ЗАБАБАХИНСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ 2017

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ

Баутин С.П., Козлов П.А.

Моделируются одномерные и многомерные течения сжимаемого газа при учете его вязкости и теплопроводности. Это моделирование производится с помощью построения приближенных решений полной системы уравнений Навье–Стокса при постоянных значениях коэффициентов $\mu 0$ и $\kappa 0$. Но поскольку полная система уравнений Навье–Стокса (1) не разрешена относительно производных по времени, то в качестве независимых термодинамических параметров выбирают удельный объем $\delta = 1/\rho$ и давление p, где ρ – плотность.

Полная система уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \delta - \delta \, \mathrm{div} \mathbf{V} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \dfrac{1}{\gamma} \delta \nabla p = \mu_0 \delta \left[\dfrac{1}{4} \nabla (\mathrm{div} \mathbf{V}) + \dfrac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + \gamma p \, \mathrm{div} \mathbf{V} = \varkappa_0 \Delta(\delta p) + \Phi(\mu_0, \mathbf{V}). \end{cases}$$

$$\Phi(\mu_0, \mathbf{V}) = \mu_0 \gamma (\gamma - 1) \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\},$$

$\mu_0 = \mathrm{const}$, $\varkappa_0 = \mathrm{const}$, $\delta = 1/\rho$ – удельный объем, $p = \rho T$, $e = T$.

Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск, Наука. 2009, 368 с.

Титов С.С. Пространственно-периодические решения полной системы Навье–Стокса // Доклады АН. 1999.

Одномерная начально-краевая задача

$$\begin{cases} \delta_t = \delta u_x - u\delta_x, \\ u_t = -uu_x - \dfrac{1}{\gamma}\delta p_x + \mu_0 \delta u_{xx}, \\ p_t = -up_x - \gamma p u_x + \varkappa_0 (\delta p)_{xx} + \mu_0 \gamma(\gamma - 1) u_x^2, \\ \delta|_{t=0} = \delta^o(x), \\ u|_{t=0} = u^o(x), \\ p|_{t=0} = p^o(x), \\ u|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad T_x|_{x=0,\ x=\pi} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Поставленная начально-краевая задача имеет единственное решение в L_2, а при дополнительных предположениях и в $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ (по x, t).

Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

Кажихов А.В. Избранные труды. Математическая гидродинамика. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики. 2008.

Вид решения и его построение

$$\delta(t,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(t)\cos kx, \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx,$$

$$p(t,x) = 1 + p_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\cos kx, \tag{2}$$

Начальные данные:

$$\delta(t,x)|_{t=0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(0)\cos kx, \quad u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin kx,$$

$$p(t,x)|_{t=0} = 1 + p_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0)\cos kx, \tag{3}$$

Для представлений (2) при $x = 0$ и $x = \pi$ выполняются условия прилипания и теплоизоляции.

Сходимость представлений (2) доказана: Титов С.С., Курмаева К.В.

Для искомых коэффициентов $\delta_k(t)$, $u_k(t)$, $p_0(t)$, $p_k(t)$ получают бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений подстановкой выражений (3) в систему (2) и проецированием результатов подстановки на соответствующий тригонометрический базис. При этом для коэффициентов $\delta k(t)$, получается , например, такая бесконечная система:

$$\delta_l'(t) = l u_l(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\left[a_{kml}\delta_k(t)u_m(t) + b_{kml}u_k(t)\delta_m(t)\right], \qquad l = 1, 2, \ldots$$

$$a_{kml} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = k+m \text{ или } l = \left|k-m\right|, \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$b_{kml} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = \left|k-m\right|, \\ -1, & \text{если } l = k+m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\delta_\ell'(t) = \ell u_\ell(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m a_{km\ell} + k b_{km\ell}\right)\delta_k(t) u_m(t); \quad \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

$$u_\ell'(t) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m b_{k\ell m} u_k(t) u_m(t) + \frac{1}{\gamma}\ell p_\ell(t) +$$

$$+\frac{1}{2\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m b_{m\ell k}\delta_k(t) p_m(t) - \mu_0 \ell^2 u_\ell(t) -$$

$$-\mu_0\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m^2 b_{m\ell k}\delta_k(t) u_m(t); \quad \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

$$p_\ell'(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(m b_{km\ell} - \gamma k a_{km\ell}\right) u_k(t) p_m(t) -$$

$$-\gamma[1 + p_0(t)]\ell u_\ell(t) - \varkappa_0[1 + p_0(t)]\ell^2\delta_\ell(t) - \varkappa_0 \ell^2 p_\ell -$$

$$-\varkappa_0\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[(m^2 + k^2) a_{km\ell} - 2km b_{km\ell}\right] p_k(t)\delta_m(t) +$$

$$+\mu_0\gamma(\gamma - 1)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} km a_{km\ell} u_k(t) u_m(t); \quad \ell = 1, 2, 3, \ldots$$

$$p_0'(t) = \frac{1}{2}(1 - \gamma)\sum_{k=1}^{\infty} k u_k(t) p_k(t) + \frac{1}{2}\mu_0\gamma(\gamma - 1)\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2(t).$$

$$\underline{a_{k,m,\ell}} = \int_0^\pi \cos(kx)\cos(mx)\cos(\ell x)\,dx; \quad \underline{b_{k,m,\ell}} = \int_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)\cos(\ell x)\,dx.$$

Систему можно решить численно с необходимой точностью, оставив нужное число слагаемых, отбросив остальные.

Получающееся число уравнений: 3 x K + 1,

где K – число слагаемых тригонометрических рядов.

Для необходимой точности нужно взять K от 100 до 500, т.о. СОДУ состоит из порядка $10^3 - 10^4$ уравнений.

Параллельная программа для простой СОДУ

Распараллеливание численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, строящегося по методу Рунге-Кутты.

Научным руководителем предложен один из вариантов распараллеливания: имеется управляющий процессор, осуществляющий приём и передачу данных, и процессоры, считающие каждый своё уравнение системы.

Таким образом, необходима система с N+1 процессорами, где N – количество уравнений в решаемой СОДУ.

Иными словами, N = 3xK+2.

Общая организация счета

СОДУ:

$$\begin{cases} \delta'_\ell = f_{1\ell}\left(\delta, \mathbf{u}, \mathbf{p}\right); \\ u'_\ell = f_{2\ell}\left(\delta, \mathbf{u}, \mathbf{p}\right); \\ p'_0 = f_{30}\left(\delta, \mathbf{u}, \mathbf{p}\right); \\ p'_\ell = f_{3\ell}\left(\delta, \mathbf{u}, \mathbf{p}\right). \end{cases} \qquad \ell = 1, 2, ..., K$$

Число процессоров: $3K + 2$. Предназначения процессоров:

№ 0 –«управляющий»; №№ 1 – $(3K + 1)$ – «рабочие».

№ процессора	предназначение
0	«управляющий»
1	вычисление правых частей уравнения для δ_1
...	...
K	вычисление правых частей уравнения для δ_K
$K+1$	вычисление правых частей уравнения для u_1
...	...
$2K$	вычисление правых частей уравнения для u_K
$2K+1$	вычисление правых частей уравнения для p_1
...	...
$3K$	вычисление правых частей уравнения для p_K
$3K+1$	вычисление правых частей уравнения для p_0

Запись соответствующих программ на соответствующие процессоры

Программа для процессора с номером 0 – одна программа.

Программы вычисления правых частей дифференциальных уравнений – семь программ:

№ процессора	левая часть уравнение	ℓ этого уравнения
1	δ'_1	$\ell = 1$
K	δ'_K	$\ell = K$
$K+1$	u'_1	$\ell = 1$
K	u'_K	$\ell = K$
$2K+1$	p'_1	$\ell = 1$
$3K$	p'_K	$\ell = K$
$3K+1$	p'_0	$\ell = 0$

Значение ℓ должно быть указано в каждой программе в виде оператора: $\ell =$ соответствующее число.

Заключение

Написаны и проходят государственную регистрацию программы для многопроцессорного компьютера, решающие СОДУ.
Для написания программ используется язык C/C++ и библиотеки MPI для технологий распараллеливания.
Тестирование, отладка и исполнение программ происходит на суперкомпьютере НГУ (г. Новосибирск)

Спасибо за внимание !

E-mail: PKozlov@usurt.ru

В новых уравнениях будут присутствовать только одинарные суммы. И тогда для вычисления каждой суммы нужно примерно K вычислений, где K-это число слагаемых, которые остались, т.е. число уравнений в нашей системе.

Рассмотрим число арифметических операций, при вычислении правых частей систем однородных дифференциальных уравнений с двойными суммами и без двойных сумм.

Число арифметических операций, при вычислении правых частей систем однородных дифференциальных уравнений.

<table>
<tr><th>С двойными суммами</th><th>Без двойных сумм</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>левая часть уравнения</th><th>число операций</th></tr>
<tr><td>$\delta'_\ell(t)$</td><td>$5K^3+3K$</td></tr>
<tr><td>$u'_\ell(t)$</td><td>$13K^3+19K$</td></tr>
<tr><td>$p'_\ell(t)$</td><td>$16K^3+19K$</td></tr>
<tr><td>$p'_0(t)$</td><td>$5K+5$</td></tr>
<tr><td>итого</td><td>$34K^3+46K+5$</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>левая часть уравнения</th><th>число операций</th></tr>
<tr><td>$\delta'_1(t)$</td><td>$7K-5$</td></tr>
<tr><td>$\delta'_\ell(t)$</td><td>$6K^2-8K-1$</td></tr>
<tr><td>$\delta'_K(t)$</td><td>$5K-2$</td></tr>
<tr><td>$u'_1(t)$</td><td>$18K-2$</td></tr>
<tr><td>$u'_\ell(t)$</td><td>$12.5K^2-37.5K+44$</td></tr>
<tr><td>$u'_K(t)$</td><td>$10K+2$</td></tr>
<tr><td>$p'_1(t)$</td><td>$17K+15$</td></tr>
<tr><td>$p'_\ell(t)$</td><td>$15K^2-45K+56$</td></tr>
<tr><td>$p'_K(t)$</td><td>$15K-7$</td></tr>
<tr><td>$p'_0(t)$</td><td>$4K+5$</td></tr>
<tr><td>итого</td><td>$33.5K^2-21.5K+110$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Приблизительно вычислим разницу числа арифметических операций:

$$\frac{34K^3}{33.5K^2} \approx K$$

Таким образом, число арифметических операций, при вычислении правых частей систем однородных дифференциальных уравнений без двойных сумм, примерно в K раз меньше числа арифметических операций при вычислении правых частей систем однородных дифференциальных уравнений с двойными суммами.