О ДВУХ ПОДХОДАХ К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского
УрО РАН
Екатеринбург

Цель доклада — продемонстрировать возможности развиваемого авторами геометрического метода на примере решения задачи об обтекании с использованием широко известной модели Эйлера для идеального газа.

В докладе рассматривается модель идеального политропного газа для установившегося движения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$\rho[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}] = -\nabla p, \quad \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p}_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}$ — вектор скорости с компонентами $\{u, v, w\}$, p — давление, ρ — плотность, γ — показатель политропы, $\{x, y, z\}$ — независимые переменные, $p_0 = \mathrm{const}$, $\rho_0 = \mathrm{const}$.

Пусть в системе (1) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, где $\psi = \psi(x, y, z)$. Тогда система (1) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&(u + vf_1 + wf_2)u' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)v' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)f_1\rho^{(\gamma-2)})\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)w' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)f_2\rho^{(\gamma-2)})\rho' = 0,\\
&(u + vf_1 + wf_2)\rho' + \rho(u' + f_1 v' + f_2 w') = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ — произвольные функции. Штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ. $\psi_y/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$ (в предположении, что $\psi_x \neq 0$).

Чтобы система (1), рассматриваемая как система алгебраических уравнений относительно u', v', w', ρ', имела нетривиальное решение, определитель при производных должен быть равен нулю. Приравнивая определитель нулю, получаем, что

$$a)\ \rho = \left[\frac{\rho_0^{\gamma}(u + vf_1 + wf_2)^2}{\gamma p_0(1 + f_1^2 + f_2^2)}\right]^{1/(\gamma-1)} \quad \text{или} \quad b)\ (u + vf_1 + wf_2) = 0. \tag{3}$$

Отметим, что в случае b) из системы (1) имеем $\rho = \mathrm{const}$

Нетрудно проверить, что $\psi = \psi(s)$,

$$s = x + f_1(s)y + f_2(s)z$$

$\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$. Тогда можно считать, что $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, $f_1(s) = s_y/s_x$, $f_2(s) = s_z/s_x$. Задавая функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$, из выражения $s = x + f_1(s)y + f_2(s)z$ можно определить $s(x, y, z)$. Подставитв это выражение в $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, сведем систему (1) к ОДУ.

Например, пусть $f_1 = s$, $f_2 = s^2$. тогда

$$s = \frac{(1-y) \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4xz}}{2z}, \quad \rho = \left[\frac{\rho_0^\gamma (u + vs + ws^2)^2}{\gamma p_0 (1 + s^2 + s^4)}\right]^{1/(\gamma-1)}$$

и система (1) сводится к ОДУ

$$\begin{aligned}
&(u + vs + ws^2)u' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,\\
&(u + vs + ws^2)v' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)s\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,\\
&(u + vs + ws^2)w' + (\gamma p_0/\rho_0^\gamma)s^2\rho^{(\gamma-2)}\rho' = 0,\\
&(u + vs + ws^2)\rho' + \rho(u' + sv' + s^2 w') = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение задачи об обтекании для случая а)

В рассмотренном примере функции f_1 и f_2 задавались. Покажем, что их можно получать, решая содержательные задачи.

Если $u + vf_1 + wf_2 \neq 0$, а на поверхности обтекаемого тела известна плотность газа, то на поверхности тела возможно построение течения, удовлетворяющего условиям непротекания.

Так как $u + vf_1 + wf_2 \neq 0$, выполняется условие a). Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\rho)$, $\rho = \eta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - \mathbf{x}$. Тогда система (1) примет вид

$$
\begin{aligned}
u' &= -(p_0\gamma/\rho_0)\rho^{(\gamma-2)}/(u + vg_1 + wg_2),\\
v' &= -(p_0\gamma/\rho_0)g_1\rho^{(\gamma-2)}/(u + vg_1 + wg_2),\\
w' &= -(p_0\gamma/\rho_0)g_2\rho^{(\gamma-2)}/(u + vg_1 + wg_2),\\
&(u + vg_1 + wg_2) + \rho(u' + g_1v' + g_2w') = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ρ, $g_1(\rho) = \eta_y$, $g_2(\rho) = \eta_z$, где g_1, g_2 удовлетворяют зависимости

$$\rho = \left[\frac{\rho_0^\gamma (u + vg_1 + wg_2)^2}{\gamma p_0 (1 + g_1^2 + g_2^2)}\right]^{1/(\gamma-1)}. \qquad (6)$$

Таким образом, в данном рассмотрении роль независимого переменного в системе ОДУ (5) играет переменная ρ(вместо ψ или s) и вместо призвольных функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ рассматриваются произвольные функции $g_1(\rho)$, $g_2(\rho)$, которые ниже будут определены в зависимости от плотности,заданной на поверхности тела. Итак, решаем обратную задачу. В выражении $\rho = x + g_1(\rho)y + g_2(\rho)z$ известны ρ, x, y, z, требуется определить $g_1(\rho)$ и $g_2(\rho)$.

Зададим уравнение поверхности обтекаемого тела в параметрическом виде $x = x(q, r)$, $y = y(q, r)$, $z = z(q, r)$, Так как предполагается, что плотность газа ρ на теле известна, пусть $\rho = \rho(q, r)$.
Продифференцировав соотношение $\rho(q, r) = \rho(x(q, r), y(q, r), z(q, r))$ сначала по q, затем по r, найдем из полученных выражений
$\eta_y = g_1(q, r) = [(z_q\rho_r - z_r\rho_q) + (x_r z_q - x_q z_r)]/(y_q z_r - y_r z_q)$ и
$\eta_z = g_2(r, q) = [(y_r\rho_q - y_q\rho_r) + (x_q y_r - x_r y_q)]/(y_q z_r - y_r z_q)$.
Далее зафиксируем $r = r^*$ и подставим $\rho(q, r^*)$ в (6), тогда из этого выражения можно получить

$$u + vg_1(q, r^*) + wg_2(q, r^*) = \{(p_0\gamma/\rho_0^\gamma)[1 + g_1^2(q, r^*) + g_2^2(q, r^*)]\rho^{(\gamma-1)}(q, r^*)\}^{1/2}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (5), получим

$$\frac{du}{dq} = -\frac{d\rho}{dq}\left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2}\right]^{1/2}, \quad \frac{dv}{dq} = -g_1\frac{d\rho}{dq}\left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2}\right]^{1/2},$$
$$\frac{dw}{dq} = -g_2\frac{d\rho}{dq}\left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2}\right]^{1/2}. \tag{8}$$

Умножим левые части системы (8) на компоненты вектора нормали к обтекаемому телу, получим

$$(y_q z_r - y_r z_q)\frac{du}{dq} + (x_r z_q - x_q z_r)\frac{dv}{dq} + (x_q y_r - x_r y_q)\frac{dw}{dq} =$$

$$-\frac{d\rho}{dq}\left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\right]^{1/2}[(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r)g_1 + (x_q y_r - x_r y_q)g_2] \tag{9}$$

Выпишем условия непротекания
$(y_q z_r - y_r z_q)u + (x_r z_q - x_q z_r)v + (x_q y_r - x_r y_q)w = 0.$
Продифференцировав это выражение по q и учитывая зависимость (9), получим

$$(y_q z_r - y_r z_q)_q u + (x_r z_q - x_q z_r)_q v + (x_q y_r - x_r y_q)_q w =$$

$$\frac{d\rho}{dq}\left[\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^{\gamma}}\right)\frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1+g_1^2+g_2^2}\right]^{1/2} \tag{10}$$

$$\times[(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r)g_1 + (x_q y_r - x_r y_q)g_2].$$

Из соотношений (7), (10) и условия непротекания

$$(y_q z_r - y_r z_q)u + (x_r z_q - x_q z_r)v + (x_q y_r - x_r y_q)w = 0$$

найдем $u(q,r^*)$, $v(q,r^*)$, $w(q,r^*)$ на обтекаемой поверхности

$$u(q,r^*) = \frac{D_1}{D}, \quad v(q,r^*) = \frac{D_2}{D}, \quad w(q,r^*) = \frac{D_3}{D}, \qquad (11)$$

$$\begin{gathered}
D = (x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q \\
+g_1[(x_q y_r - x_r y_q)(y_q z_r - y_r z_q)_q - (y_q z_r - y_r z_q)(x_q y_r - x_r y_q)_q)] \\
+g_2[(y_q z_r - y_r z_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q - (x_r z_q - x_q z_r)(y_q z_r - y_r z_q)_q],
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
D_1 = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left\{ \frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}} [g_1(x_q y_r - x_r y_q) - g_2(x_r z_q - x_q z_r)] \right. \\
\times \; [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)] \\
\left. +\rho[(x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q]\sqrt{1+g_1^2+g_2^2} \right\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
D_2 = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left\{ \frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}} [g_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q)] \right. \\
\times \; [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)] \\
\left. +\rho[(x_q y_r - x_r y_q)(y_q z_r - y_r z_q)_q - (y_q z_r - y_r z_q)(x_q y_r - x_r y_q)_q]\sqrt{1+g_1^2+g_2^2} \right\},
\end{gathered}$$

Далее

$$D_3 = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left\{ \frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}} [(x_r z_q - x_q z_r) - g_1(y_q z_r - y_r z_q)] \right.$$

$$\times \; [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)]$$

$$\left. + \rho[(y_q z_r - y_r z_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q - (x_r z_q - x_q z_r)(y_q z_r - y_r z_q)_q] \sqrt{1+g_1^2+g_2^2} \right\} .$$

Аналогично можно получить значения компонент скорости при всех r.

Итак, получено искомое течение на заданой поверхности тела.

$$u(q, r^*) = \frac{D_1}{D}, \quad v(q, r^*) = \frac{D_2}{D}, \quad w(q, r^*) = \frac{D_3}{D}, \qquad (12)$$

Формулы (13) позволяют выделять особые точки на поверхности обтекаемого тела (обострение, если $D = 0$, $D_i \neq 0$, $(i = 1, 2, 3)$ или неопределенности, когда и числитель и знаменатель стремятся к нулю)

Решение задачи об обтекании для случая b)

Если на поверхности обтекаемого тела $u + vf_1(q) + wf_2(q) = 0$, то возможно получение компонент скорости, удовлетворяющих условию непротекания.

Если на поверхности $x = x(q, r)$, $y = y(q, r)$, $z = z(q, r)$ тела выполнено условие $u + vf_1(q) + wf_2(q) = 0$, то из системы (??) следует, что $\rho(q, r) = \text{const}$, $u' + v'f_1 + w'f_2 = 0$. Зафиксируем некоторую линию на поверхности тела, положив $r = r^*$. Продифференцируем соотношение $u + vf_1(q) + wf_2(q) = 0$ по q (считаем $r = r^*$ и учтем, что $u' + v'f_1 + w'f_2 = 0$). Получим $vf_1' + wf_2' = 0$. Добавив к имеющимся соотношениям условие непротекания, получим систему алгебраических уравнений для определения компонент скорости на теле

$$u(y_q z_r - y_r z_q) + v(x_r z_q - x_q z_r) + w(x_q y_r - x_r y_q) = 0,$$
$$u + vf_1((q) + wf_2(q) = 0, \quad vf_1' + wf_2' = 0. \tag{13}$$

Если определитель системы (13) отличен от нуля, то на теле выполняются условия прилипания $u(q,r^*)=0$, $v(q,r^*)=0$, $w(q,r^*)=0$. Приравнивая определитель нулю, получаем

$$(f_1f_2'-f_2f_1')(y_qz_r-y_rz_q)-f_2'(x_rz_q-x_qz_r)+f_1'(x_qy_r-x_ry_q)=0.$$

Сравнивая это соотношение с условием непротекания, полагаем, что $u=\lambda(f_1f_2'-f_2f_1')$, $v=-\lambda f_2'$, $w=\lambda f_1'$, $\lambda=\mathrm{const}$. С другой стороны компоненты скорости можно представить в виде(см. (1) и вид $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ в системе (??)) $u=f_1(x_qy_r-x_ry_q)-f_2(x_rz_q-x_qz_r)$, $v=f_2(y_qz_r-y_rz_q)-(x_qy_r-x_ry_q)$, $w=(x_rz_q-x_qz_r)-f_1(y_qz_r-y_rz_q)$. При таком представлении первые два уравнения системы (13) выполняются, а так как определитель системы равен нулю, то выполнено и третье уравнение системы. Учитывая два представления компонент скорости, получаем

$$-\lambda f_2'=f_2(y_qz_r-y_rz_q)-(x_qy_r-x_ry_q),\quad \lambda f_1'=(x_rz_q-x_qz_r)-f_1(y_qz_r-y_rz_q). \tag{14}$$

Отсюда определим функции $f_1(q)$ и $f_2(q)$ при каждом r, а затем искомое течение.

О другом подходе к решению задачи об обтекании.

Рассмотрим течения идеального газа, удовлетворяющие условию

$$\rho \mathbf{V} = \bigtriangledown a \times \bigtriangledown b, \tag{1}$$

где $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Из (1) следует, что скалярные произведения $(\nabla a, \rho\mathbf{V}) = 0$, $(\nabla b, \rho\mathbf{V}) = 0$. Предположим, что $b(x, y, z)$ — известная функция. Пусть, например, $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ — поверхность обтекаемого тела. Если считать, что описанные выше функции — решения системы (1), то будет ли такой класс решений не пуст? В рамках этого класса система уравнений Эйлера сводится к переопределенной системе четырех уравнений для двух неизвестных функций $\rho(x, y, z)$ и $a(x, y, z)$. Отметим сразу, что несложно проверить, что уравнение неразрывности $\mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ на данном классе течений обращается в тождество, следовательно достаточно показать, что система оставшихся трех уравнений для двух неизвестных функций совместна.

Пусть компоненты скорости (u, v, w) в системе (1) удовлетворяют условиям (1), где $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ — заданное уравнение обтекаемого тела. Тогда существует такое давление, при котором система уравнений (1) имеет решение на поверхности обтекаемого тела.

Положим в (1) $a = a(r)$, где $r = \ln\rho$. Так как $b(x, y, z) = z - \xi(y, x) = 0$ — известное уравнение поверхности обтекаемого тела, (1) можно переписать в виде

$$u = a^{'}\alpha, \quad v = a^{'}\beta, \quad w = a^{'}\delta, \quad \alpha = r_y b_z - r_z b_y, \quad \beta = r_z b_x - b_z r_x, \quad \delta = b_y r_x - r_y b_x. \tag{2}$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ρ.
Подставив (2) в систему (1), получаем

$$\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z = f_1(r) r_x, \quad \alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z = f_1(r) r_y, \quad \alpha\delta_x + \beta\delta_y + \delta\delta_z = f_1(r) r_z,$$

$$f_1(r) = g(r)/(a^{'}(r))^2, \quad g(r) = -[(\gamma p_0)/\rho_0^{\gamma}] \exp[r(\gamma - 1)]. \tag{3}$$

Найдя r_x из соотношения для β в (3), а r_y из соотношения для α в (3) и подставив эти выражения в соотношение для δ в (3), получим зависимость $\delta = -[\alpha(b_x/b_z) + \beta(b_y/b_z)]$. Из полученной зависимости найдем производные функции δ и подставив их в третье уравнение системы (3), будем иметь

$$-\left(\frac{b_x}{b_z}\right)(\alpha\alpha_x+\beta\alpha_y+\delta\alpha_z)-\left(\frac{b_y}{b_z}\right)(\alpha\beta_x+\beta\beta_y+\delta\beta_z)-\alpha\left[\alpha\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_x+\beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_x\right]$$
$$-\beta\left[\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_y+\beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_y\right]-\delta\left[\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_z+\beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_z\right]=f_1 r_z.$$

Подставляя в выписанное соотношение вместо $(\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z)$ и $(\alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z)$ правые части соответствующих уравнений из системы (3), а вместо α, β, δ их выражения через производные функции r из (2), получим уравнение первого порядка относительно функции $r(x, y, z)$

$$(r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_z\left[(r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right)+(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right)\right]$$
$$+(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_z\left[(r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right)+(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right)\right]$$
$$-(r_y b_z - r_z b_y)^2\left(\frac{b_x}{b_z}\right) - (r_y b_z - r_z b_y)(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right) \quad (4)$$

Итак, решение системы (1) сведено к решению переопределенной системы трех уравнений для определения функции $r(x,y,z)$ — двух первых уравнений из системы (3) и уравнения (4).
Пусть на теле задано давление, тогда можно считать, что на теле задано $r(\xi(x,y),x,y) = q(x,y)$. Отсюда

$$r_x(\xi(x,y),x,y) = q_x - r_z(\xi(x,y),x,y)\xi_x, \quad r_y(\xi(x,y),x,y) = q_y - r_z(\xi(x,y),x,$$

Подставив эти значения r_x, r_y в (4), определим

$$r_z(\xi(x,y),x,y) = [\xi_{xx}q_y^2 - 2\xi_{xy}q_xq_y + \xi_{yy}q_x^2 + f_1(q_x\xi_x + q_y\xi_y)]/[f_1(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1)] =$$

Тогда, продифференцировав по x и по y $r_x(\xi(x,y),x,y)$, $r_y(\xi(x,y),x,y)$, $r_z(\xi(x,y),x,y)$, получим

$$r_{zx} = p_x - (dp/df_1)f_1'q_x - r_{zz}\xi_x, \quad r_{zy} = p_y - (dp/df_1)f_1'q_y - r_{zz}\xi_y,$$

$$r_{xx} = q_{xx} - 2r_{zx}\xi_x - r_{zz}\xi_x^2 - r_z\xi_{xx}, \quad r_{xy} = q_{xy} - r_{zy}\xi_x - r_{xz}\xi_y - r_{zz}\xi_x\xi_y - r_z\xi_{xy},$$

$$r_{yy} = q_{yy} - 2r_{zy}\xi_y - r_{zz}\xi_y^2 - r_z\xi_{yy}.$$

Таким образом все производные второго порядка на теле определятся, если будет известна $r_{zz}(\xi(x,y),x,y)$. Подставив все известные вторые производные в первое и второе соотношение (3), получим

$$q_x q_{xy} - q_y q_{xx} = f_1(q_y - r_z \xi_y), \quad q_y q_{xy} - q_x q_{yy} = f_1(q_x - r_z \xi_x).$$

Как видим, $r_{zz}(\xi(x,y),x,y)$ в эти выражения не вошла. Подставим сюда $r_z(\xi(x,y),x,y)$, выразим f_1 из каждого уравнения и приравняем полученные выражения. Тогда на заданном обтекаемом теле функция $q(x,y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{(q_x q_{xy} - q_y q_{xx})(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1) + \xi_y(\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2)}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x \xi_x \xi_y} =$$
$$\frac{(q_y q_{xy} - q_x q_{yy})(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1) + \xi_x(\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2)}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y \xi_x \xi_y}. \tag{5}$$

Из этих же выражений получаем

$$f_1 = \frac{(q_x\xi_x - q_y\xi_y)q_{xy} - q_y\xi_x q_{xx} + q_x\xi_y q_{yy}}{q_y\xi_x - q_x\xi_y}. \qquad (6)$$

В уравнении (5) все члены, зависящие от производных первого порядка от функции $q(x, y)$ перенесем в правую часть уравнения. Обе части получившегося уравнения приравняем к пока произвольной функции $g(q)$. Получим

$$(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1)\left[\frac{q_x q_{xy} - q_y q_{xx}}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x\xi_x\xi_y} - \frac{q_y q_{xy} - q_x q_{yy}}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y\xi_x\xi_y}\right] = g(q)$$

$$(\xi_{xx}q_y^2 - 2\xi_{xy}q_x q_y + \xi_{yy}q_x^2)\left[\frac{\xi_x}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y\xi_x\xi_y} - \frac{\xi_y}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x\xi_x\xi_y}\right] = \qquad (7)$$

Для второго уравнения системы (7) выпишем расширенную систему уравнений характеристик [?], выбрав в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристик, переменную q. Замкнем полученную систему ОДУ, потребовав, чтобы первое уравнение системы (7) было первым интегралом расширенной системы характеристик и аналогично потребуем, чтобы уравнение (6) также было первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик. Получим систему ОДУ, решив которую найдем $q(x,y)$, $g(q)$ и $f_1(q)$. Используя полученные $f_1(q)$ и $q(x,y)$, найдем сначала $a'(\rho)$, а затем u, v, w на теле (см. (2)). Так как при этом все три соотношения (два первых уравнения из системы (3) и уравнения (4)) обращаются в тождество, приходим к решению системы (1) с условиями (1).
Итак, на поверхности тела найдено решение задачи об обтекании в классе функций (1). Что и требовалось доказать. □

Заключение

Подавляющую часть физических процессов и явлений, которые происходят в сплошных средах, можно описать с помощью нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Надежное количественное описание тех эффектов, которые заключает в себе именно нелинейность модели и которые теряются при линеаризации, особенно важно при создании новой техники. Современные ЭВМ и численные методы не всегда улавливают такие особенности. Поэтому необходимо сочетание вычислительных методов с применением аналитических конструкций и результатов исследований качественных особенностей нелинейных задач механики сплошной среды.

Предложенные методы построения течения газа вблизи тела, поверхность которого задана аналитически, позволяют сводить задачу, которая описывается нелинейной моделью Эйлера, к решению краевой задачи для системы ОДУ, в случае, если известна плотность газа. Для гладких кусков поверхности обтекаемого тела данные решения могут использоваться в качестве тестов.

Даже при обтекании гладких поверхностей могут возникать особенности, требующие пристального внимания. В работе рассмотрен пример, когда знаменатель в формулах (11) обращается в ноль. Формулы (11) для каждой обтекаемой поверхности позволяют определять места на поверхности, где могут наблюдаться обострения, для которых $D \to 0$, а числители дробей при этом не обращаются в ноль, а также слабые и сильные разрывы, когда знаменатель и числитель в формуле (11) обращается в ноль одновременно.