

На следующей итерации используется новая  
пробная  $\lambda_{n+1}$ , полученная из  $\lambda_n(k=1)$  :

$$\lambda_{n+1} = \frac{B_n + \Delta J_n}{N_{0,n}}$$



**Введем новые величины с удобным физическим смыслом и получим более наглядные выражения для  $\lambda(k)$  и  $k(\lambda)$  :**

$\lambda_f = (\nu N)_f / N_0$  – интенсивность образования нейтронов деления

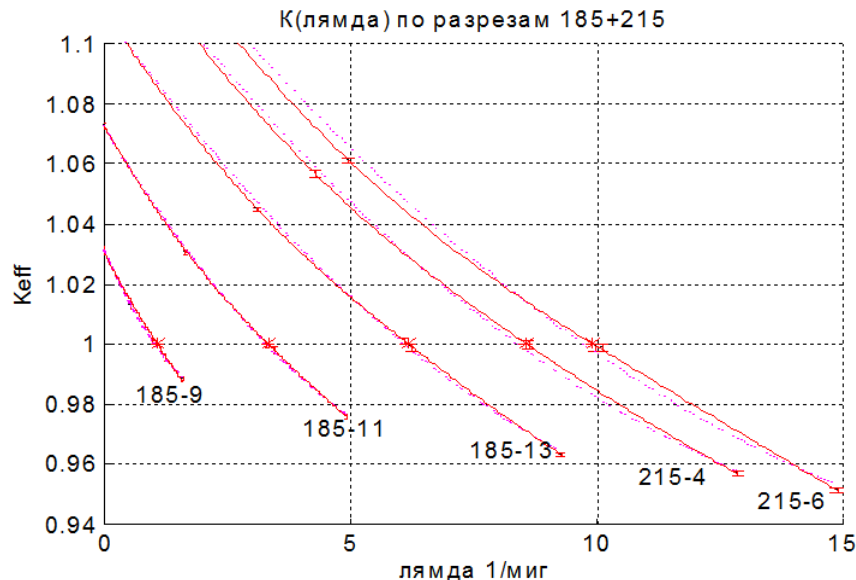
$\lambda_{rep} = B / N_0$  – интенсивность воспроизводства нейтронов

$L = -\Delta J / N_0$  – интенсивность утечки нейтронов из системы

тогда: 
$$\lambda(k) = \left( \frac{1}{k} - 1 \right) \lambda_f + \lambda_{rep} - L \quad \text{и} \quad k(\lambda) = \frac{\lambda_f}{\lambda + \lambda_f - \lambda_{rep} + L}$$

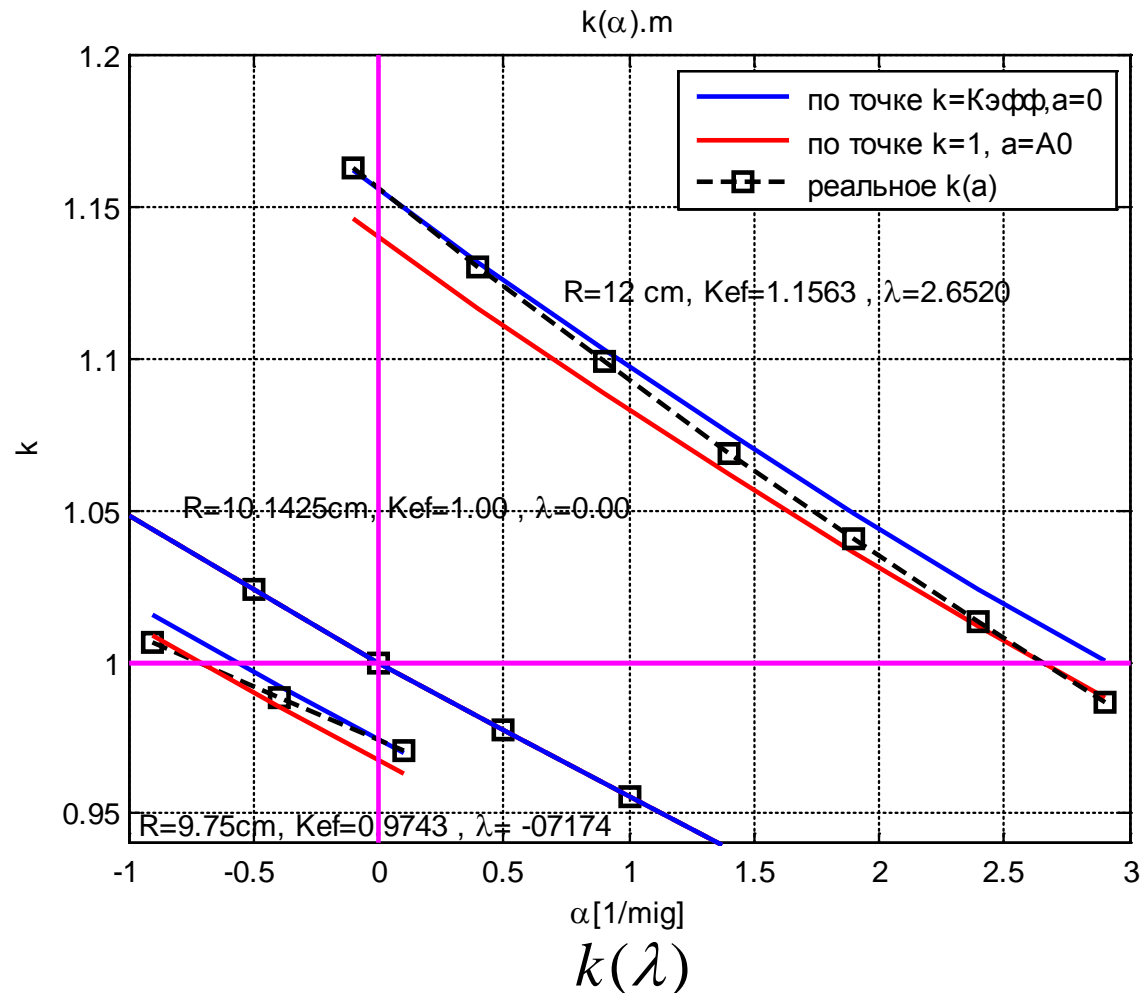
Зависимость  $k(\lambda)$  для нескольких шаровых систем разного радиуса

Расчеты Монте-Карло, ENDF/B-V



# Приближение вперед-назад: $k(\lambda)$

$$k(\lambda) = \frac{\lambda_f}{\lambda + \lambda_f - \lambda_{rep} + L} \quad \text{где: } \lambda_f = \rho \nu \sigma_f v_f, \quad \lambda_{rep} = \rho \nu \sigma_t (v_t - 1)$$



## Метод установления с двумя $\lambda$ : $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\lambda_1)$

Пусть 
$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[\lambda_0 t] = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)t]$$

Тогда для  $\lambda_1 > 0$

уравнение переноса

можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \iint [\Sigma'_f v'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s] v' N' dE' d\vec{\Omega} - \left( \Sigma_t + \frac{\lambda_1}{v} \right) v N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} v N$$

Решением будет либо  $\lambda_2 = \frac{\partial \text{Ln}(N_0)}{\partial t}$ , либо  $\lambda_2 = \frac{B + \Delta J}{N_0} = \lambda_{rep} - L$

где все три функционала будут зависеть от “временного поглощения”  $\frac{\lambda_1}{v}$  которое добавлено ко всем макроскопическим полным сечениям материалов системы, включая вакуум.

Очевидно, что решением будет сумма  $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\lambda_1)$

При этом СФ новой системы будут совпадать с СФ начальной системы для любых  $\lambda_1$ , которые можно менять в процессе расчета  $\lambda_2(\lambda_1)$

## Метод двух лямбд с отрицательной $\lambda_1$ : $\lambda_0 = -|\lambda_1| + \lambda_2(\lambda_1)$

Пусть 
$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[\lambda_0 t] = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[(-|\lambda_1| + \lambda_2)t]$$

Что бы привести задачу с отрицательно  $\lambda_1$  к задаче с положительной  $\lambda_1$  надо во всей системе добавить фиктивную  $\delta$ -реакцию деления с сечением  $|\lambda_1|/\nu$ , в которой рождается два нейтрона:  $\delta(n, fis 2n)$

В этой  $\delta$ -реакции деления каждый из двух вторичных нейтронов сохраняет направление и энергию налетающего нейтрона.

Тогда уравнение переноса можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \iint \left[ \Sigma'_f \nu'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s + 2 \frac{|\lambda_1|}{\nu} \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega}' - \left( \Sigma_t + \frac{|\lambda_1|}{\nu} \right) \nu N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} \nu N$$

Заметим, что фиктивная  $\delta$ -реакция добавляется ко всем макроскопическим полным сечениям материалов системы, включая вакуум.

Очевидно, что решением опять будет сумма  $\lambda_0 = -|\lambda_1| + \lambda_2(|\lambda_1|)$

## Метод установления с двумя $\lambda$ : $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\lambda_1)$

Пусть 
$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[\lambda_0 t] = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)t]$$

Тогда для  $\lambda_1 > 0$

уравнение переноса

можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \iint [\Sigma'_f v'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s] v' N' dE' d\vec{\Omega}' - \left( \Sigma_t + \frac{\lambda_1}{v} \right) v N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} v N$$

Решением будет либо  $\lambda_2 = \frac{\partial \text{Ln}(N_0)}{\partial t}$ , либо  $\lambda_2 = \frac{B + \Delta J}{N_0} = \lambda_{rep} - L$

где все три функционала будут зависеть от “временного поглощения”  $\frac{\lambda_1}{v}$  которое добавлено ко всем макроскопическим полным сечениям материалов системы, включая вакуум.

Очевидно, что решением будет сумма  $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\lambda_1)$

При этом СФ новой системы будут совпадать с СФ начальной системы для любых  $\lambda_1$ , которые можно менять в процессе расчета  $\lambda_2(\lambda_1)$

## Метод двух лямбд с отрицательной $\lambda_1$ : $\lambda_0 = -|\lambda_1| + \lambda_2(\lambda_1)$

Пусть 
$$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[\lambda_0 t] = N_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp[(-|\lambda_1| + \lambda_2)t]$$

Что бы привести задачу с отрицательно  $\lambda_1$  к задаче с положительной  $\lambda_1$  надо во всей системе добавить фиктивную  $\delta$ -реакцию деления с сечением  $|\lambda_1|/\nu$ , в которой рождается два нейтрона:  $\delta(n, fis 2n)$

В этой  $\delta$ -реакции деления каждый из двух вторичных нейтронов сохраняет направление и энергию налетающего нейтрона.

Тогда уравнение переноса можно записать в виде:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \iint \left[ \Sigma'_f \nu'_f f'_f + \Sigma'_s f'_s + 2 \frac{|\lambda_1|}{\nu} \right] \nu' N' dE' d\vec{\Omega} - \left( \Sigma_t + \frac{|\lambda_1|}{\nu} \right) \nu N - \vec{\Omega} \vec{\nabla} \nu N$$

Заметим, что фиктивная  $\delta$ -реакция добавляется ко всем макроскопическим полным сечениям материалов системы, включая вакуум.

Очевидно, что решением опять будет сумма  $\lambda_0 = -|\lambda_1| + \lambda_2(|\lambda_1|)$

# Нормализация пакета нейтронов

Известно, что при расчете Кэфф используется метод поколений. Метод заключается в оценке отношения числа нейтронов, родившихся от нейтронов предыдущего поколения, к числу нейтронов предыдущего поколения.

$$K_{эф,i} = \frac{N_i}{N_{i-1}}$$

В методе поколений необходима нормализация пакета (combing) нейтронов. Для того чтобы сохранить число начальных нейтронов в пакетах, надо проводить либо отсев либо пополнение пакета из числа нейтронов следующего поколения.

При Кэф > 1 часть нейтронов из следующего пакета не используется.

При Кэф < 1 приходится придумывать, как же дополнять пакет?

В первом случае будут затраты на моделирование лишних историй.

Во втором случае возникают проблемы с доказательствами о независимости результатов моделирования пакетов.

Для поддержания числа нейтронов в поколениях близким к заданному, можно увеличить (или уменьшить) число нейтронов деления во всех материалах на некоторое число  $\gamma$ , а полученное значение К'эфф, соответственно уменьшить (или увеличить) на  $\gamma$ . Очевидно, что при этом собственные функции сохраняются и множитель  $\gamma$  можно изменять в процессе счета задачи.

## Заключение

В докладе рассмотрено несколько методов расчета интенсивности размножения нейтронов  $N(t)=N_0\exp(\lambda t)$  с временной постоянной  $\lambda$  для систем с неподвижной геометрией. При этом, автором использовал ряд известных и очевидных вещей, однако он решил добавить их и изложить материал в одном месте и в одной манере.

-----

Для расчета  $\lambda$  предложен метод, в котором используются спектральные микроскопические сечения воспроизводства нейтронов. Показано полное совпадение расчетов  $\lambda$  системы методом баланса с расчетами полученными методом установления (динамическая  $\lambda$ ) и методом Келлога (статическая  $\lambda$ ).

-----

Для неподвижных систем показано, что  $\lambda$  полной системы можно получить в расчете интенсивности размножения нейтронов в отдельной части системы. Для этого используются полное число нейтронов ( $N$ ), полное воспроизводство нейтронов ( $B$ ), результирующий ток нейтронов ( $\Delta J$ ) через поверхность выделенной части системы и выражение  $\lambda=(B+\Delta J)/N$ .



## Заключение

Предложен метод вычисления динамической  $\lambda_2$  с дополнительным “временным поглощением”  $\lambda_1/v$  или дополнительным “временным размножением”  $-\lambda_1/v$ . В результате искомая интенсивность размножения нейтронов  $\lambda_0$  вычисляется как сумма  $\lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\lambda_1)$

---

Для расчетов Монте–Карло эффективного коэффициента размножения нейтронов Кэфф методом поколений предложен подход по нормализации пакета нейтронов, который позволяет поддерживать число нейтронов каждого последующего поколения на уровне начального числа нейтронов в пакете.

---

Некоторые утверждения из доклада были протестированы по программам Монте-Карло. Показано полное согласие одnogрупповых расчетов  $\lambda$  по программе ПРИЗМА с аналитическими решениями, полученными в рамках приближения вперед–назад.

---

Расчеты  $\lambda$  по программе ПРИЗМА со спектральными константами ENDF/B–V показали, что использование сечений воспроизводства вполне приемлемо как по точности, так и по эффективности.

## Литература

1. **В. М. Шмаков**, Приближение вперед-назад в теории переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып. 4. С. 29–40.
2. **V.M. Shmakov**, Back-and-forth approximation as a simple neutron transport model, Proc. The International Cooperation in Nuclear Criticality Safety, ICNC-2015, Charlotte, North Carolina, USA, September 14-18, 2015, # 14607.
3. **Dermott E. Cullen**, “Static and Dynamic Criticality: Are They Different?”, UCRL-TR-201506 (November 2003).
4. **Я.З. Кандиев, Э.С. Куропатенко, Г.В. Лукин, Е.И. Черепанова, В.М. Шмаков**. *Библиотеки системы константного обеспечения расчетов КОБРА. Использование библиотек ENDL, ENDF.* // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 1. С. 45-47
5. **Shmakov V.M., Lyutov V.D., Cherepanova E.I., Yazovskikh G.L., Orlov G.V., Klimova L.A.**, Use ENDF-Format Libraries for Criticality Calculations at VNIITF, // Proceedings of The Sixth International Conference on Nuclear Criticality Safety ICNC'99, Versailles, France (CD-ROM), P1\_24, Sept 20-24, 1999.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**