

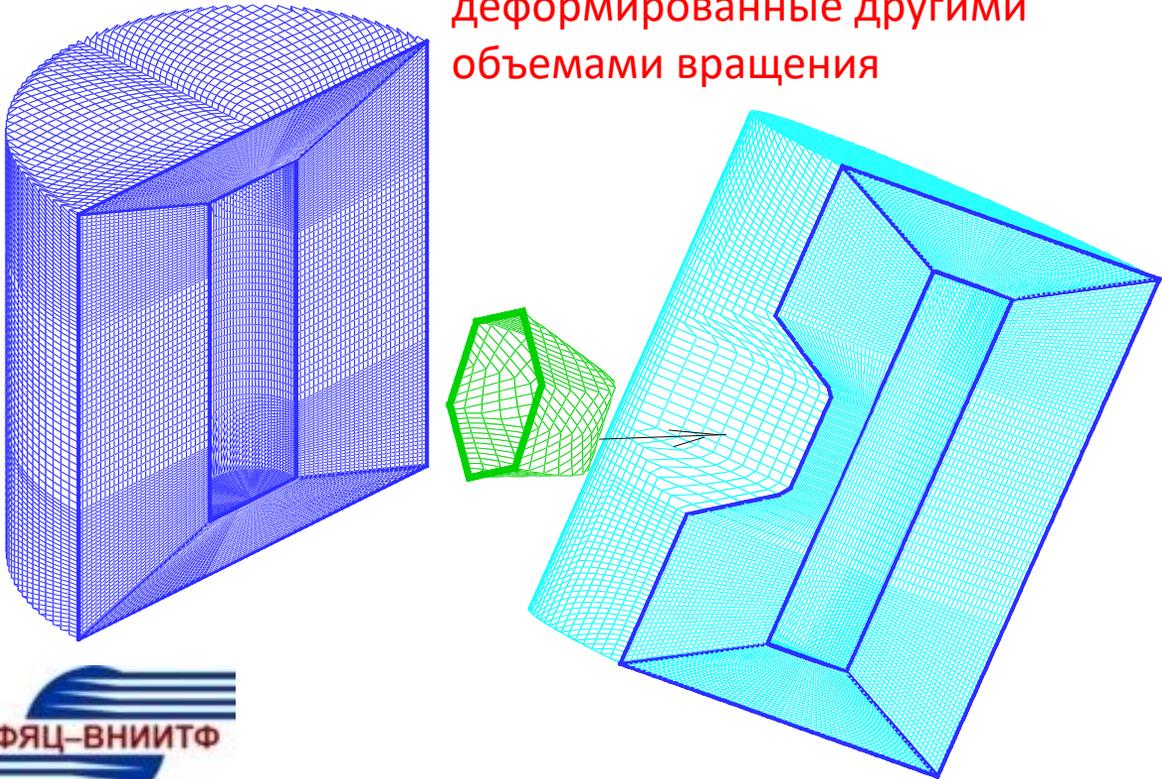
О РАЗВИТИИ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК В КОНСТРУКЦИЯХ, ОБРАЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

А.И. Анучина, Н.А.Артемова, В.А.Гордейчук, О.В. Ушакова

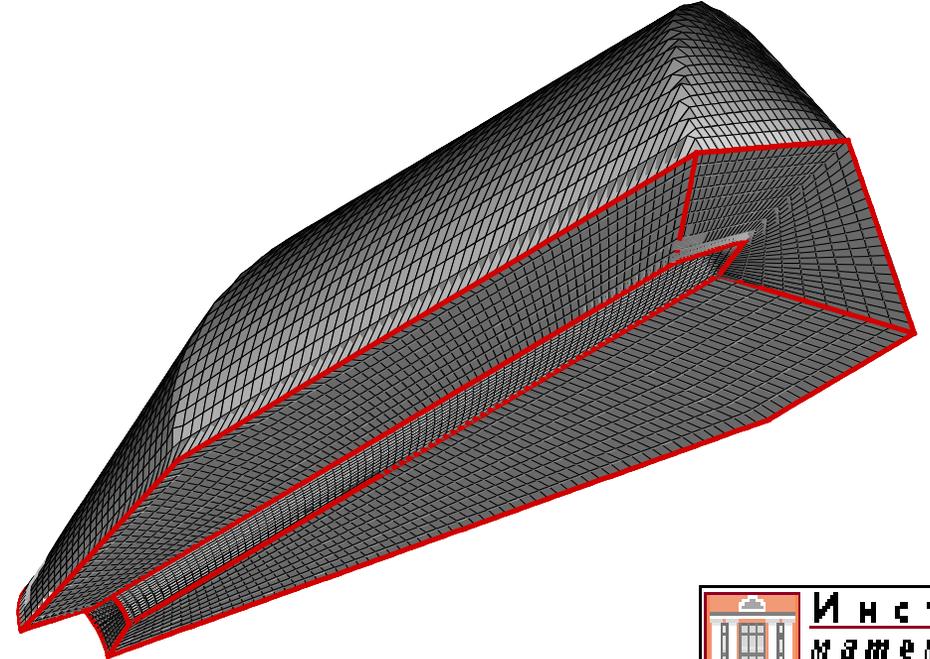
Институт математики и механики им Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, УрФУ, Екатеринбург

Российский Федеральный Ядерный Центр - ВНИИ технической физики им. академ. Е.И. Забабахина, Снежинск

1. Объемы вращения,
деформированные другими
объемами вращения

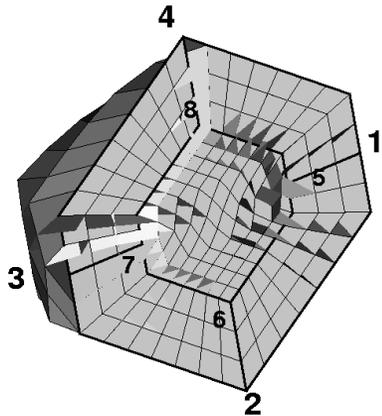


2. Объемы, образованные
поверхностями вращения с
параллельными осями вращения

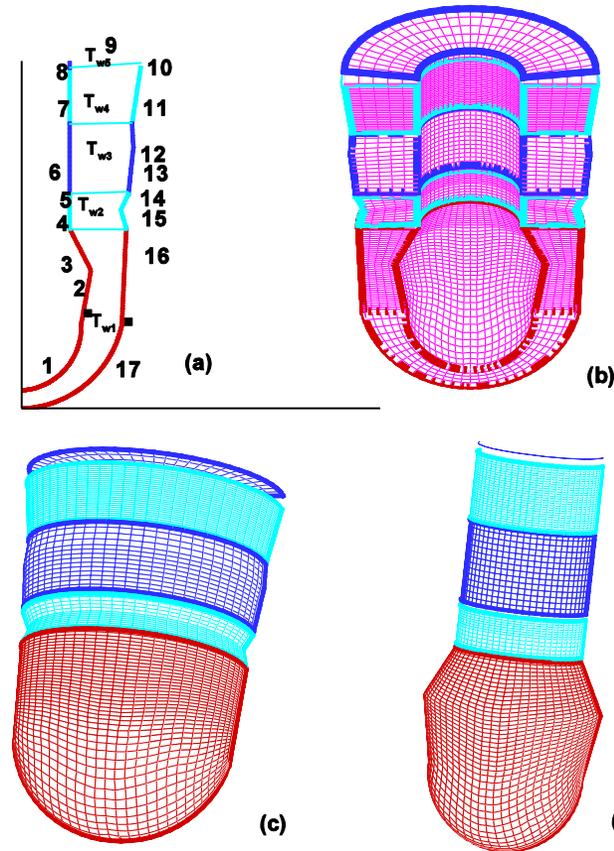


ОСНОВА - АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК В ОБЛАСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Одноблочные конструкции



Многоблочные конструкции



Алгоритмы предназначены для численного моделирования задач многокомпонентной гидродинамики и для решения других инженерных и прикладных задач.

Anuchina N.N., Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilyutina O.S., and Kozyrev O.M. Numerical simulation of 3D multi-component vortex flows by **МАН-3** code. Advances in Grid Generation. ed by Ushakova O.V. Novascience Publishers. 2007.

ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ (СТРУКТУРИРОВАННЫХ) СЕТОК

Осуществляется с помощью непрерывного отображения $\mathbf{x}: P \rightarrow G$.

$P = \xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3: 0 \leq \xi_l \leq l_l, l=1,2,3\}$, где l_l - целые числа, задающие число узлов сетки по каждому из координатных направлений.

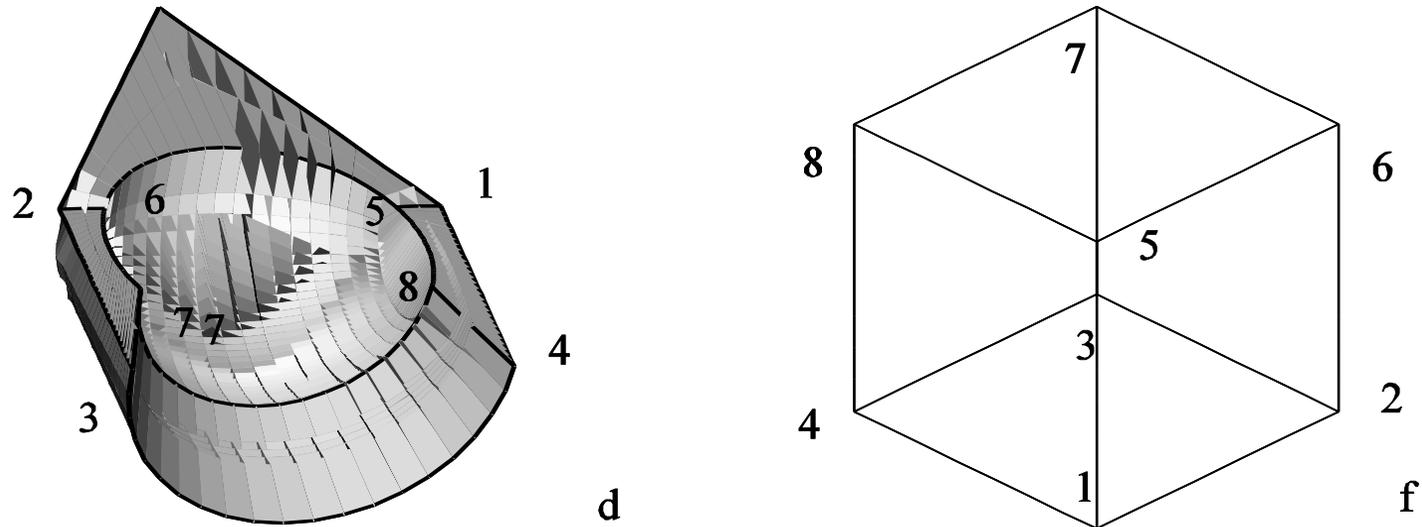
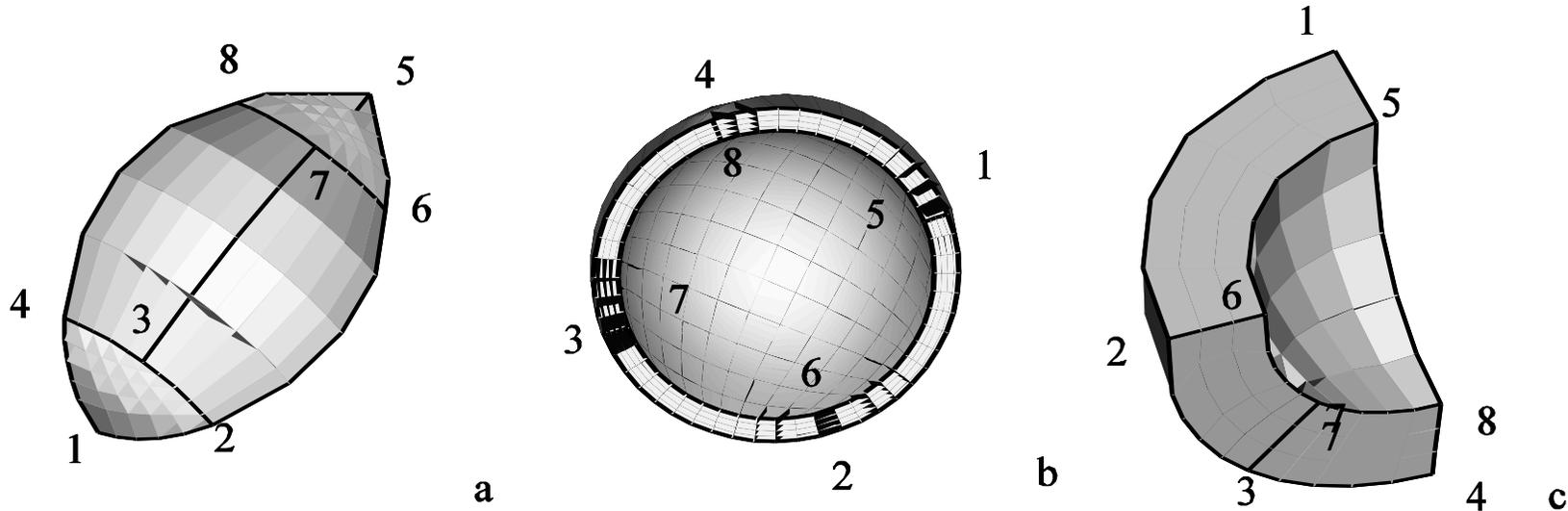
Значения отображения $\mathbf{x}: P \rightarrow G$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}, \quad (*)$$

$\xi_l = i_l, l=1,2,3, i_l = 0,1,\dots,l_l$ определяют координаты узлов трехмерной сетки $\mathbf{x}_{i_1,i_2,i_3} = \mathbf{x}(i_1,i_2,i_3)$.

Физическая область G при таком способе построения сеток представляется в виде криволинейного шестигранника.

КОНФИГУРАЦИЯ ОБЛАСТИ G (способ представления области в виде криволинейного шестигранника) определяется отображением x из P в G .



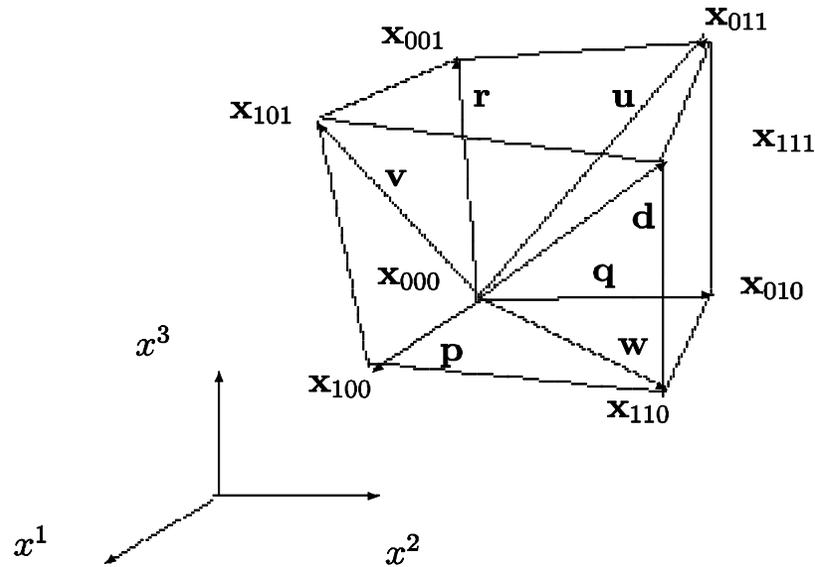
УСЛОВИЯ НА ОТОБРАЖЕНИЕ

- Отображение $x: P \rightarrow G$ находится в узлах равномерной ортогональной сетки в P . В остальных точках отображение восполняется с помощью трилинейных отображений единичных кубов сетки в P .
- Узлы криволинейной сетки находятся минимизацией специальных функционалов.
- Отображение задает невырожденную сетку: отображение “на”, взаимнооднозначное (гомеоморфизм), имеет положительный якобиан внутри области P и на ее границе.

О. В. Ушакова. О невырожденности трехмерных сеток, Труды института математики и механики, Т.12, N 1. 2004. С 78-100.

М.Ф.Прохорова. Проблемы гомеоморфизма, возникающие в теории построения сеток. Труды института математики и механики, 2008. Т.14. N 1. С.112-129.

ШЕСТИГРАННАЯ ЛИНЕЙЧАТАЯ ЯЧЕЙКА

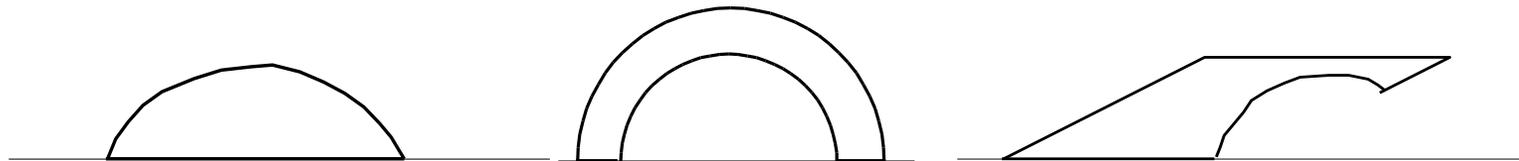
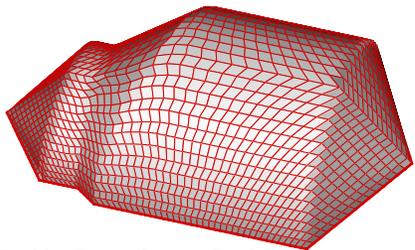


Отображение

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \mathbf{x}_{000}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) + \mathbf{x}_{001}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\xi_3 \\ & + \mathbf{x}_{010}(1 - \xi_1)\xi_2(1 - \xi_3) + \mathbf{x}_{011}(1 - \xi_1)\xi_2\xi_3 + \mathbf{x}_{100}\xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \\ & + \mathbf{x}_{101}\xi_1(1 - \xi_2)\xi_3 + \mathbf{x}_{110}\xi_1\xi_2(1 - \xi_3) + \mathbf{x}_{111}\xi_1\xi_2\xi_3 \end{aligned}$$

кубической ячейки $P = \{\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) : 0 \leq \xi^l \leq 1, l = 1, 2, 3\}$ определяет линейчатую ячейку с вершинами $\mathbf{x}_{i_1 i_2 i_3} = \mathbf{x}(i_1, i_2, i_3)$, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1$. Преобразование является трилинейным.

Ячейка невырождена, если якобиан J отображения \mathbf{x} положителен.



(Поворот образующей на угол π).

T. N. Bronina, O. V. Ushakova. Application of Optimal Grid Generation Algorithms to the Volumes of Revolution. in Advances in Grid Generation. ed. by O. V. Ushakova. Novascience Publishers, 2007. O.V.Ushakova. Optimization algorithms of grid constructions for the volume of revolutions. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1, 2008.

Задачи многокомпонентной гидродинамики

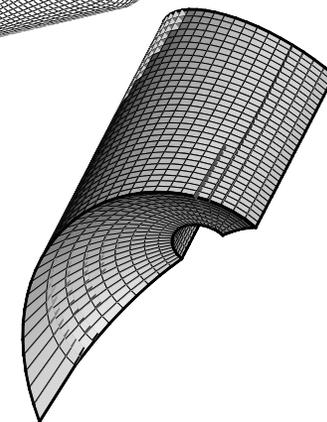
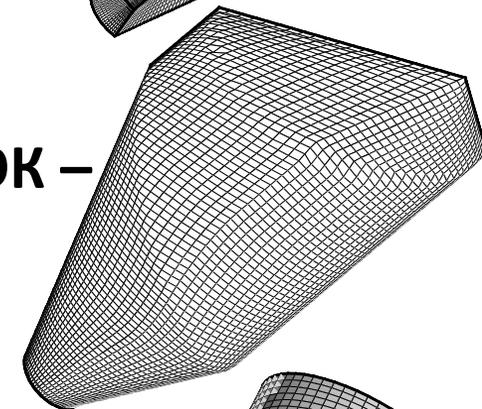
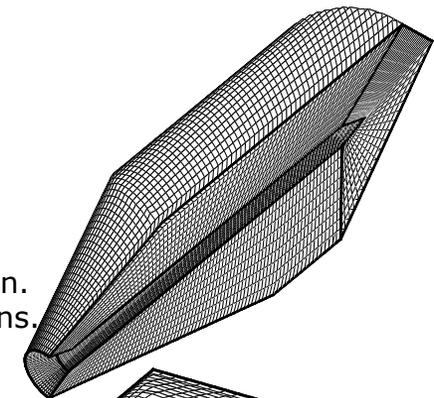
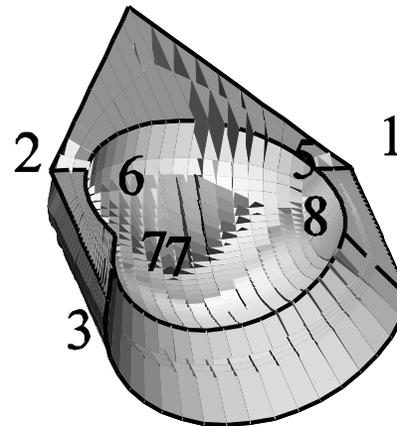
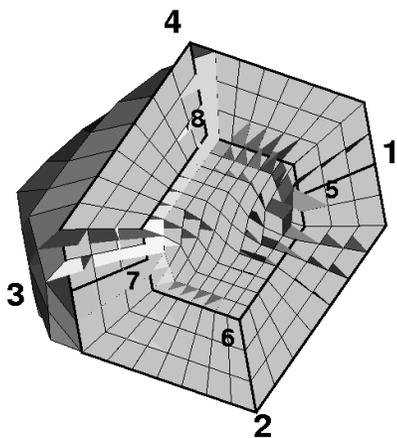
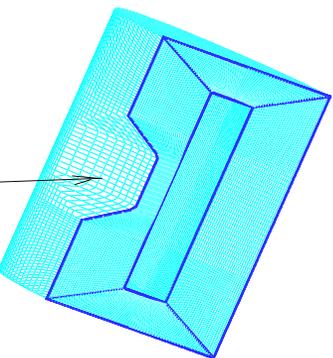
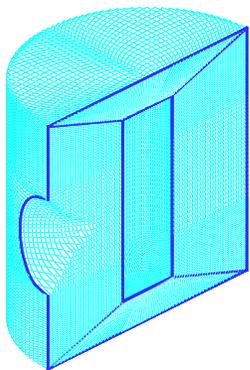
1. Постановки задач (А.И.Анучина, В.А.Гордейчук)

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК – ВАРИАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ

2. Построение начальной сетки (Т.Н.Бронина, А.Н.Артемова)

3. Оптимизация начальной сетки (О.В.Ушакова)

4. Разработка нестационарных алгоритмов (Н.А.Артемова, О.В.Ушакова)



II. Деформированные
объемы вращения

I. Объемы вращения

III. Объемы, полученные
с помощью
поверхностей вращения

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

- Прямая геометрическая минимизация дискретного функционала качества сетки

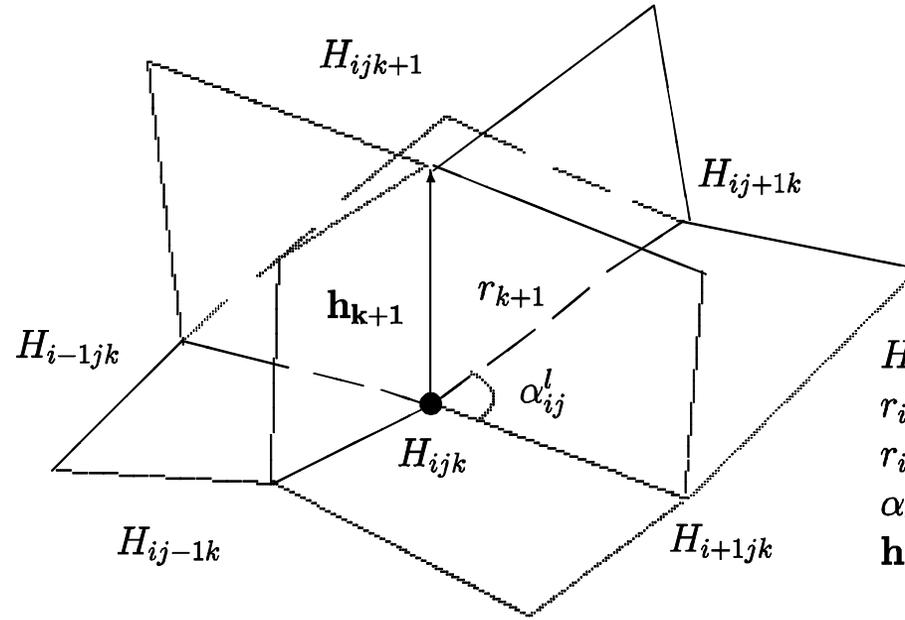
$$D = D_p + A_0 D_0,$$

D_p – функционал равномерности,

D_0 – функционал ортогональности,

$A_0 > 0$ – весовой коэффициент.

ДИСКРЕТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОПИМАЛЬНОСТИ СЕТКИ



$H_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$ - узел сетки,
 $r_{i\pm 1, j, k} = \sqrt{|H_{ijk} H_{i\pm 1, j, k}|} = |\mathbf{h}_{i\pm 1}|$,
 $r_{i, j\pm 1, k}, r_{i, j, k\pm 1}; \mathbf{h}_{j\pm 1}, \mathbf{h}_{k\pm 1}$.
 α_{ij}^l - углы между векторами
 $\mathbf{h}_{i\pm 1}, \mathbf{h}_{j\pm 1}$, ($l = 1, 2, 3, 4$).

$$\begin{aligned}
 D_P = \sum_{ijk} & \left\{ [r_{i+1, j, k} - r_{i-1, j, k}]^2 \left(\frac{1}{r_{i+1, j, k}^2} + \frac{1}{r_{i-1, j, k}^2} \right) + \right. \\
 & \left. + [r_{i, j+1, k} - r_{i, j-1, k}]^2 \left(\frac{1}{r_{i, j+1, k}^2} + \frac{1}{r_{i, j-1, k}^2} \right) + [r_{i, j, k+1} - r_{i, j, k-1}]^2 \left(\frac{1}{r_{i, j, k+1}^2} + \frac{1}{r_{i, j, k-1}^2} \right) \right\}, \\
 D_O = \sum_{ijk} \sum_{l=1}^4 & \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha_{ij}^l} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_{ik}^l} + \frac{1}{\sin^2 \alpha_{jk}^l} \right).
 \end{aligned}$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ

$P = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : 0 \leq \xi_1 \leq N, 0 \leq \xi_2 \leq M, 0 \leq \xi_3 \leq L\}$,
где N, M, L — положительные целые.

Значения отображения
 $\mathbf{x} : P \rightarrow G$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \{x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\}$$

для $\xi_i, \xi_j, \xi_k = i, j, k, i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M, k = 0, 1, \dots, L$
задают координаты узлов $H_{ijk} = \mathbf{x}_{ijk} = \mathbf{x}(i, j, k)$.

Непрерывные функционалы оптимальности имеют вид:

$$I_P = \iiint_P \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} \ln \sqrt{g_{ii}} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$I_O = \iiint_P \frac{1}{J^2} \left(\frac{G_1 G_2}{g_{33}} + \frac{G_1 G_3}{g_{22}} + \frac{G_2 G_3}{g_{11}} \right)^2 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$g_{ii} = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \right)^2, \quad J = \det \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right\}, \quad G_i = g_{kk} g_{ll} - g_{kl}^2, \quad i \neq k, l,$$

$$I = I_P + A_O I_O.$$

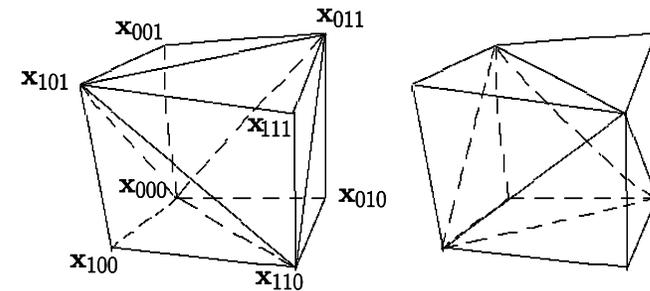
ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СЕТОК

- Главную регуляризующую роль выполняет функционал равномерности: определяет тип уравнений Эйлера (гиперболический в широком смысле) и позволяет рассматривать различные краевые условия.
- Функционал ортогональности вместе с функционалом равномерности обеспечивает барьерные свойства.
- Предложены: алгоритм с фиксированными узлами на границе области; со свободными узлами на границе области; с координатными линиями, ортогональными границе; с гладкой стыковкой координатных линий на линиях стыковки плоских граней; алгоритмы держания линий.
- Алгоритмы разработаны для случая, когда граница области задавалась с помощью линейчатых поверхностей граней ячеек начальной сетки.

Ушакова О.В. Алгоритмы оптимизации трехмерных сеток для областей вращения. Труды института математики и механики, Т.14. 1. 2008. С.150-180.

ВЫБОР СТРАТЕГИИ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ УСЛОВИЕМ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ СЕТКИ

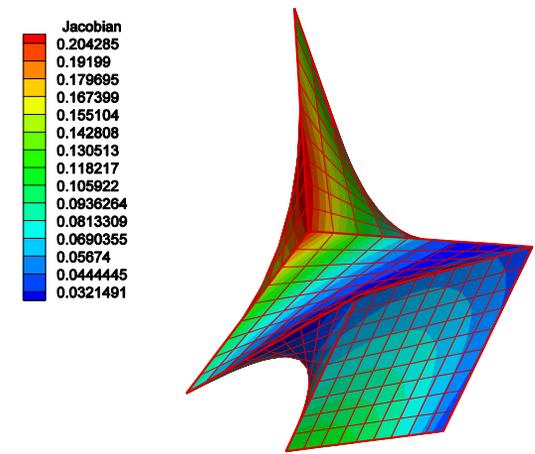
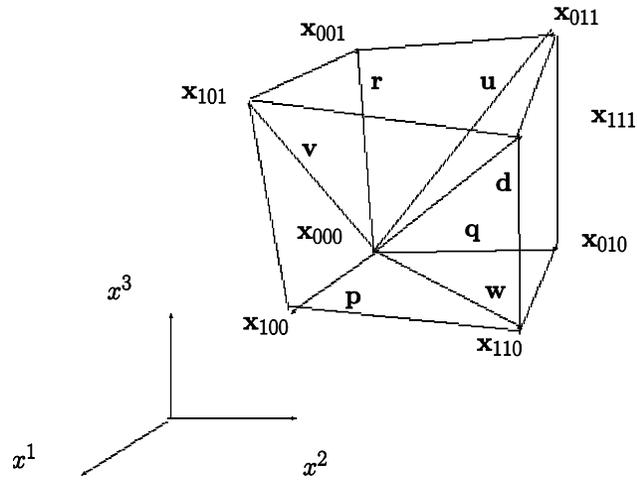
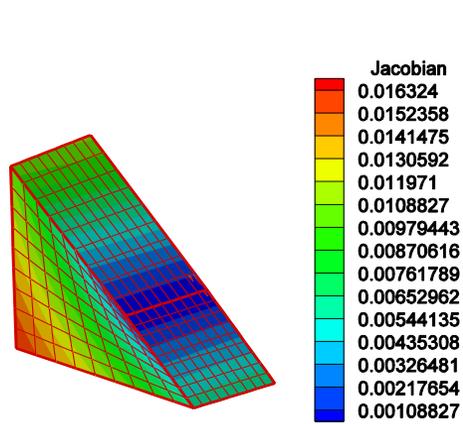
- В рассматриваемых случаях минимизации не изменятся тип ячеек (вырожденные, невырожденные).
- Проверка невырожденности сетки в процессе итераций осуществляется проверкой положительности 10 объемов тетраэдров (наиболее надежный тест).



Ushakova O.V. Nondegeneracy tests for hexahedral cells. Computer methods in Applied Mechanics and Engineering. Elsevier. 200 (2011), 1649-1658.

- Для оптимальной сетки проверяются достаточные условия невырожденности.

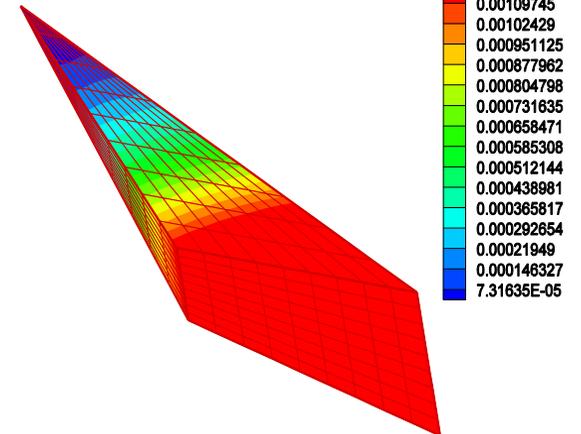
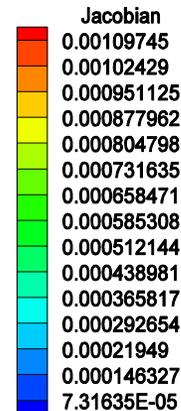
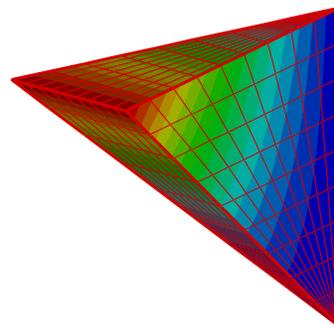
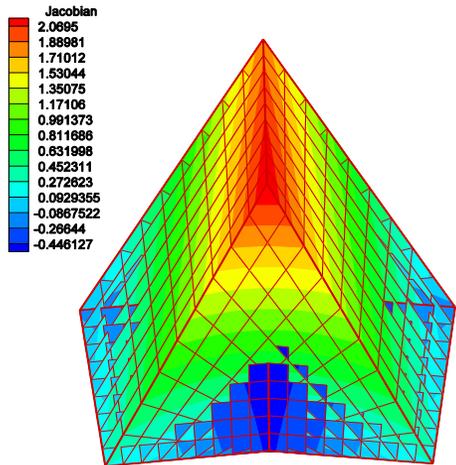
Ushakova O.V. Conditions of nondegeneracy of three-dimensional cells. A formula of a volume of cells. SIAM J. Sci. Comp. 2001. N. 23.1273-1289.



КЛАССИФИКАЦИЯ ШЕСТИГРАННЫХ ЯЧЕЕК

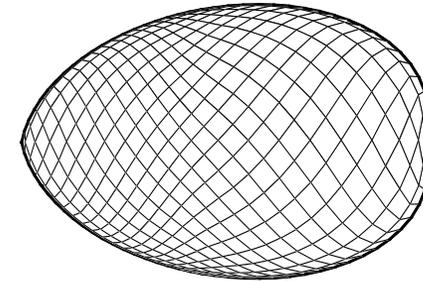
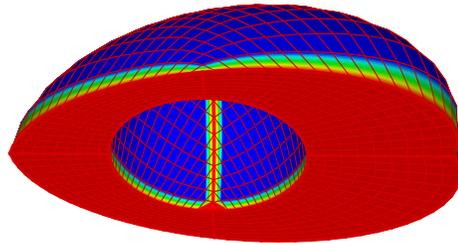
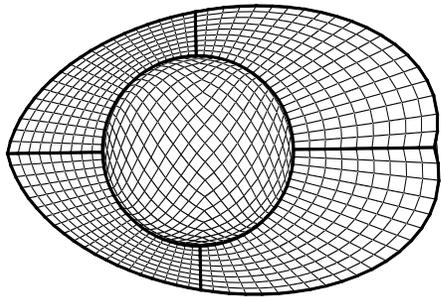
О. В. Ушакова. Классификация шестигранных ячеек. ЖВМ и МФ. 2008

Алгоритм тестирования сетки



АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ УЗЛОВ К ПОВЕРХНОСТЯМ ВРАЩЕНИЯ

- В оптимизационном алгоритме узлы на границе двигаются по линейчатым поверхностям - граням начальной сетки. В процессе итераций узлы могут сходиться с поверхности вращения.
- Создан алгоритм проектирования узлов на поверхность вращения. Сначала находится точка на линейчатой поверхности, затем она проецируется на поверхность вращения, соответствующую элементу - отрезку прямой, дуге окружности или эллипсу в том числе и для случаев их задания с помощью многозначных функций.



Ушакова О.В. Алгоритм коррекции сетки к области вращения. ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып.1. С.16-27.
Ушакова О.В. Применение алгоритма коррекции сетки к области вращения. ВАНТ, сер. Математическое моделирование физических процессов. 2016. Вып.2. С.31-37.

- Возможность расчетов по двум алгоритмам: движение узлов по линейчатым поверхностям, по поверхности вращения.
- Алгоритмы коррекции к поверхностям вращения для расчета сеток в объемах вида 1,2.

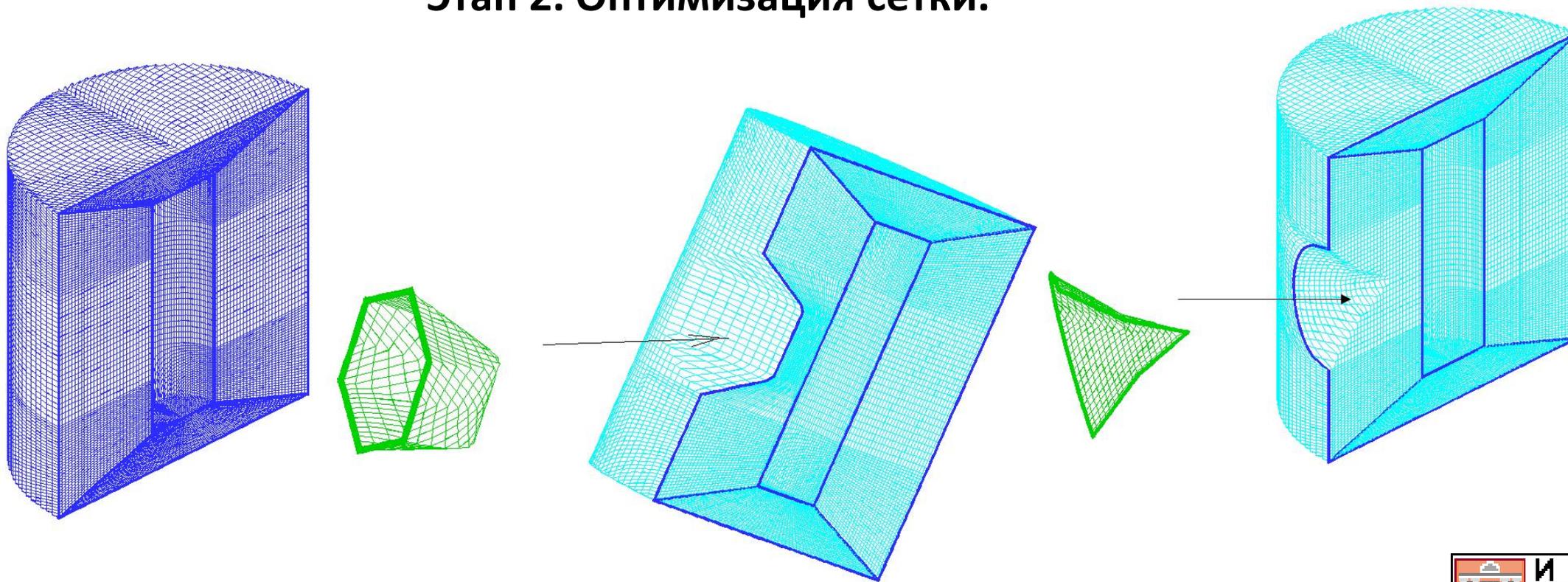
АЛГОРИТМ ДЛЯ РАСЧЕТА СЕТОК В ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМАХ ВРАЩЕНИЯ

(Н.А.Артемова, Т.Н.Бронина, О.В.Ушакова)

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ АЛГОРИТМ: На каждой итерации выполняется

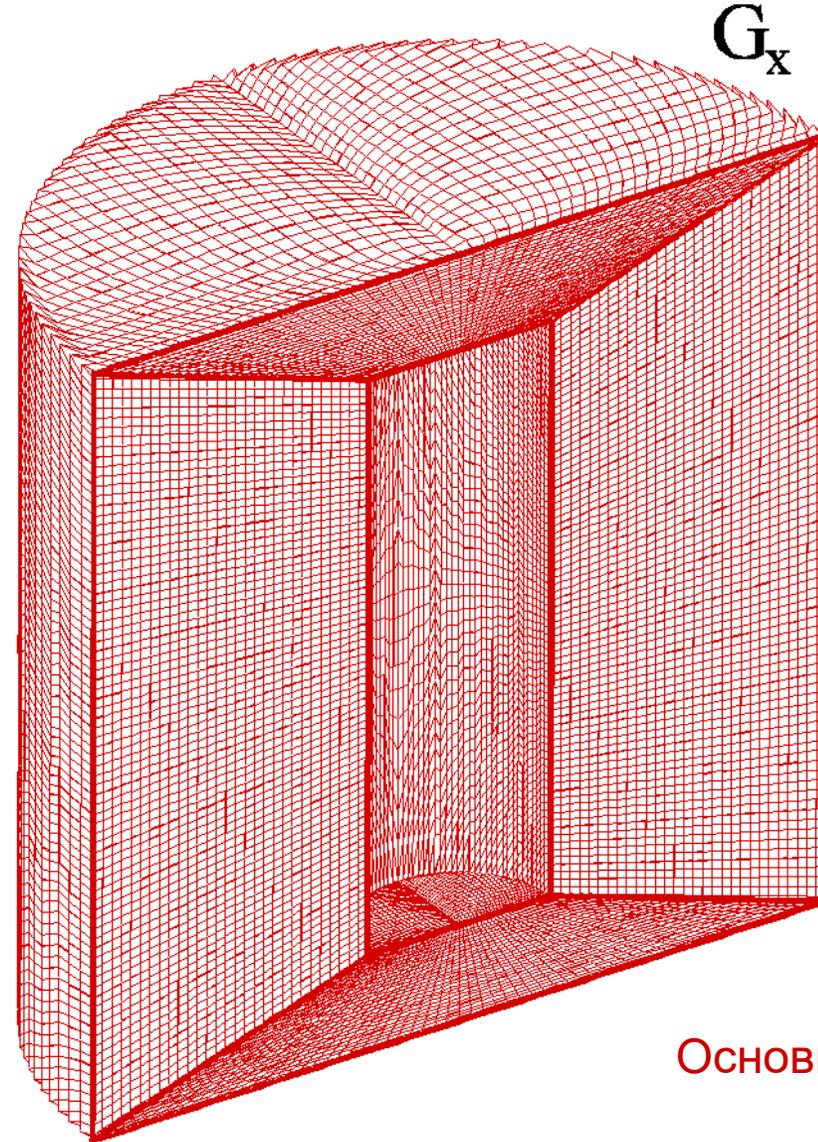
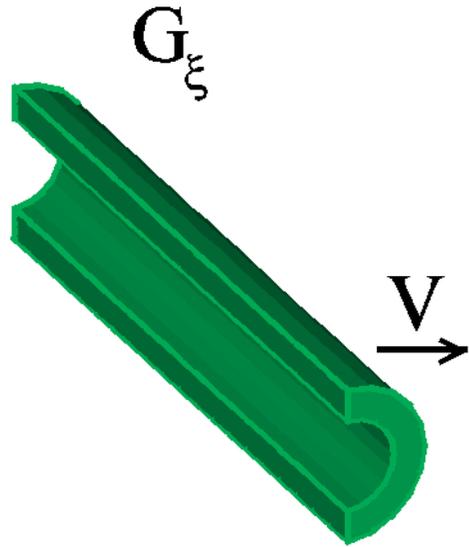
ЭТАП 1. Деформация сетки.

Этап 2. Оптимизация сетки.



АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ СЕТКИ ДЛЯ ТЕЛА, ДЕФОРМИРОВАННОГО ДРУГИМ ТЕЛОМ ВРАЩЕНИЯ

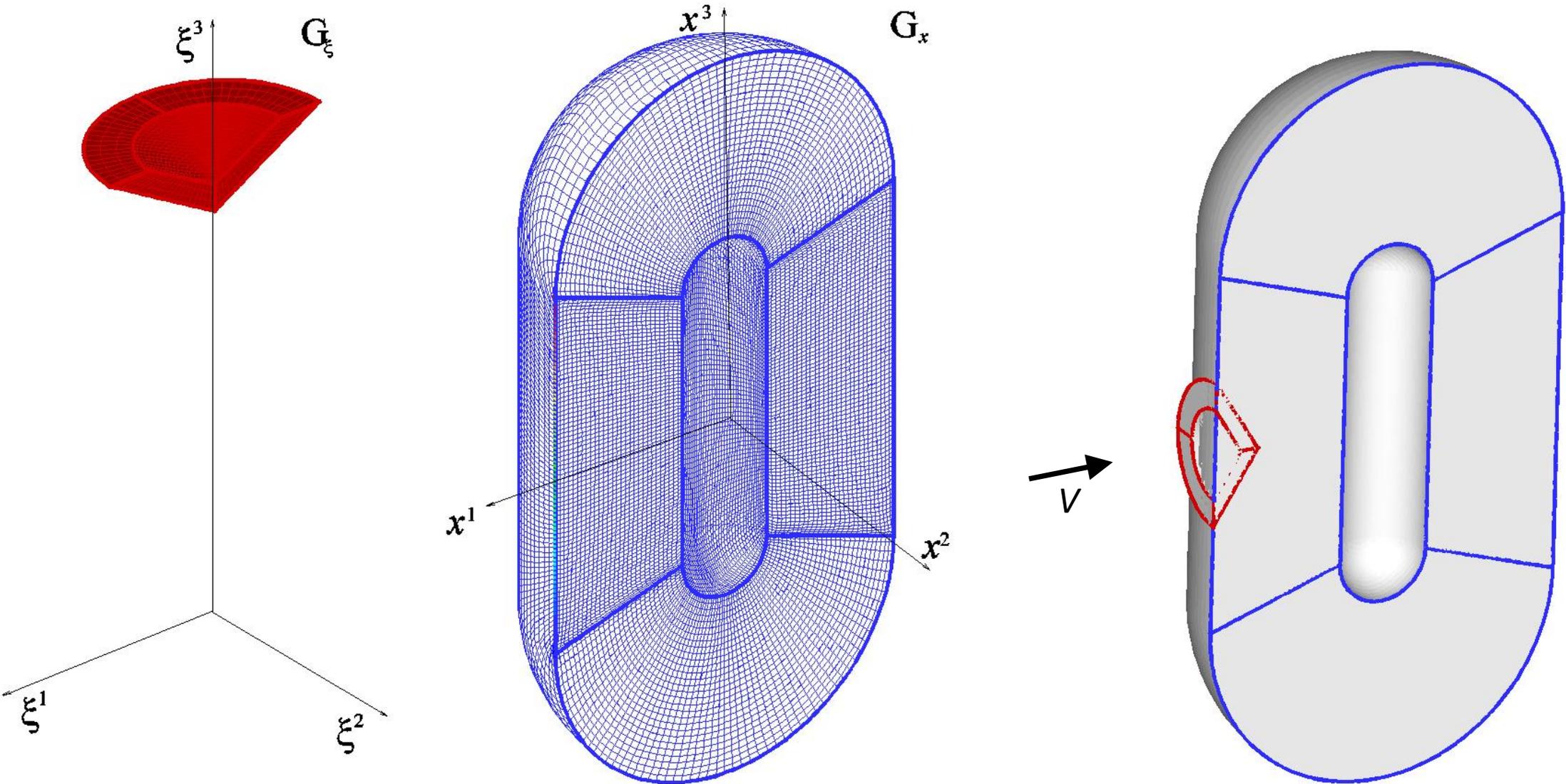
Деформирующее тело



Основное тело

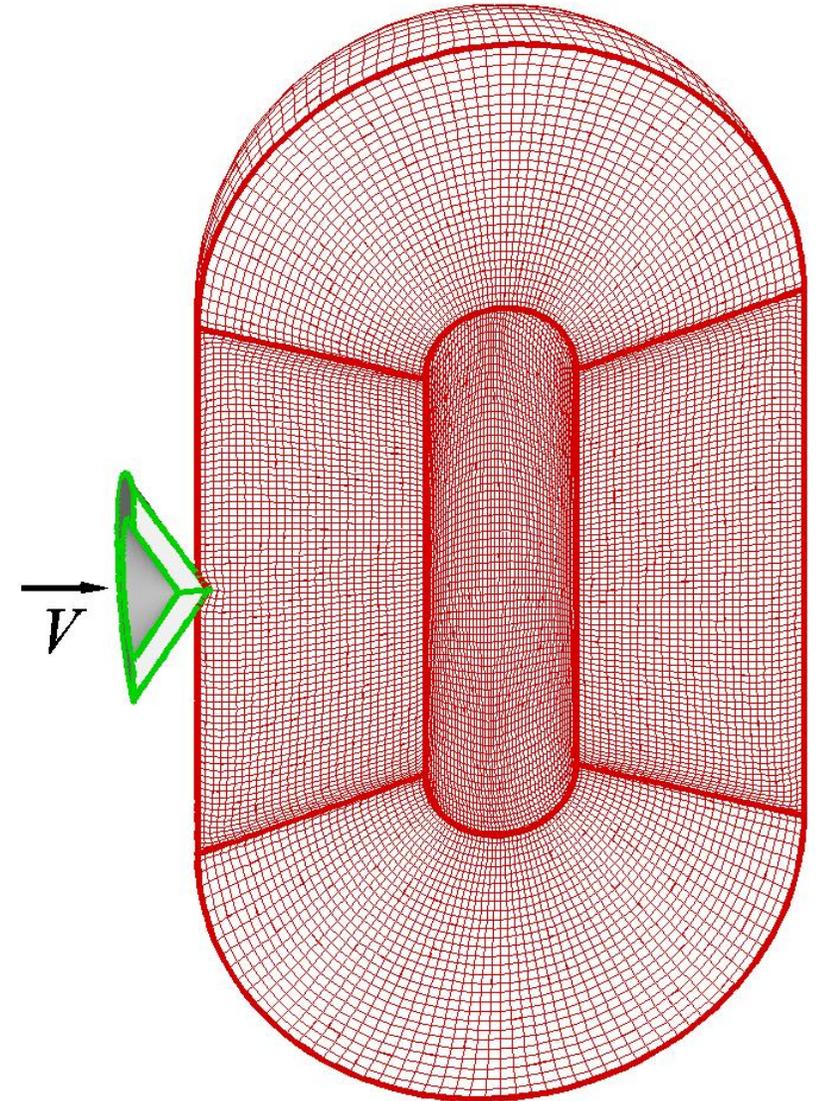
Деформированные
объемы вращения

ВВОД ДАННЫХ: Задание образующих, конфигураций основной и деформирующей сетки, вектора деформации, систем координат.



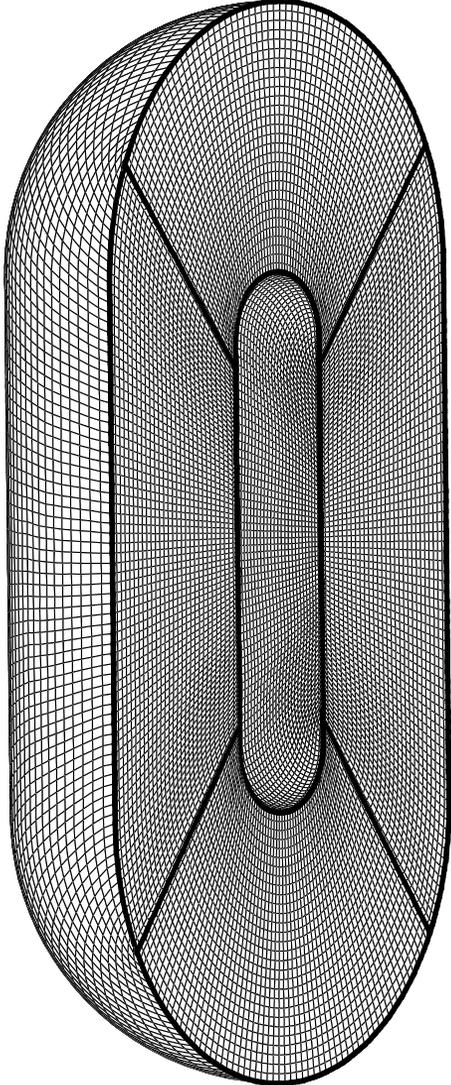
ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС:

- **ВЫБОР ШАГА ДЕФОРМАЦИИ:** Шаг равен среднему расстоянию между узлами сетки. Он уменьшается, если деформирующее тело пересекает приграничную окаймляющую поверхность основного тела.
- **СДВИГ ТЕЛА НА ШАГ ДЕФОРМАЦИИ:** Деформирующее тело сдвигается на величину шага деформации. Граничная поверхность основного тела G_x проверяется на пересечение с деформирующим телом G_ξ . Узлы G_x , попавшие в G_ξ , проецируются на поверхность G_ξ .
- **ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТКИ (ФРАГМЕНТА)** по программе Ушаковой О.В.
- **ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ:** Деформирующее тело сместилось на заданный вектор.

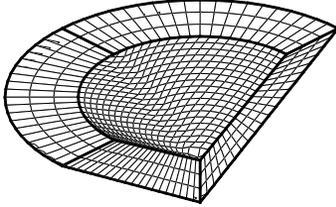


Начальная сетка в основном теле (а) и вспомогательных телах (б), (в) (без учёта ориентации в пространстве):

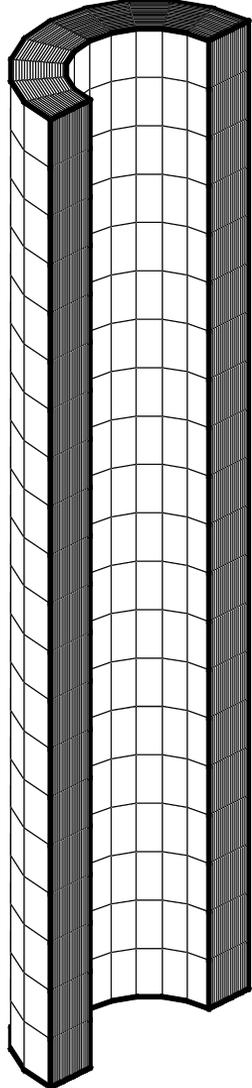
а



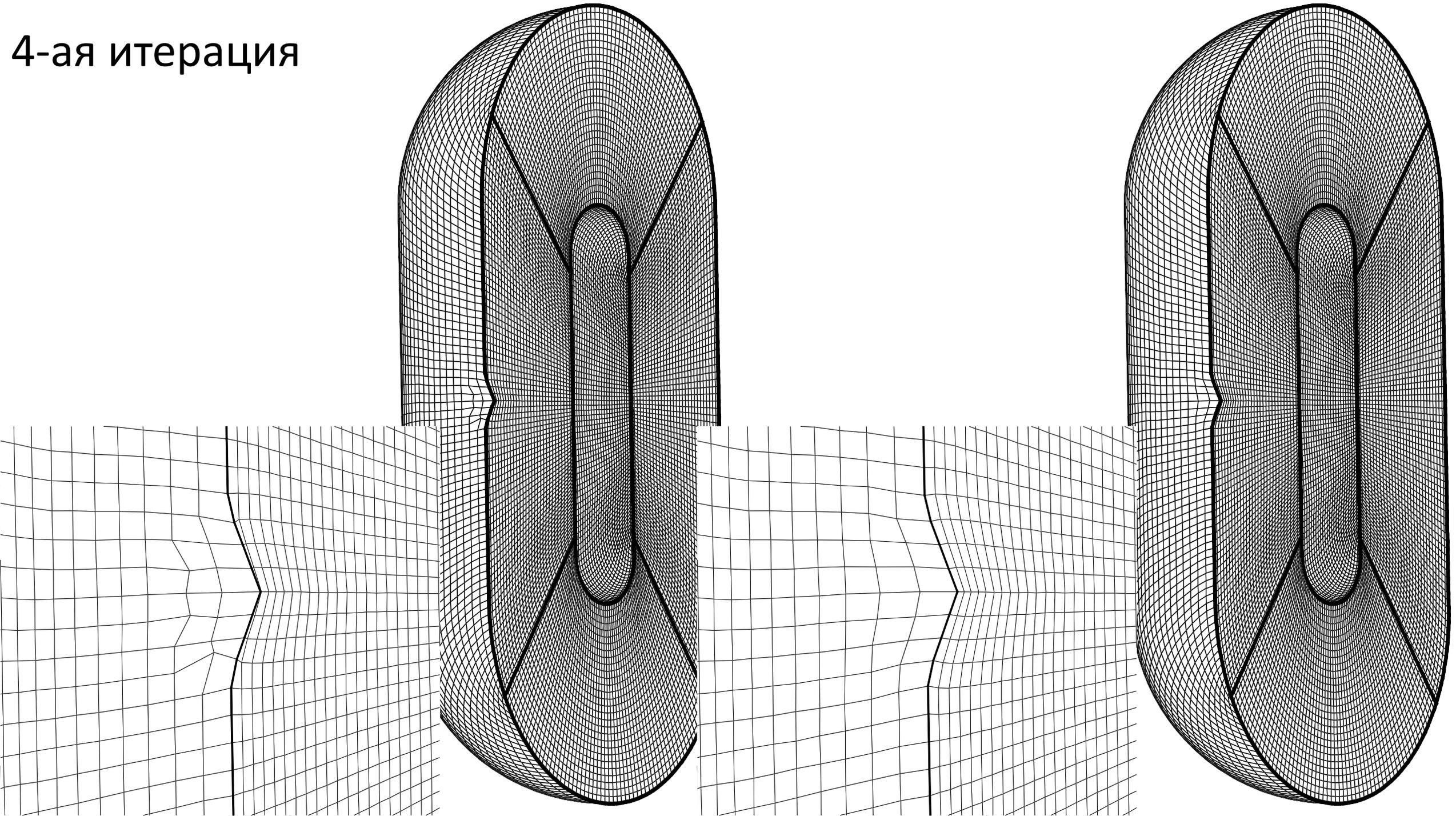
б



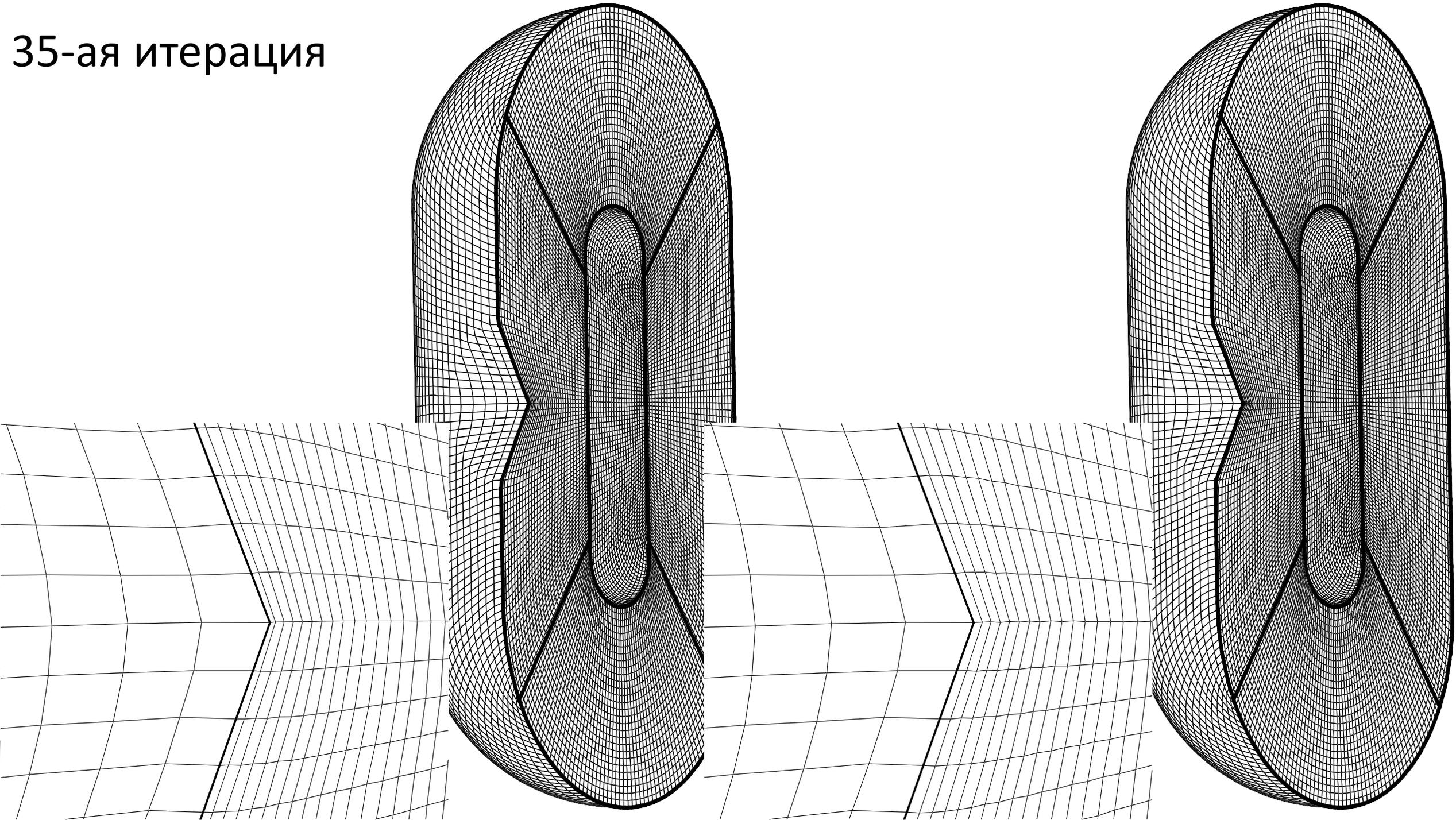
в



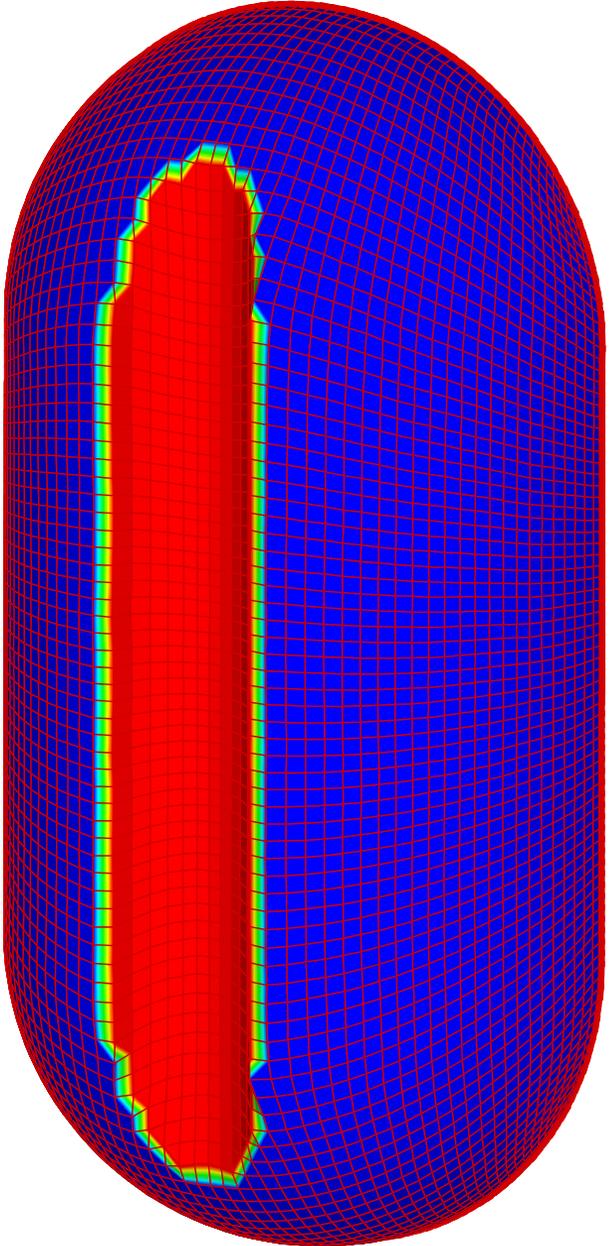
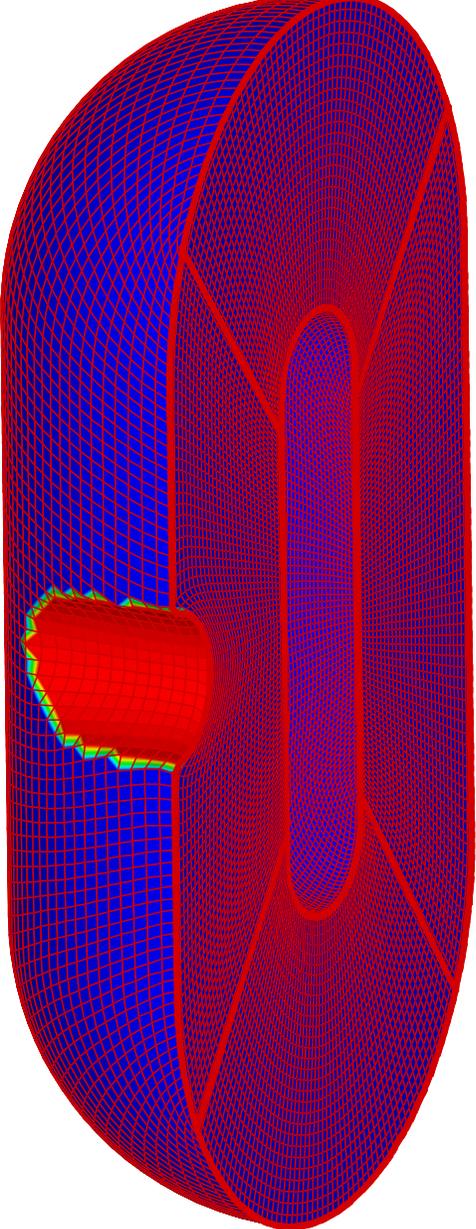
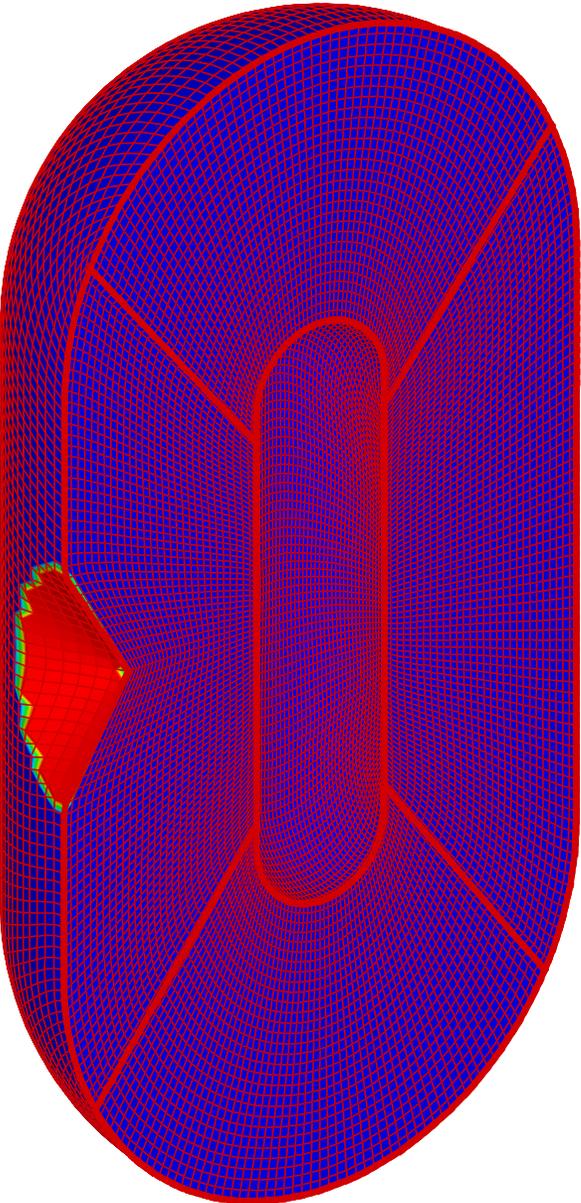
4-ая итерация



35-ая итерация

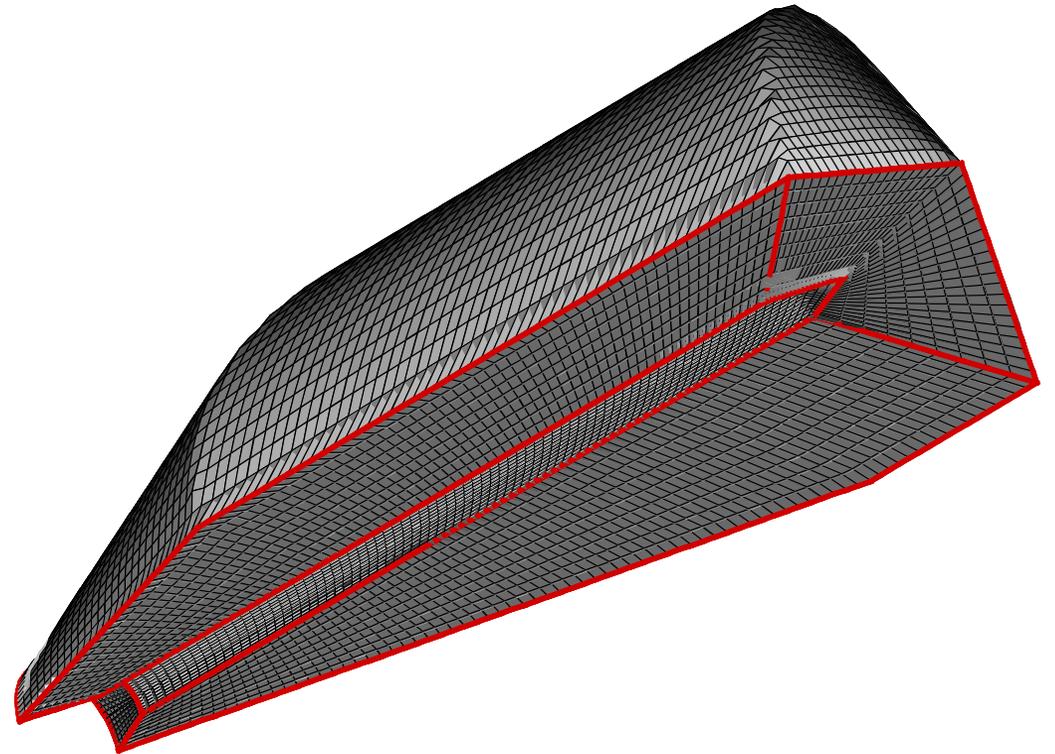
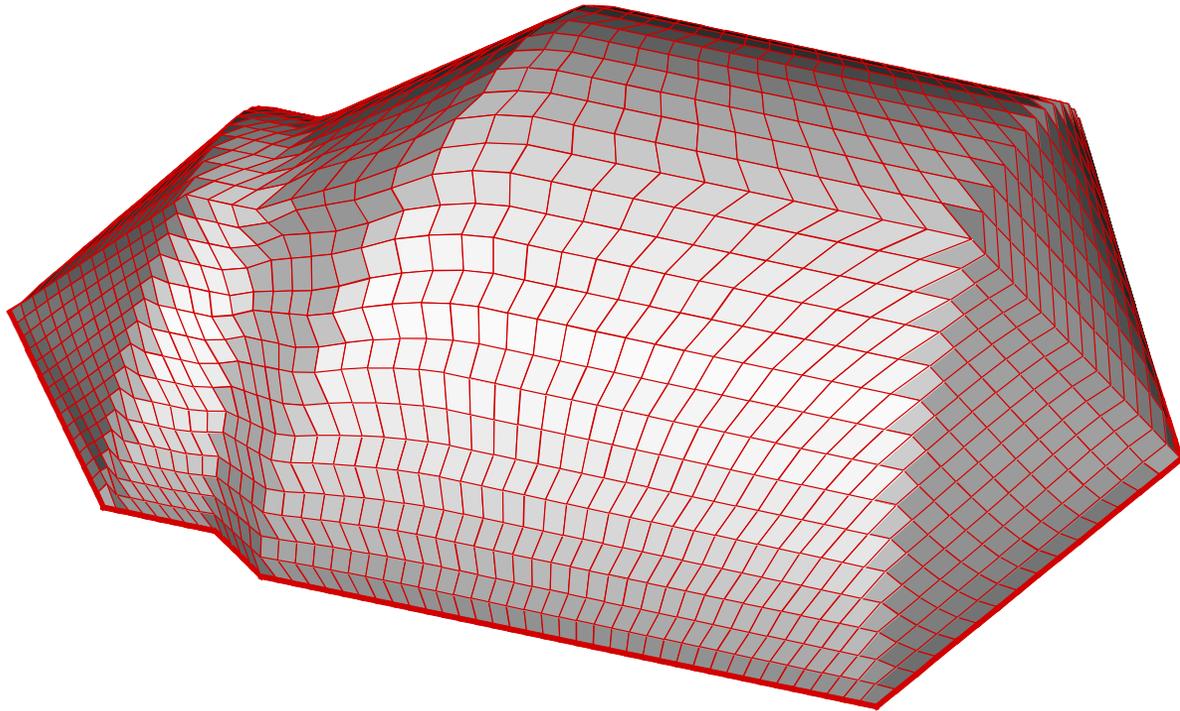


СЕТКИ В ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМАХ ВРАЩЕНИЯ



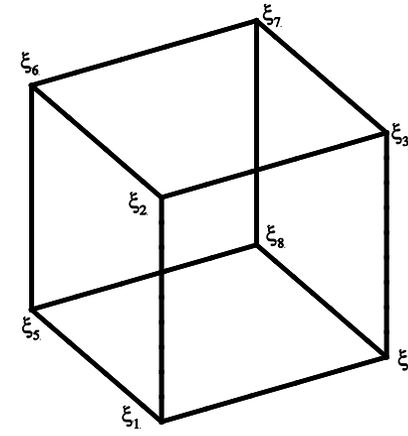
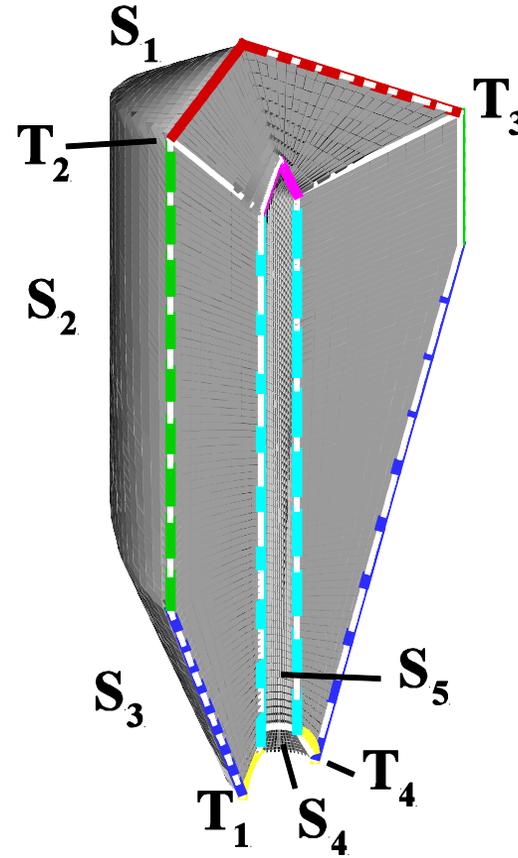
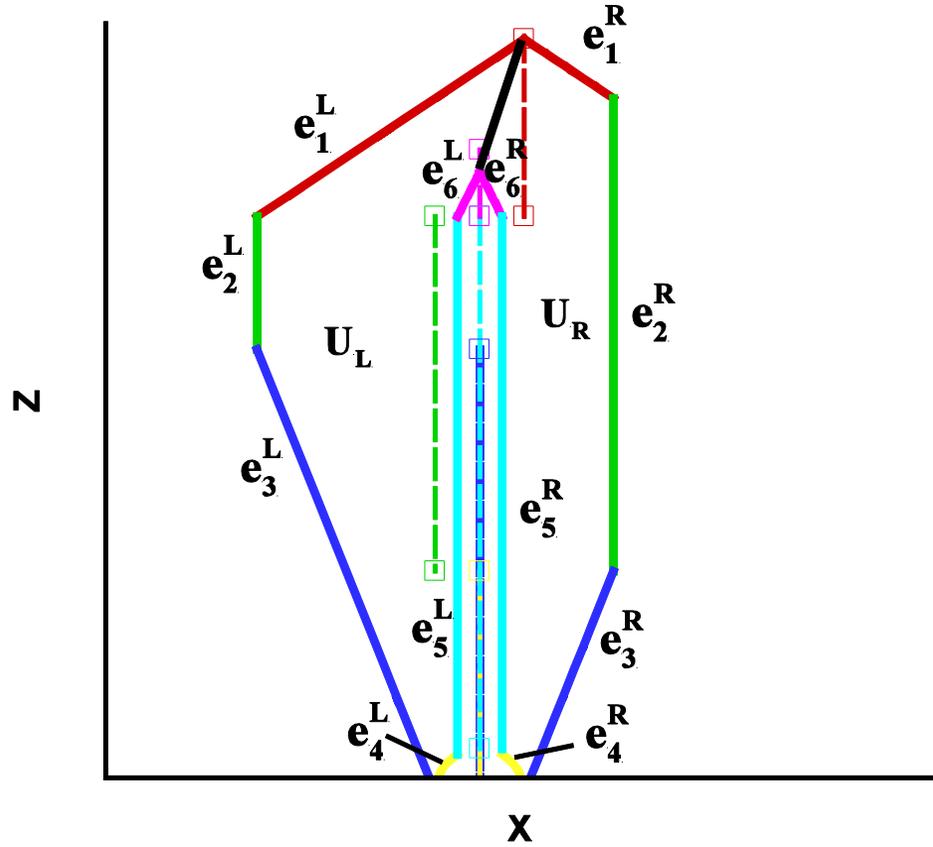
(Т.Н.Брони́на, Уша́кова О.В.)

ПОСТРОЕНИЕ СЕТОК В ОБЪЕМАХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ ВРАЩЕНИЯ



Объемы, полученные с
помощью поверхностей
вращения

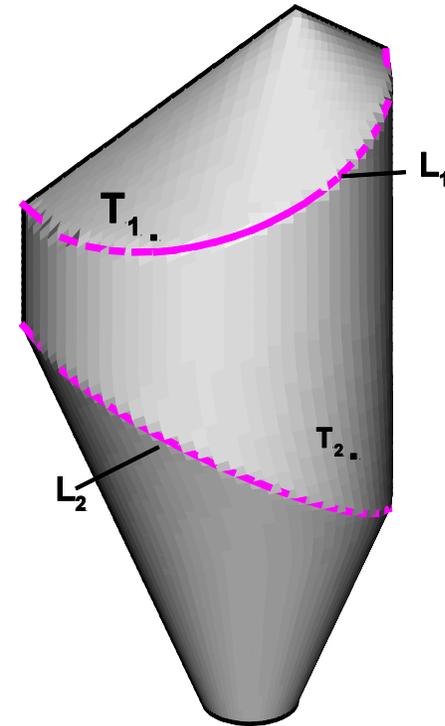
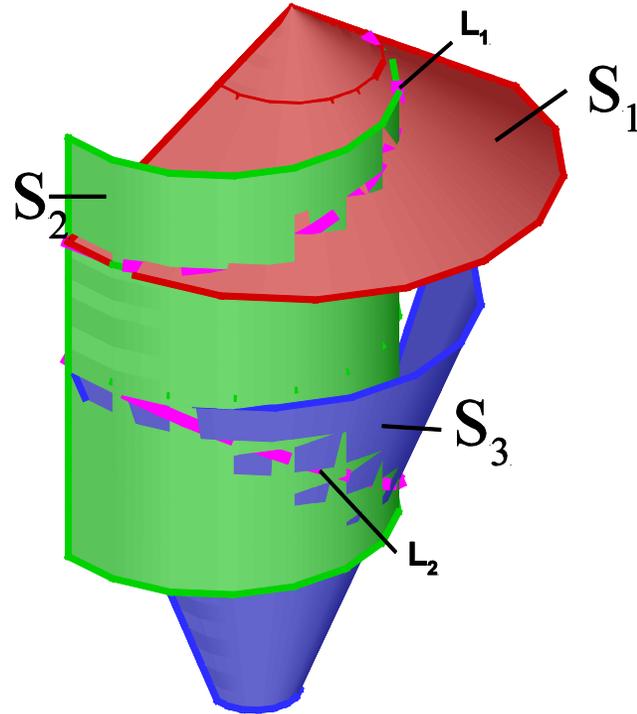
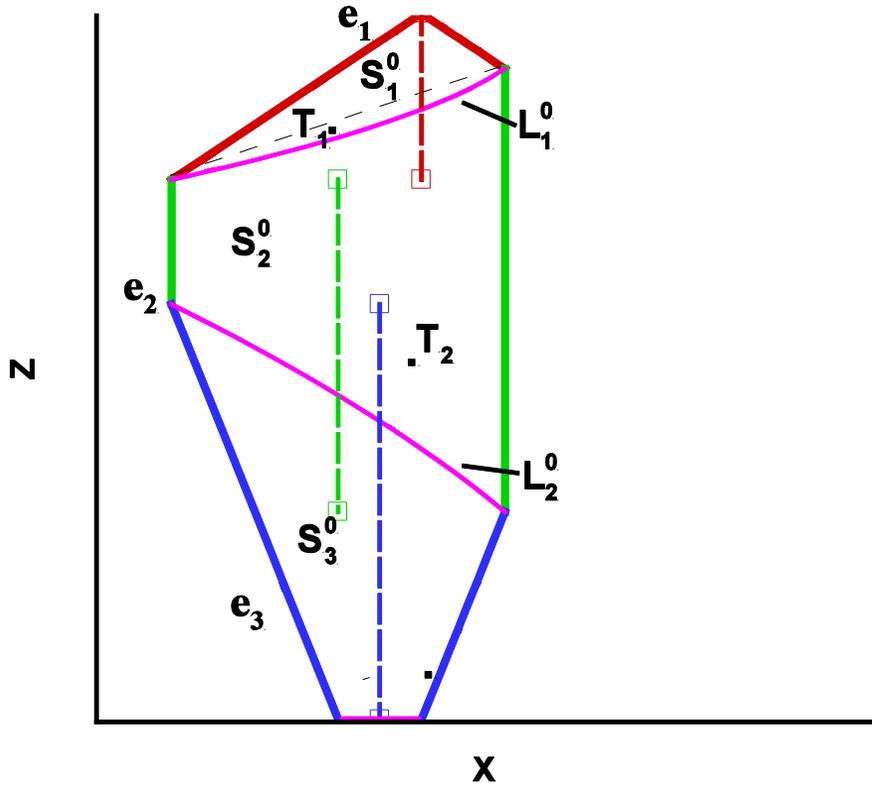
ПОЛУЧЕНИЕ ОБЪЕМА



Пример: S_1 – конус, S_2 – цилиндр, S_3 – конус, S_4 – сфера, S_5 – цилиндр, S_6 – конус

В плоскости XZ заданы две односвязные области U_L, U_R с границами $\partial U_L = \cup e_i^L$, $\partial U_R = \cup e_i^R$, $e_i^L = e_i^R$ и множество осей вращения a_i для элементов e_i . Вращением элемента e_i вокруг оси a_i образуется поверхность S_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ



Поверхности S_i определяют одну из граничных поверхностей S области – грань криволинейного шестигранника. Определяются линии L_i – ортогональные проекции линий пересечения поверхностей S_i, S_{i+1} на плоскость xz . Плоская область S^0 , ограниченная элементами e_i^L, e_i^R , делится линиями L_i на подобласти S_i^0 : $S^0 = \cup S_i^0$.

Поверхность S формируется частями S_i , ортогональные проекции которых на плоскость xz , совпадают с S_i^0 . Пусть точка $T^0 \in S^0 = \cup S_i^0$. Рассмотрим прямую $Q: Q \perp XZ, T^0 \in Q$ и множество точек $\{P_i\}$: $P_i = Q \cap S_i$. Тогда точка $T \in S$, если $T \equiv P_j$, где

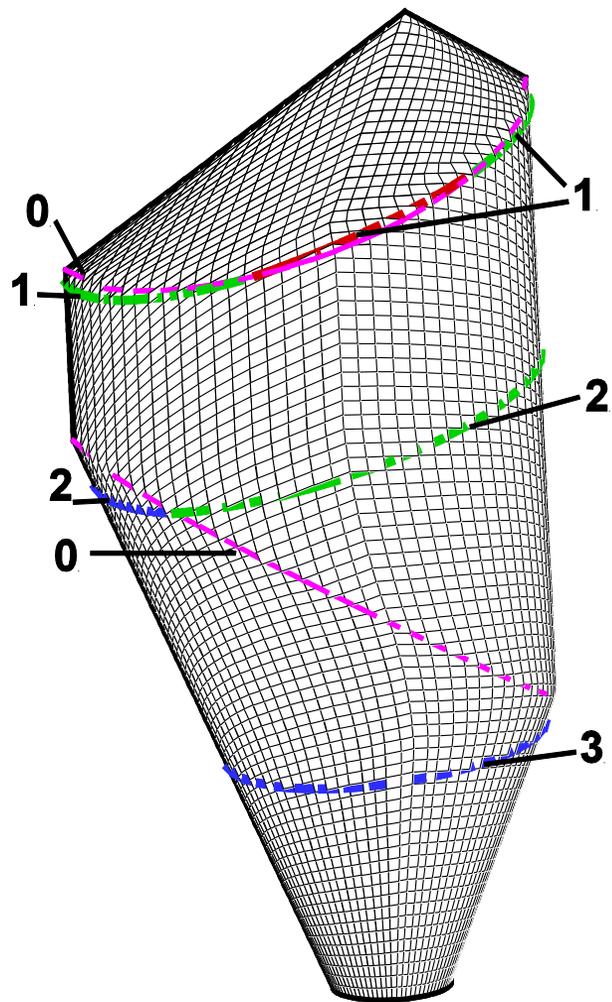
$P_j^0 \in S_j^0$.

ЭТАП 1. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ СЕТКИ (Т.Н.Бронина)

Цель – построение невырожденной сетки. Как исключение допускаются отдельные вырожденные ячейки.
Подход: геометрический.

- 1. Задание геометрии и конфигурации области описанием элементов, осей в текстовых файлах.
- 2. Выделение линий пересечения поверхностей и определение границы объема.
- 3. Расстановка точек на образующих.
- 4. Расстановка точек на линиях пересечения граней объема с плоскостью, перпендикулярной плоскости образующей. Так как поверхности граней – второго порядка, то линия – эллипс, либо дуги эллипсов. В совокупности узлы на линиях формируют сетку на поверхности.
- 6. Расстановка узлов внутри области. (В основе алгоритма - линейная интерполяция).
- 7. Расстановка узлов на нижней и верхней гранях.
- 8. Корректировка узлов на нижней и верхней гранях в случаях их отличия от линейчатых поверхностей (сфера, эллипсоид, конус).

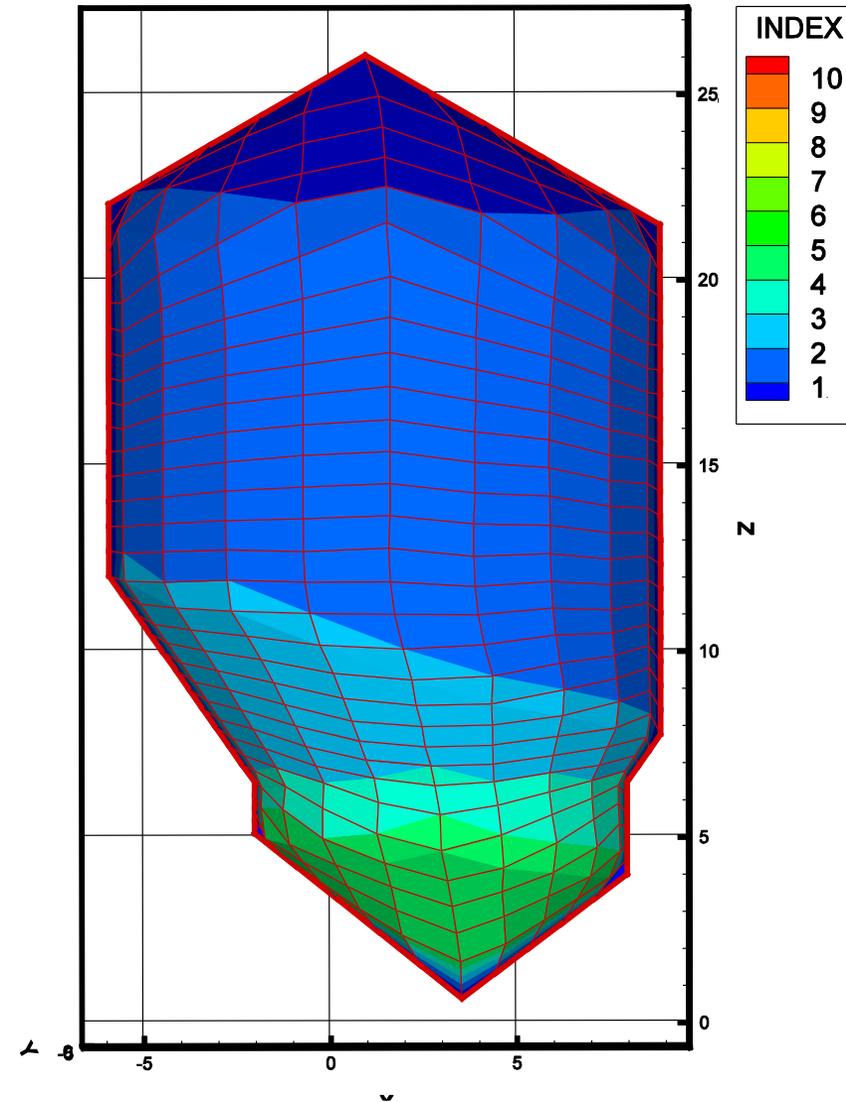
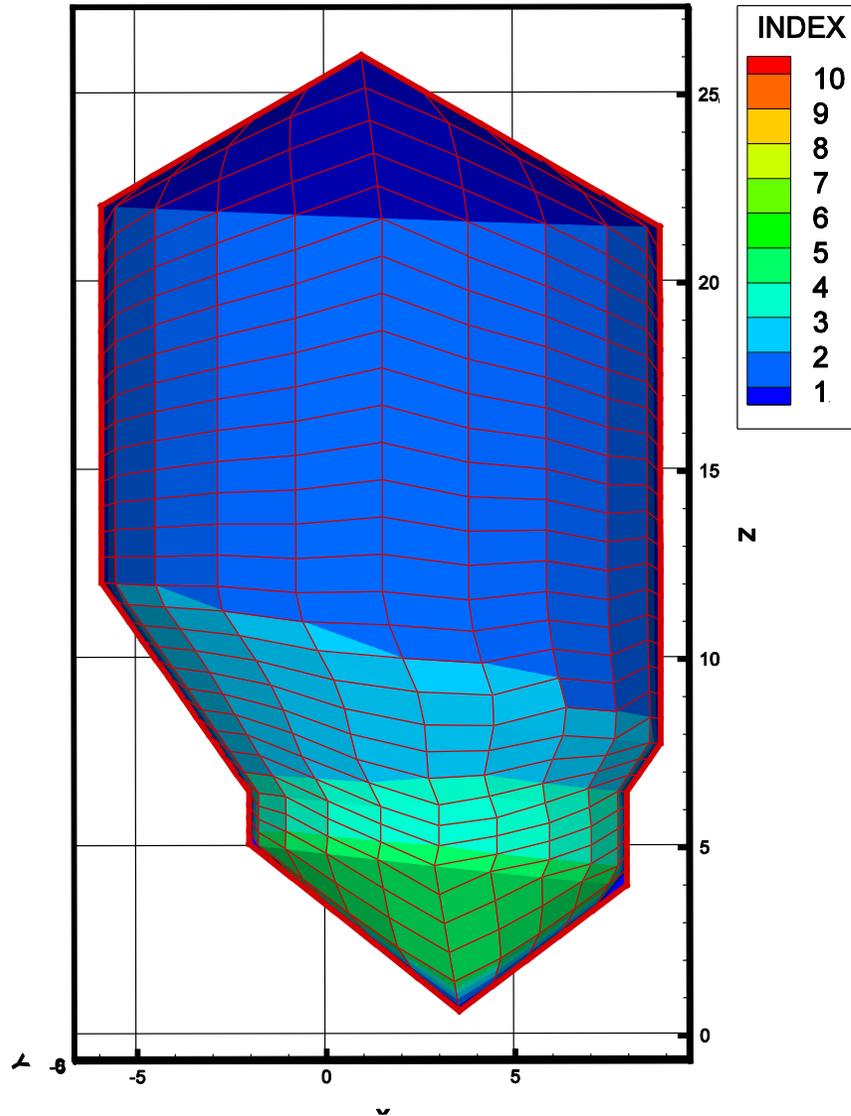
РАСЧЕТ КООРДИНАТ УЗЛОВ СЕТКИ НА ГРАНИ



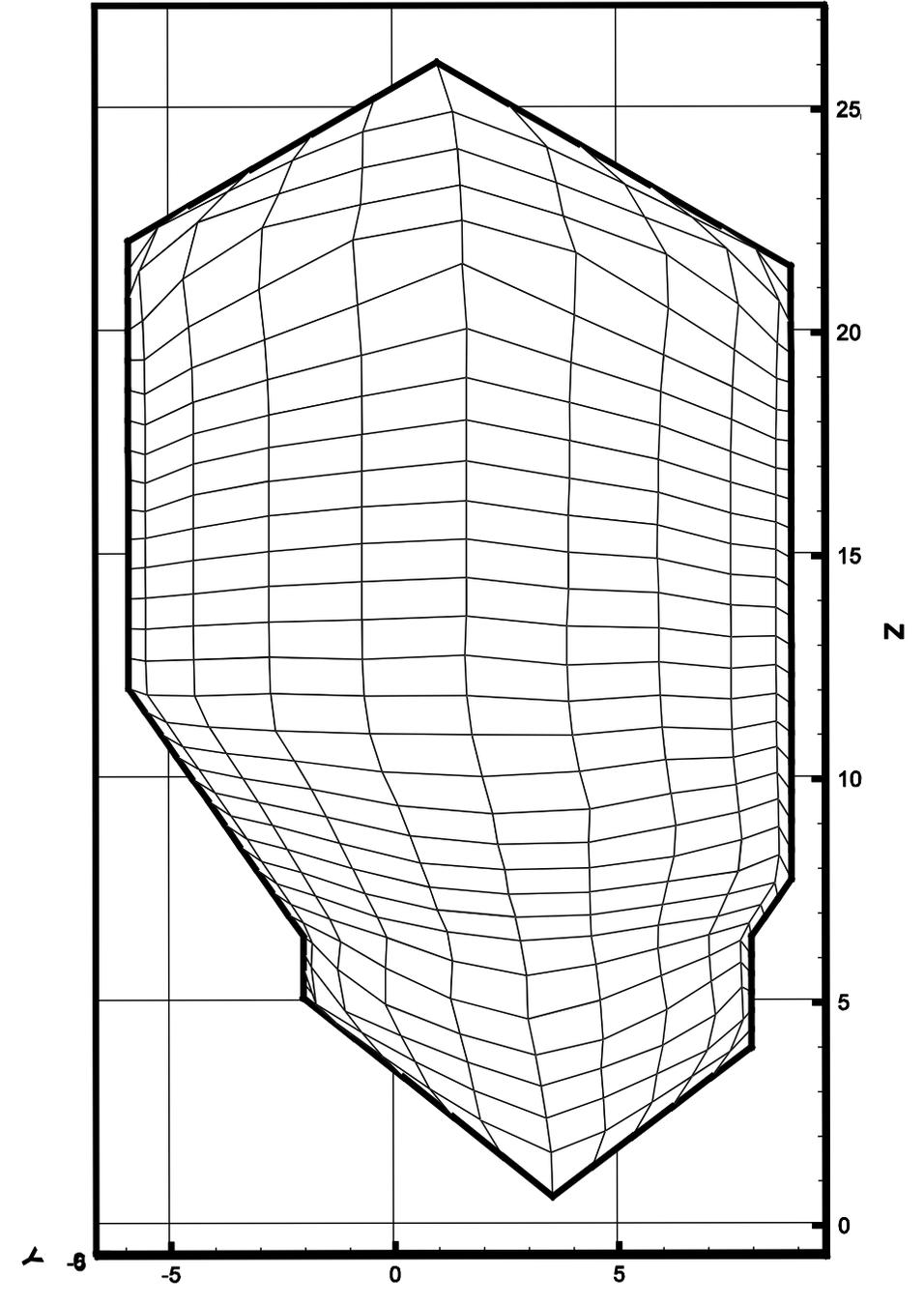
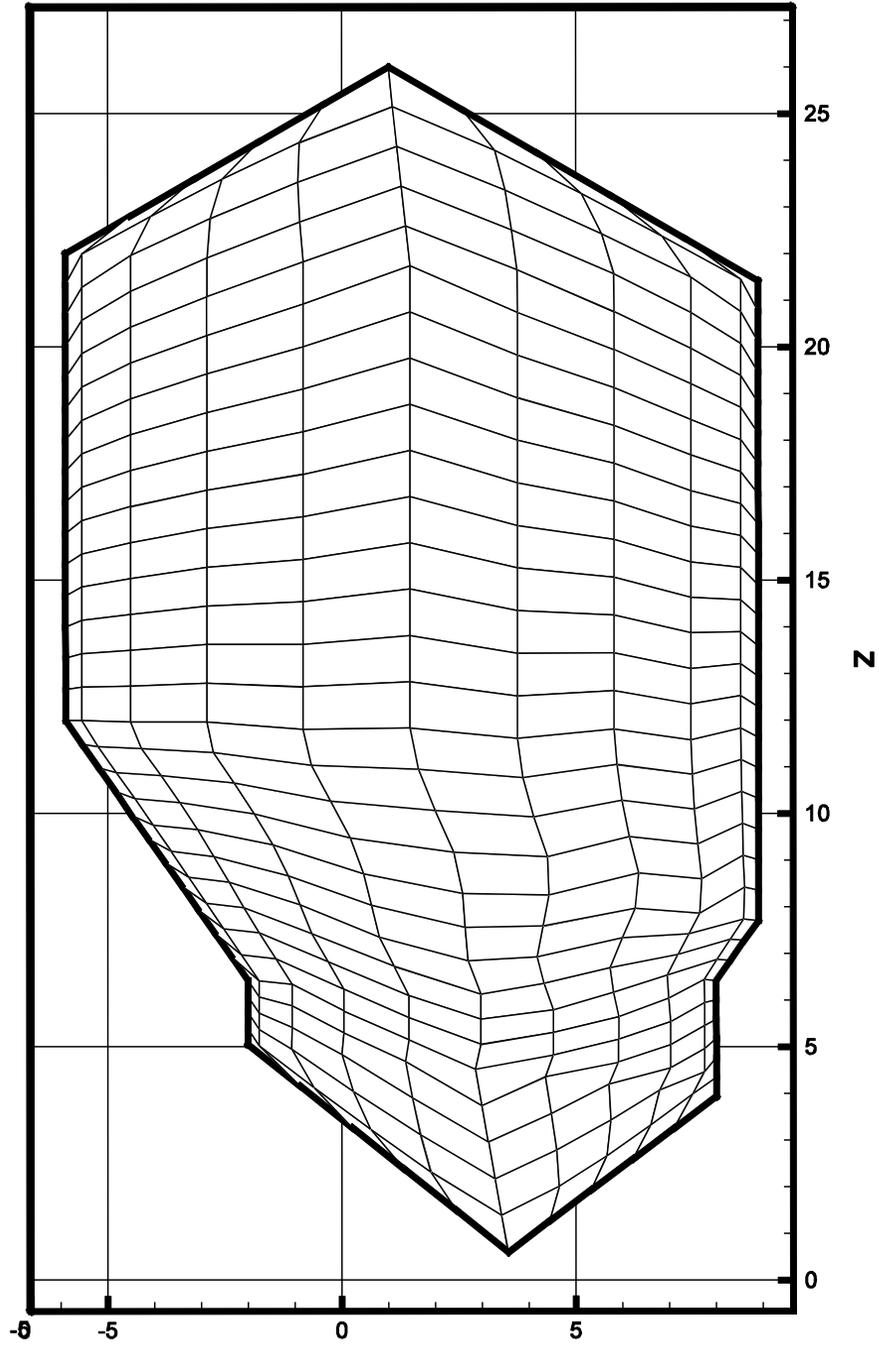
Примеры линий:

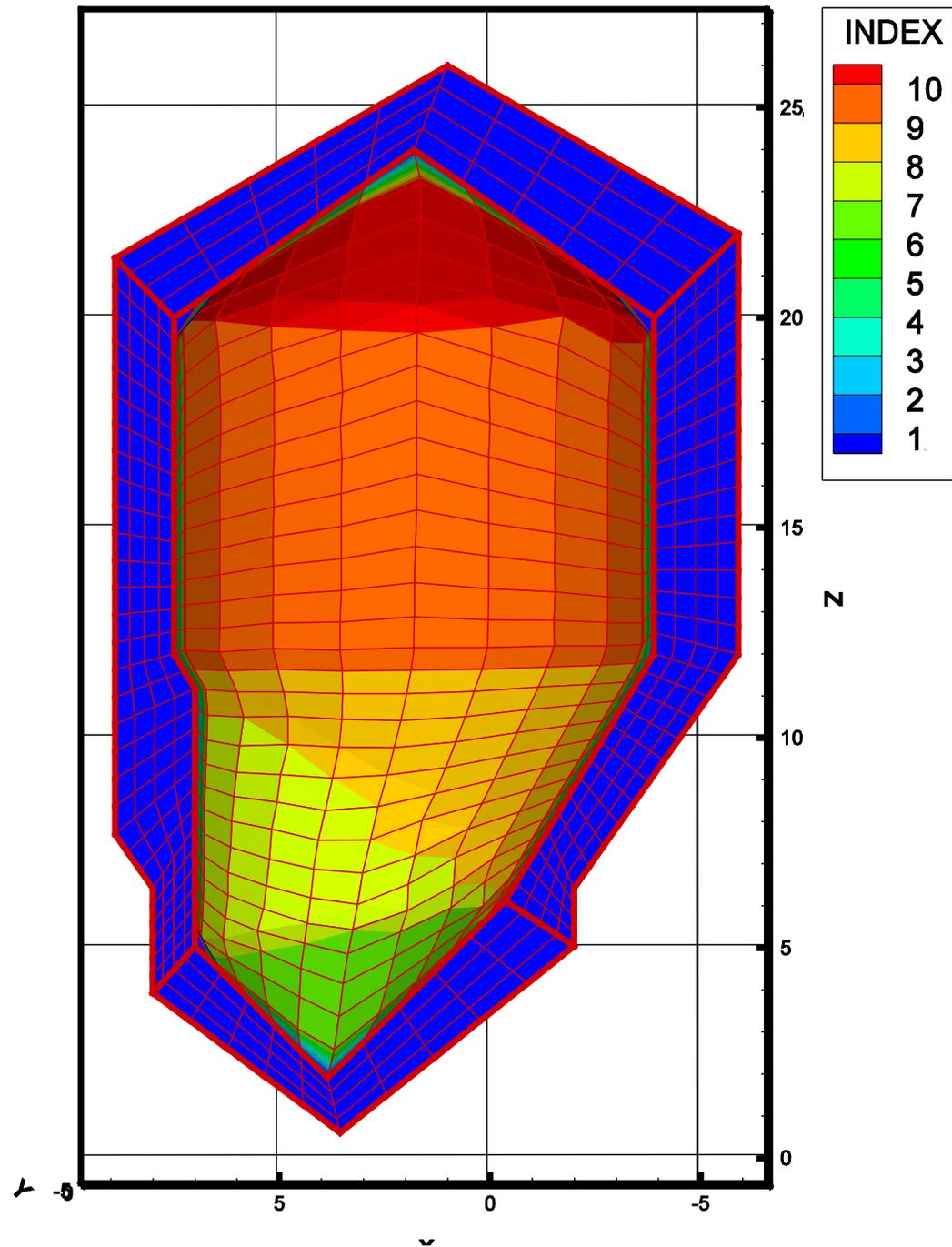
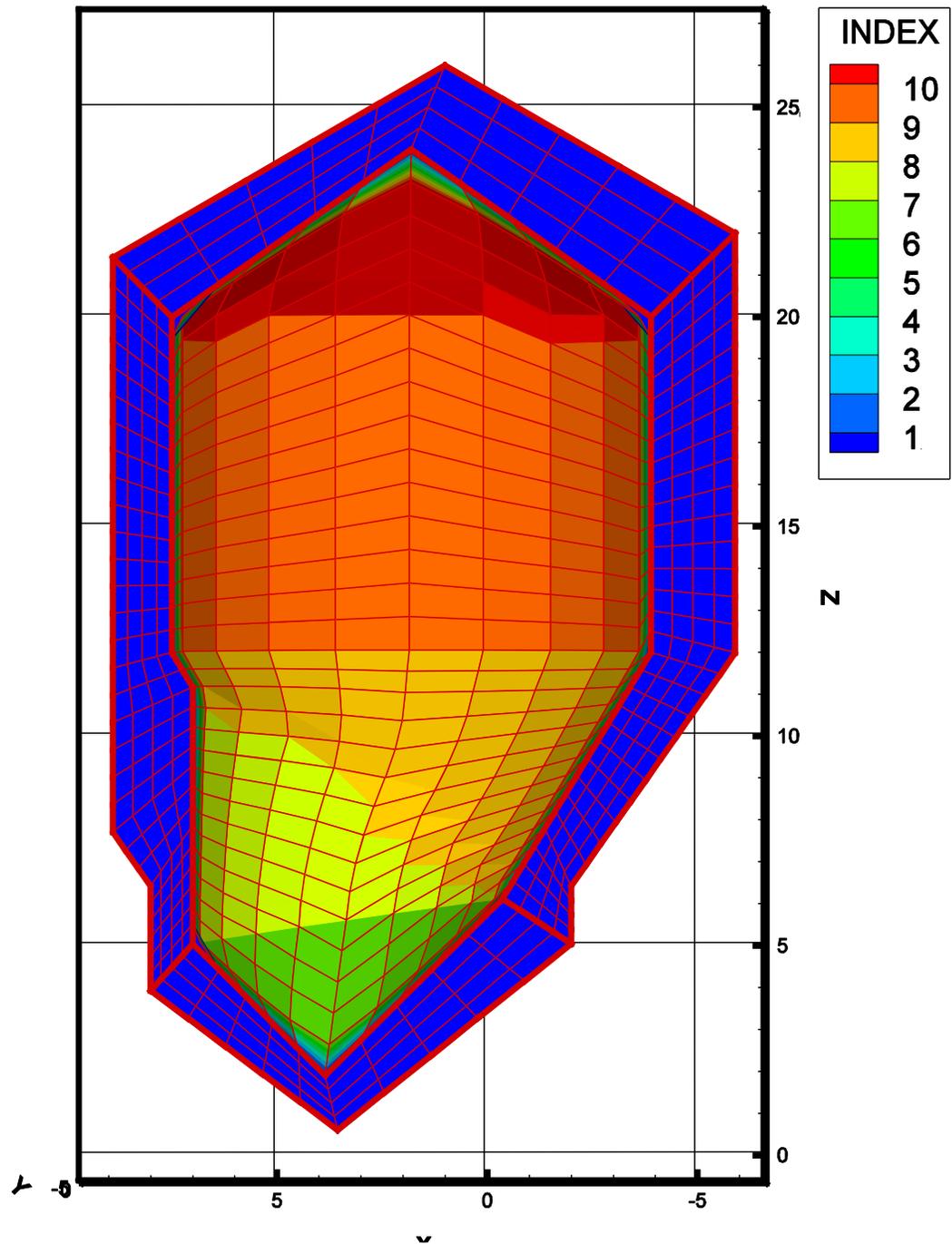
- 0 – кривые пересечения поверхностей
- 1 – кривая, составленная из 3-х дуг двух эллипсов
- 2 – кривая, составленная из 3-х дуг двух эллипсов
- 3 – один эллипс

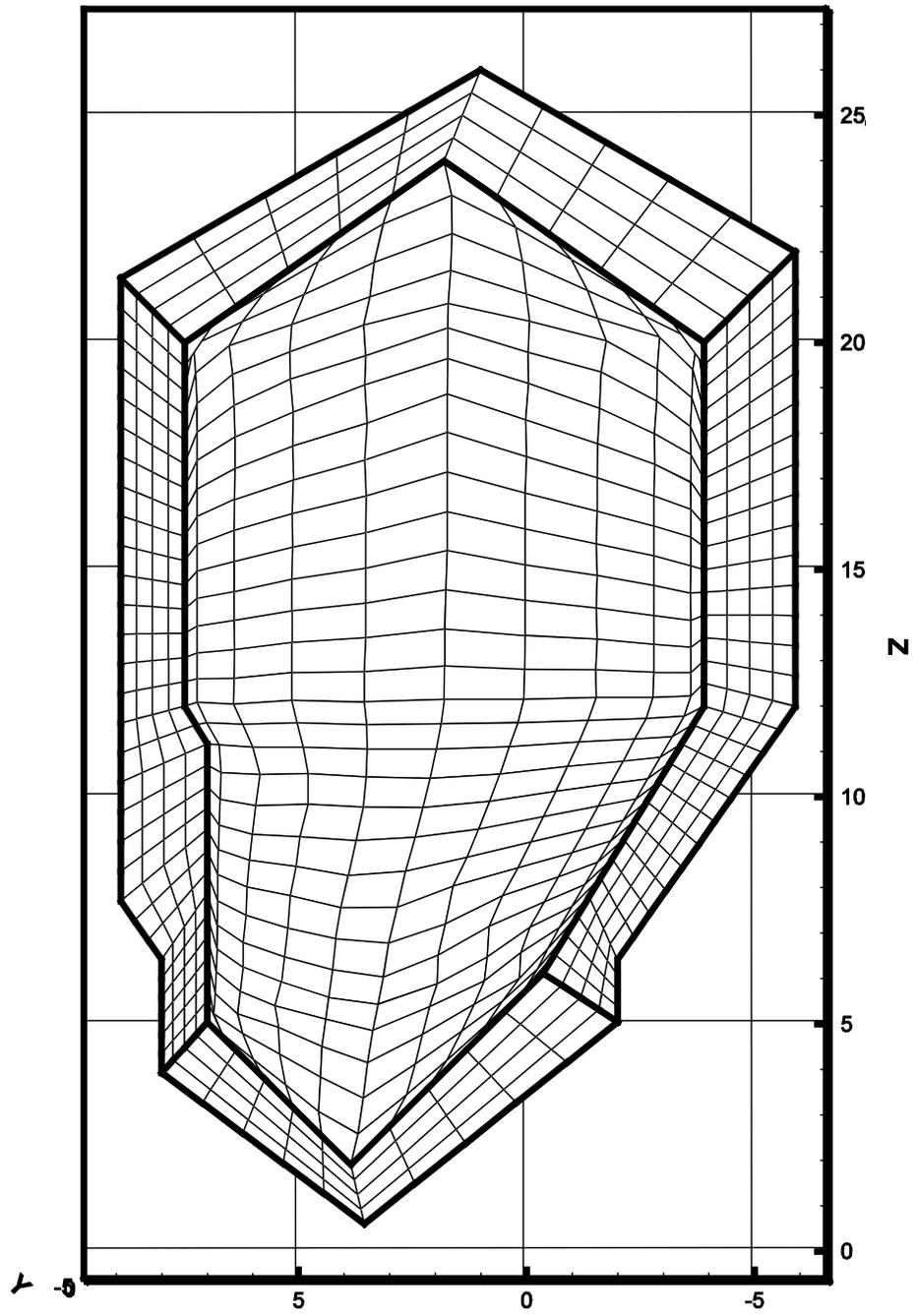
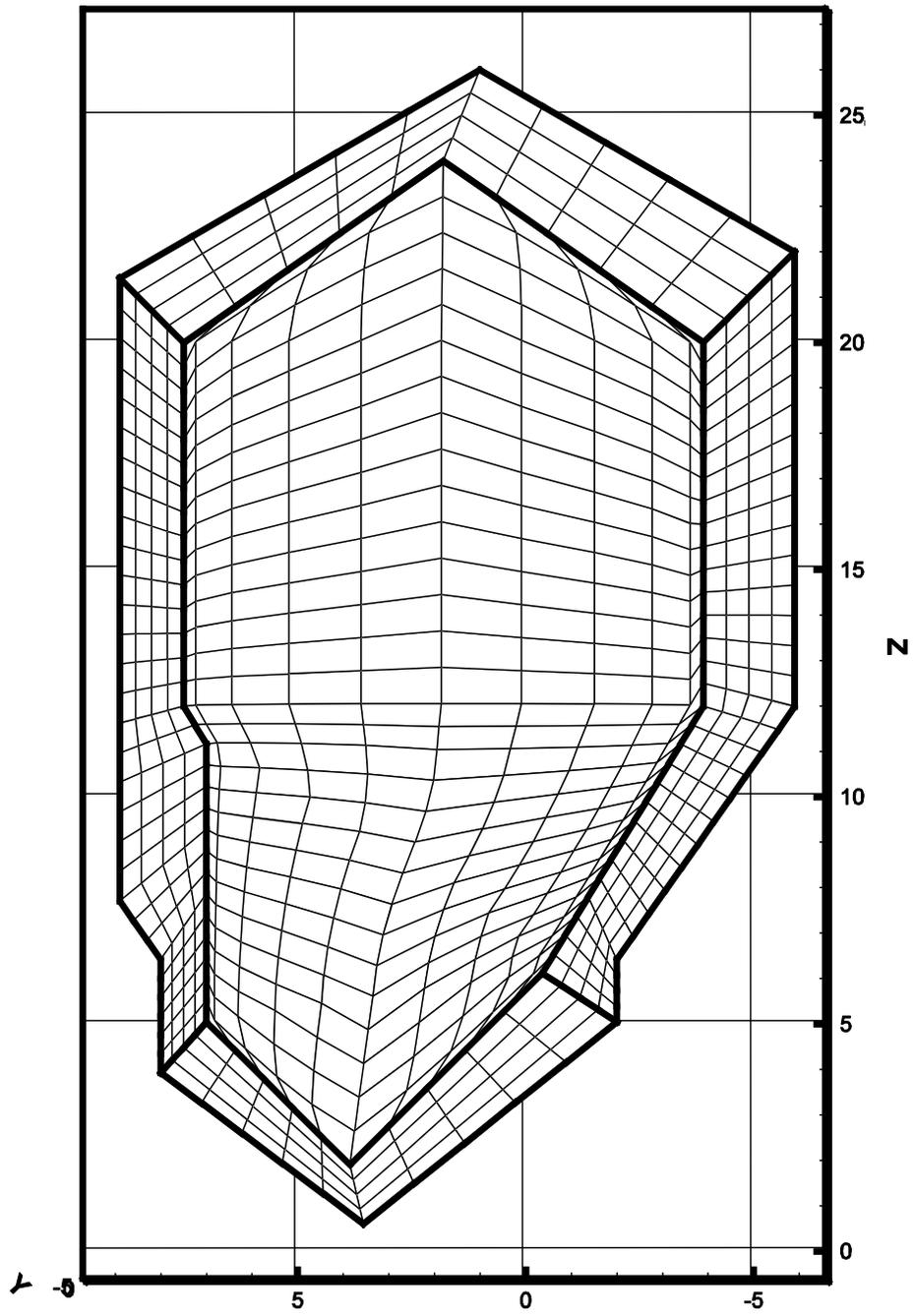
ЭТАП 2. ОПТИМИЗАЦИЯ И КОРРЕКЦИЯ СЕТКИ К ПОВЕРХНОСТЯМ ВРАЩЕНИЯ (О.В.Ушакова)



Начальная(слева) и оптимальная сетки при весе ортогональности ($A_0=1.$), номера поверхностей вращения (INDEX).







НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ (2014)

- Развитие алгоритма деформации сетки в виде алгоритма построения нестационарных сеток.
- Совершенствование алгоритма построения сеток в объемах, ограниченных поверхностями вращения с параллельными осями симметрии.
- Развитие оптимизационного алгоритма разработкой алгоритма коррекции сетки к поверхностям вращения с различными осями симметрии.

НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ (2017)

- Разработка алгоритма для более сложных видов деформирующихся объемов вращения, чем конус и цилиндр.
- Оптимизация алгоритмов движения узлов на границе конструкций, сохранение в сетке линий пересечения поверхностей вращения.
- Разработка алгоритмов оптимизации и коррекции сетки для случаев формирования граней конструкций поверхностями вращения по двум координатным направлениям.