

**Спиральная траектория всплывающих
пузырей миллиметрового размера.
Аналитические подходы.**

Седов С.Ю. , Власов К.О.

План доклада

- Парадокс Леонардо (Историческая справка)
- Экспериментальные подтверждения
- Существующие аналитические решения
- Модель Седова С.Ю.
- Результаты расчетов
- Заключение



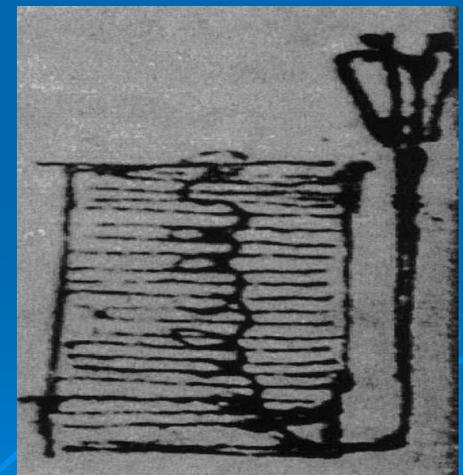
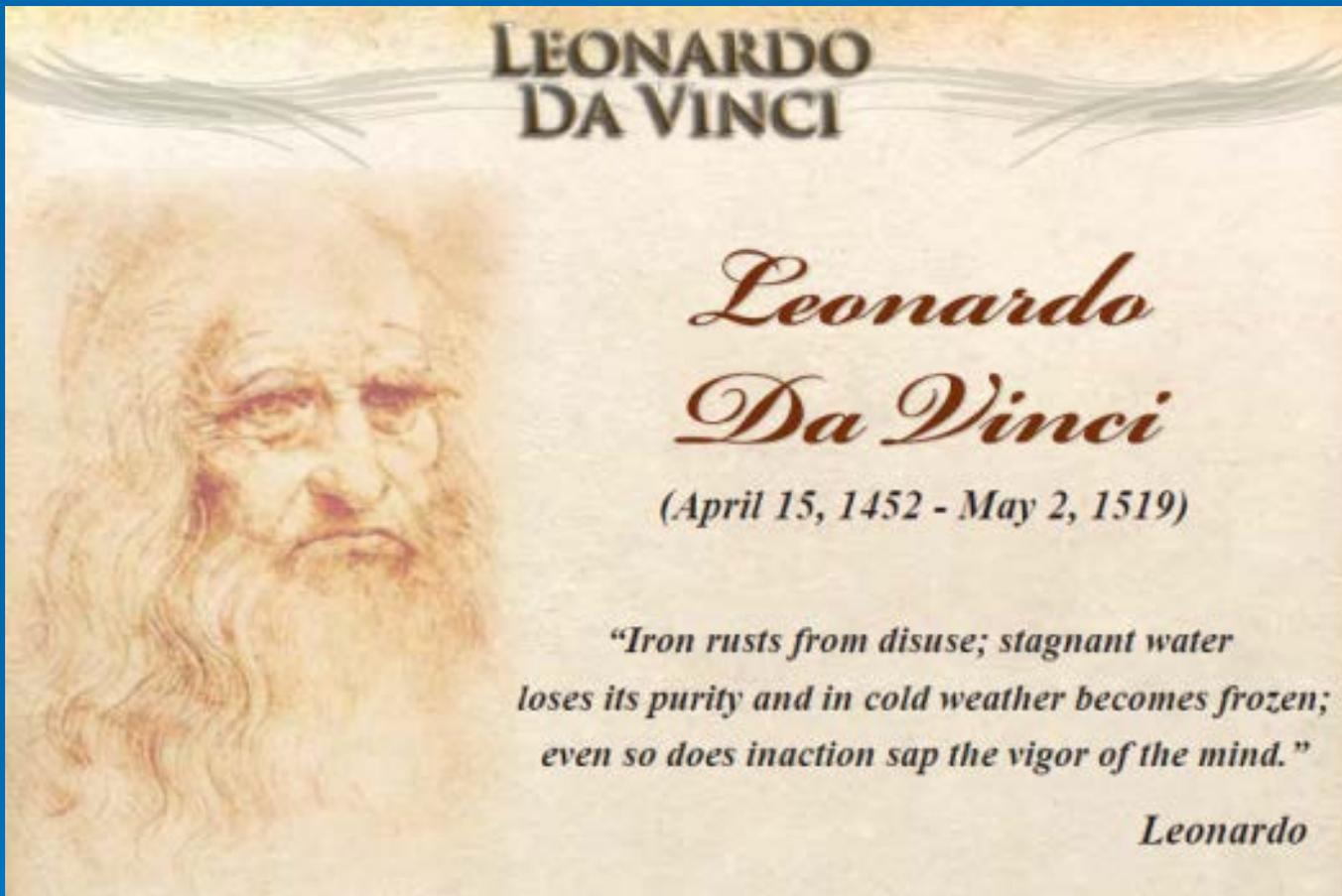
Задача академика Лаврентьева

Постановка задачи о всплытии пузырька, сформулированная академиком Лаврентьевым:

«Пузырьки воздуха в воде, всплывая, движутся по некоторой периодической кривой. Требуется дать качественное объяснение этого явления и попробовать сосчитать амплитуду и период «кривой всплытия».

«Наука и жизнь» №7 за 1965г.

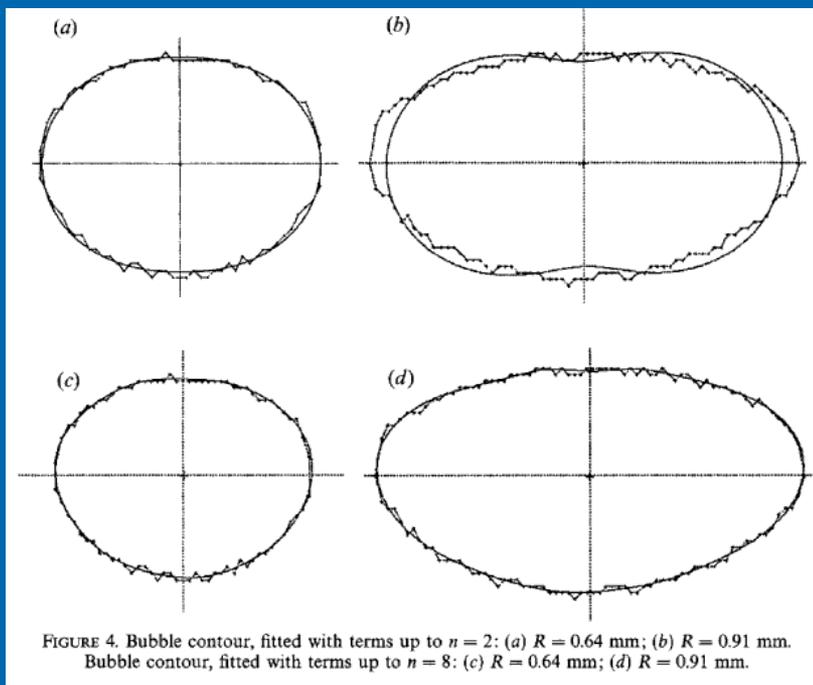
Парадокс Леонардо - спиральная траектория всплывающего пузырька



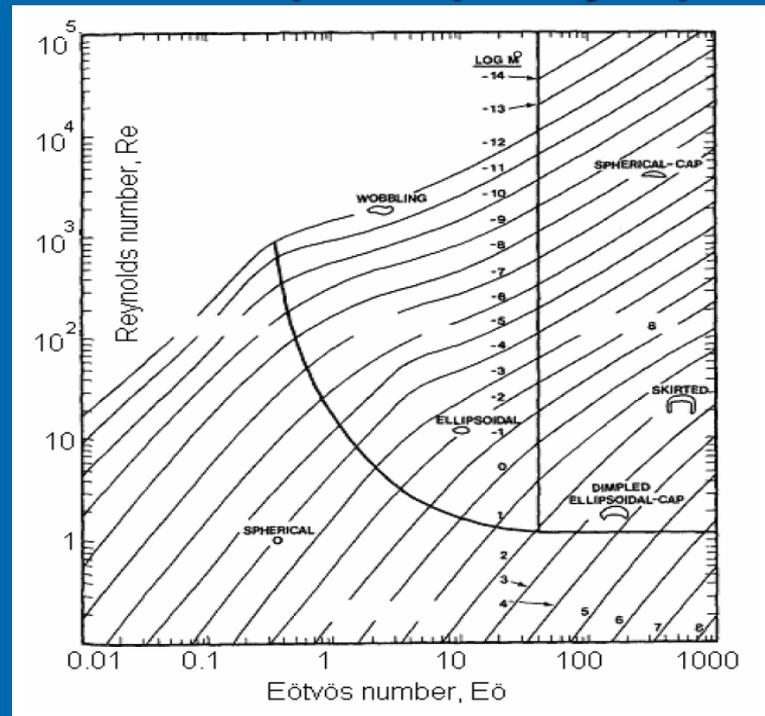
(Cod. Atl. 315 r. b; McCurdy 1938, Vol. 1, p. 532)

“Every impetuous movement bends towards the less resistance as it flies from the greater.”

Экспериментальные свидетельства. Различные типы траектории пузырей



Экспериментально измеренная форма пузырей миллиметровых размеров [Эллингсен, Рикко]



Различные формы пузыря в зависимости от чисел Рейнольдса и Этвеша [де Вриз]

Motion of Intermediate Size Air Bubbles Through Water at 28.5°C^a

d_c (mm)	Re	\bar{E}	Path
< 1.3	< 565	> 0.8	Rectilinear
1.3 to 2.0	565 to 880	0.8 to 0.5	Helical
2.0 to 3.6	880 to 1350	0.5 to 0.36	Plane (zig-zag) then helical
3.6 to 4.2	1350 to 1510	0.36 to 0.28	Plane (zig-zag)
4.2 to 17	1510 to 4700	0.28 to 0.23	Rectilinear but with rocking

^a After Aybers and Tapucu (A5).

Форма траектории в зависимости от чисел Рейнольдса и Этвеша [Cliff, Grace, Weber]

$$Ga = \frac{\rho \sqrt{gRR}}{\mu}, \quad Eo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}, \quad Re = \frac{2\rho RU}{\mu}$$

Актуальность разработки аналитических моделей всплывающих пузырей

Чтобы получить корректное решение трехмерной задачи о всплытии пузыря диаметром 3мм в современной CFD программе, требуется сетка, состоящая из 10 млн. ячеек

Трудоемкость численного моделирования пузырей диаметром менее 3мм – одна из причин необходимости разработки аналитических моделей.

Аналитическая модель (Magnaudet 2002)

Решалась система уравнений для жидкости и пузыря в частных производных. Пузырь предполагался недеформируемым, представимым в виде эллипсоида. Получено согласие с экспериментом по радиусу винтовой траектории.

Система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \nabla \cdot [\mathbf{V}(\mathbf{V} - \mathbf{W})] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times [(\nabla \mathbf{V} + {}^T \nabla \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (2)$$

$$\mathbb{A} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}_\omega - \rho \mathcal{V} \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{A} \cdot \mathbf{U}), \quad (3)$$

$$\mathbb{D} \cdot \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}_\omega - \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbb{D} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \mathbf{U} \times (\mathbb{A} \cdot \mathbf{U}),$$

В численном моделировании Magnaudet и соавторами изучалась структура вихреобразования за пузырем, предложено сформулировать аналитическую модель движения пузыря.

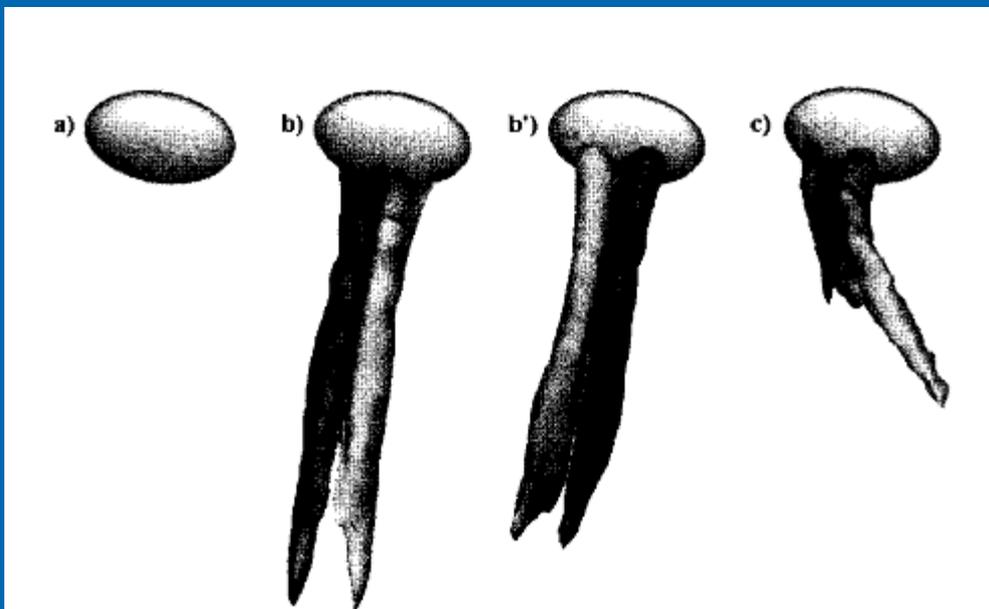


FIG. 5. Isosurfaces $\omega_x(R_{eq}/g)^{1/2} = \pm 2.7$ of the streamwise vorticity ($Ga = 138$; the darker thread corresponds to the positive value). (a) $\chi < \chi_c$, rectilinear path; (b) $\chi = 2.50$, zigzag path; (b') same, half a period later; (c) $\chi = 2.50$, spiral path.

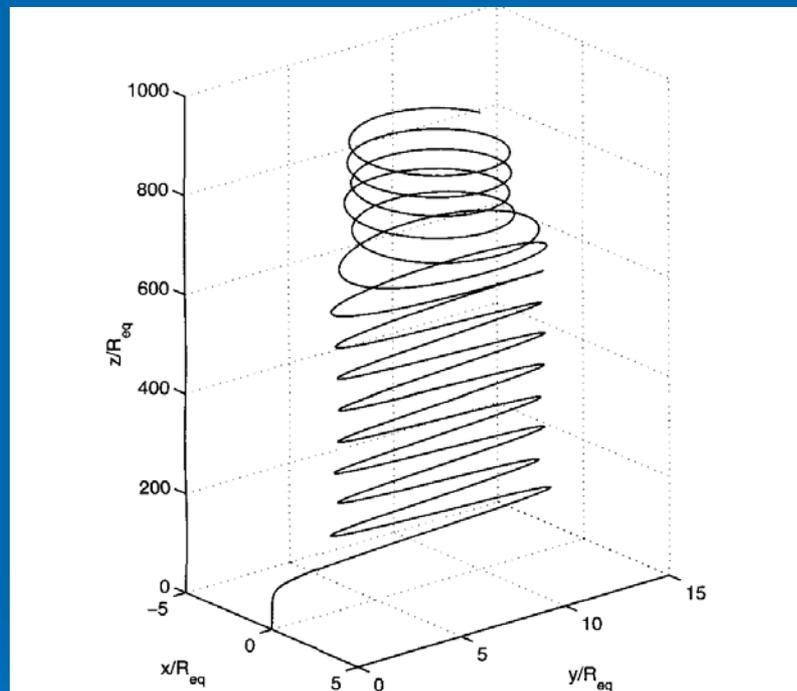
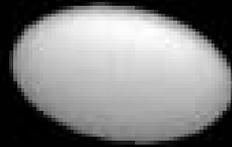
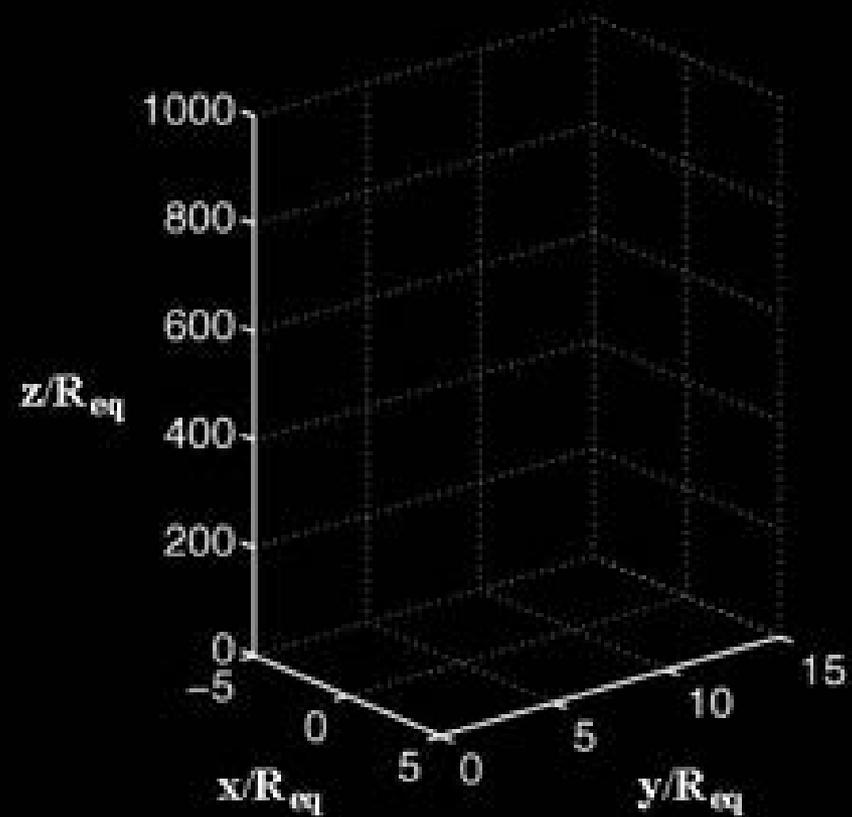


FIG. 3. Path of a zigzagging/spiraling bubble ($Ga = 138$, $\chi = 2.50$).

Trailing Vorticity

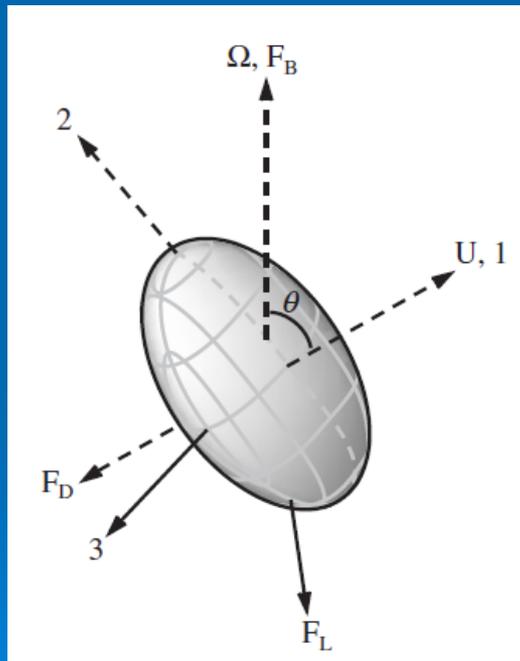


3D Trajectory



Аналитическая модель (Shew, Pinton 2002-2006)

В работах Shew и Pinton развивалось предложение Magnaudet – сформулирована аналитическая модель расчета траектории пузыря на основе учета экспериментальных закономерностей. В модели использованы уравнения Кирхгофа для твердого тела в жидкости. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений. Согласие с экспериментом для спиральной траектории пузыря при $R=1$ мм достигается при подстановке в дифференциальные уравнения экспериментального значения силы дрейфа (подъемной силы, равной приблизительно 20 мкН) и феноменологического значения угла бета наклона дрейфовой силы (равного 0.88).



Kirchhoff's equations for an ellipsoidal bubble are [9]

$$\mathbb{A}_{11} \frac{dU}{dt} = F_1, \quad \Omega_3 \mathbb{A}_{11} U = F_2, \quad -\Omega_2 \mathbb{A}_{11} U = F_3, \quad (1)$$

$$\mathbb{D}_{ii} \frac{d\Omega_i}{dt} = \Gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

where $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ is angular velocity. The added mass and added rotational inertia tensors are \mathbb{A} and \mathbb{D} , respectively. The components of forces and torques, respectively,

Система ОДУ для движения пузыря эллипсоидной формы (модель Shew и Pinton):

Cartesian, coordinate system. The six equations (1) and (2) are reduced to three using the observational constraint that the short axis of the ellipsoidal bubble remains aligned with the bubble path [6,7], so that

$$\Omega_1 = \frac{d\phi}{dt} \cos\theta, \quad \Omega_2 = \frac{d\phi}{dt} \sin\theta, \quad \Omega_3 = -\frac{d\theta}{dt}, \quad (3)$$

where θ is the pitch angle of the path, and ϕ is the azimuthal angle between a fixed horizontal line and the horizontal projection of the 1 direction. Applying this constraint, we are left with

$$\mathbb{A}_{11} \frac{dU}{dt} = F_D + F_{B1}, \quad (4)$$

$$-\frac{d\theta}{dt} \mathbb{A}_{11} U = F_{L2} + F_{B2}, \quad (5)$$

$$-\frac{d\phi}{dt} \sin\theta \mathbb{A}_{11} U = F_{L3}. \quad (6)$$

To proceed further, the buoyancy, drag, and lift forces must be expressed in terms of the dynamic variables U , θ , and ϕ . The components of buoyancy are $F_{B1} = \rho V g \cos\theta$ and $F_{B2} = \rho V g \sin\theta$, where ρ is liquid density, g acceleration due to gravity, and V bubble volume. The drag is taken to be $F_D = -\frac{1}{2} C_D \pi \rho R^2 U^2$, where Moore's theory [17] for

$$\tau \frac{d}{dt} \frac{F_L}{F_{L0}} = k \frac{F_L}{F_{L0}} + k' \left[\left(\frac{F_L}{F_{L0}} \right)^3 - \left(\frac{F_L}{F_{L0}} \right)^5 \right], \quad (7)$$

with $k = (\omega - \omega_c)/\omega_c$ and $k' = (\omega_c - \omega_0)/\omega_c$. The lowest stable, nonzero lift force is F_{L0} , and the corresponding ω value is ω_0 , as illustrated in Fig. 2(c). Finally, rewriting Eqs. (4)–(6) in terms of the dynamic variables, we obtain the set of ODEs

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{3C_D U^2}{8C_M R} + \frac{g \cos\theta}{C_M}, \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \sin\theta}{C_M U} + \frac{F_L \cos\beta}{\rho V C_M U}, \quad (9)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{F_L \sin\beta}{\rho V C_M U \sin\theta}, \quad (10)$$

$$\frac{dF_L}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{U \chi^{5/3} / R - \omega_c}{\omega_c} F_L + k' \frac{F_L^3}{F_{L0}^2} - k' \frac{F_L^5}{F_{L0}^4} \right), \quad (11)$$

На наш взгляд, основной недостаток подхода Pinton и соавторов - отсутствие аналитических выражений для стационарного значения дрейфовой силы и величины ее угла. Очевидно, что дрейфовая (подъемная) сила и ее наклон зависят от безразмерных чисел задачи. Мы сделали попытку установить такие зависимости. Источником дрейфовой силы и ее наклона являются присоединенные вихри внизу пузыря.



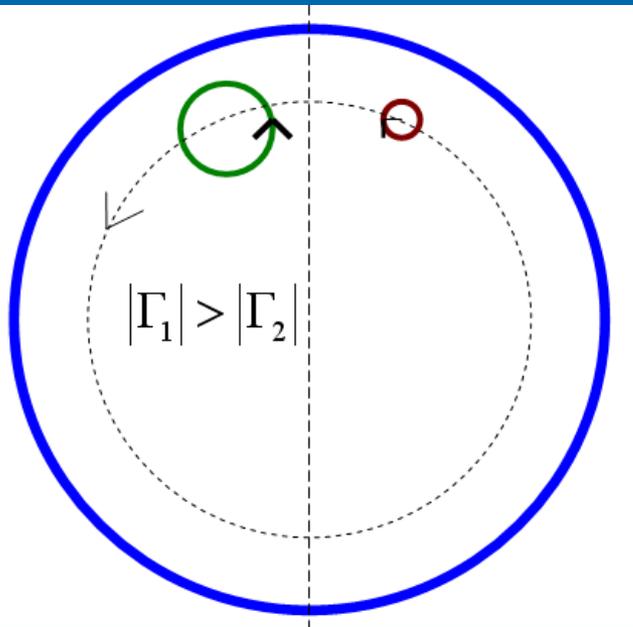
Вихревой след за пузырем
[экспериментальное фото Де Вриз]

Наша интерпретация возникновения вихрей :

В случае свободной границы возникает ненулевой скачок производных скорости жидкости. Этим скачком производных скорости порождается конечная завихренность векторного поля скоростей вблизи пузыря (Бэтчелор). Источником завихренности является вязкий подслой на поверхности пузыря. Его толщина мала по сравнению с радиусом пузыря, но важна для генерации вихрей. Причина формирования возникающей пары вихрей с циркуляциями противоположного знака на поверхности пузыря та же, что и при обтекании крыла самолета (за исключением того, что для крыла самолета имеет место скачок самой скорости, а для пузыря - скачок производной скорости). Вихревая пелена срывается с поверхности пузыря, деформируется. Образуются два вихря. За счет чего происходит срыв и появляется новая конфигурация завихренности вблизи пузыря? Очевидно, что здесь играет роль неустойчивость вихревой пелены. Итак, вихревая пелена скручивается в жгуты в двух точках на нижней поверхности пузыря, а неустойчивость Гельмгольца приводит к неустойчивости следа за пузырем.

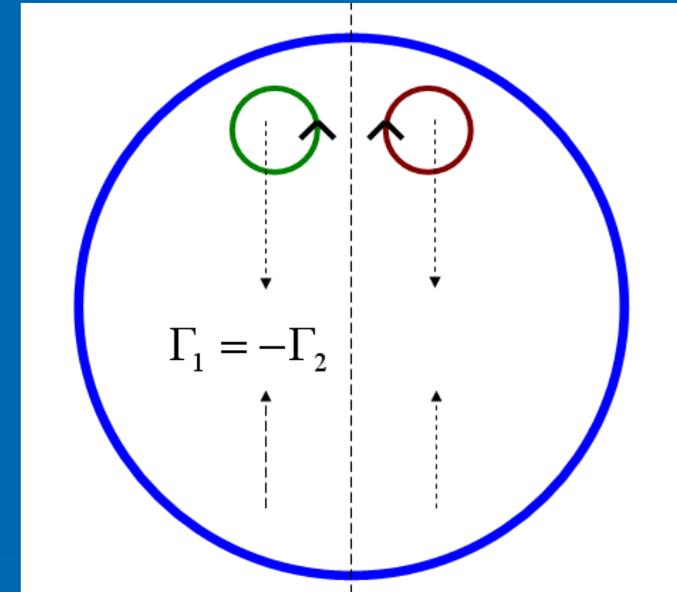
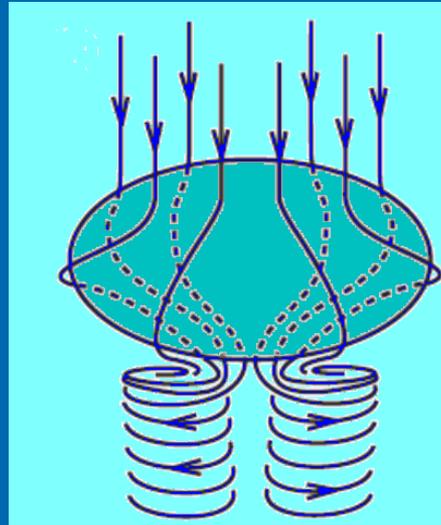
Наше объяснение характера траектории пузыря (связь с движением присоединенных вихрей)

Вид снизу на пузырь



СПИРАЛЬ:
сильный и слабый вихри по кругу на
корме пузыря

Вид снизу на пузырь



ЗИГЗАГ:
2 одинаковых вихря
с обратными циркуляциями
вдоль меридиана на корме пузыря

Объяснение спиральной траектории пузыря:

В случае зигзагового движения мы предполагаем, что циркуляции двух одинаковых вихрей:

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2$$

и центр вихрей движется по выделенному меридиану (образованному сечением эллипсоида вертикальной плоскостью через самую нижнюю точку эллипсоида), осциллируя при этом. Для спирали происходит дополнительное нарушение симметрии:

$$\Gamma_1 \neq -\Gamma_2$$

и, вследствие этого, возникает вращение вихрей (сильного и слабого) по нижней поверхности эллипсоида вокруг самой нижней точки эллипсоида.

Для угловой частоты вращения пузыря мы вывели выражение:

$$\Omega_{sp} = \chi \frac{\Gamma_1}{2\pi \cdot R^2}$$

Модель Седова С.Ю. для определения спиральной траектории пузыря

Система из 12 алгебраических уравнений (часть 1):

Эквивалентный радиус пузыря R определяется через его объем V :

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1).$$

Число Рейнольдса $Re = \frac{2RU}{\nu}$ (2),

где U - скорость подъема пузыря, ν - кинематический коэффициент вязкости. Формулы для аспектного соотношения $\chi = \frac{l_2}{l_1} \geq 1$ полуосей сплюснутого эллипсоида вращения и коэффициента присоединенных масс C_M :

$$\chi = 2.25R - 0.10 \quad (3),$$

$$C_M = 0.5 \cdot (-0.132 + 1.132 \cdot \chi) \quad (4).$$

Формулы для коэффициента сопротивления:

$$C_D = \frac{48}{Re} G(\chi) \cdot \left(1 + \frac{H(\chi)}{\sqrt{Re}} \right), \quad (5)$$

$$G(\chi) = \frac{1}{3} \chi^{\frac{1}{2}} (\chi^2 - 1)^{\frac{3}{2}} [(\chi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - (2 - \chi^2) \sec^{-1} \chi] / [\chi^2 \sec^{-1} \chi - (\chi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^2,$$

$$H(\chi) = 2.2 \left(\frac{\chi^2 - 1}{3.7} - 1 \right) \frac{1.4(\chi^2 - 1) + 4}{1.1(\chi^2 - 1) + 4}$$

Формула для подъемной силы F_L : $F_L = 3.5 \chi \cdot \rho \frac{U^2 R^2}{\sqrt{Re}}$, (6)

Система из 12 алгебраических уравнений (часть 2):

Формула для угла наклона ϑ_{st} скорости пузыря к вертикали:

$$\vartheta_{st} = \arcsin \left(\frac{F_L \cos \beta}{\rho \cdot V \cdot g} \right) \quad (7)$$

Формула для скорости пузыря U :

$$U = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{gR \cos \vartheta_{st}}{C_D}} \quad (8)$$

Формулы для частоты вращения спиральной траектории Ω_{sp} :

$$\Omega_{sp} = \frac{F_L \sin \beta}{\rho V C_M U \sin \vartheta_{st}} \quad (9)$$

$$\Omega_{sp} = \frac{g \cdot \operatorname{tg} \beta}{C_M U} \quad (10)$$

Значение радиуса спиральной траектории R_{sp} :

$$R_{sp} = \frac{U \sin \vartheta_{st}}{\Omega_{sp}} \quad (11)$$

Величина угла β для силы дрейфа:

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{3} C_M \cdot \chi^{\frac{5}{3}} \sin \vartheta_{st} \right) \quad (12)$$

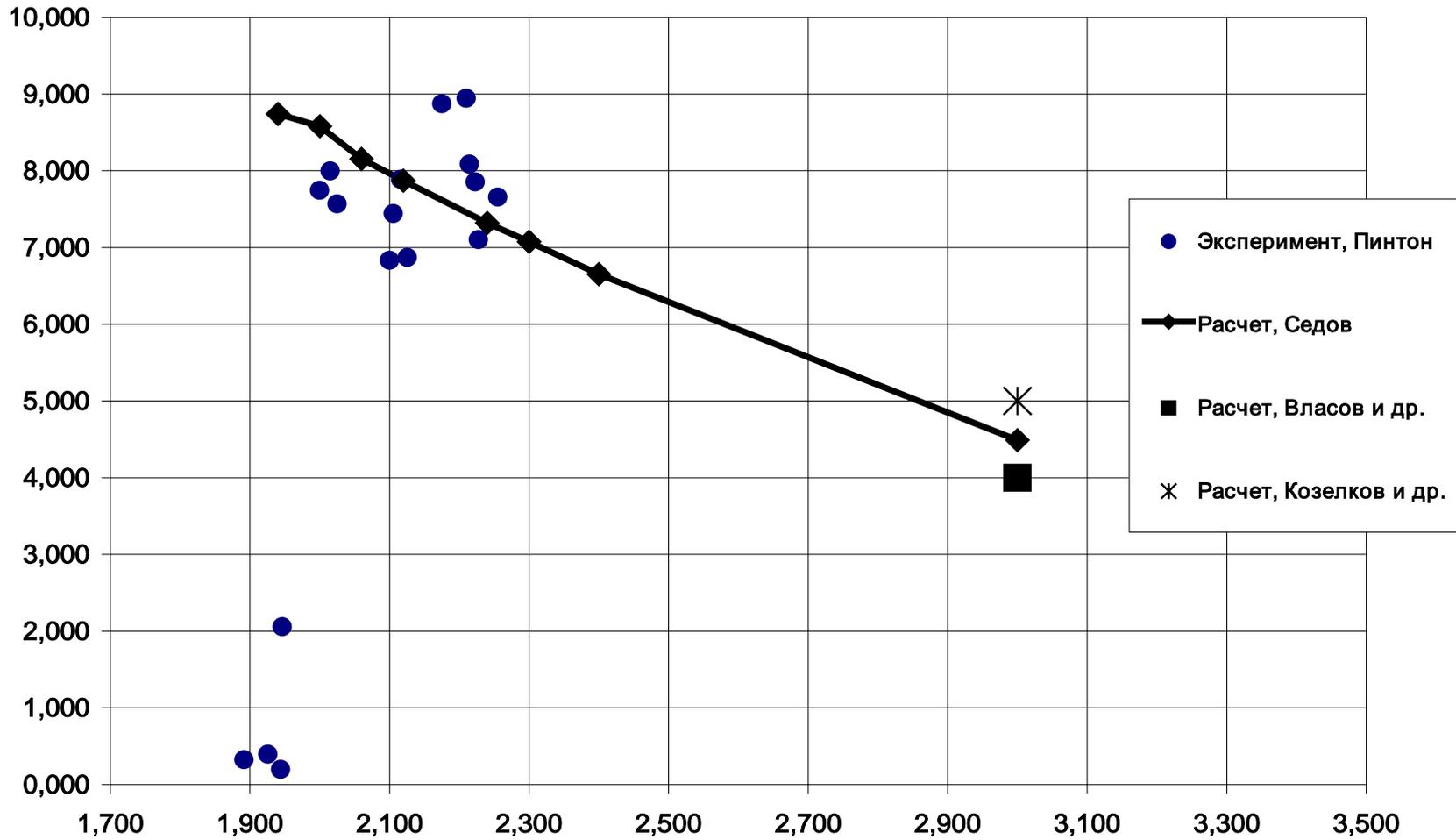
Итак, задача о численном определении характеристик спирального движения пузыря сведена к решению набора из 12 алгебраических уравнений с единственным эмпирическим числом в выражении для подъемной силы и единственным входным параметром – эквивалентным радиусом пузыря.

Эти уравнения могут использоваться для тестирования расчетов движения пузырей миллиметровых размеров на основе трехмерных гидродинамических программ.

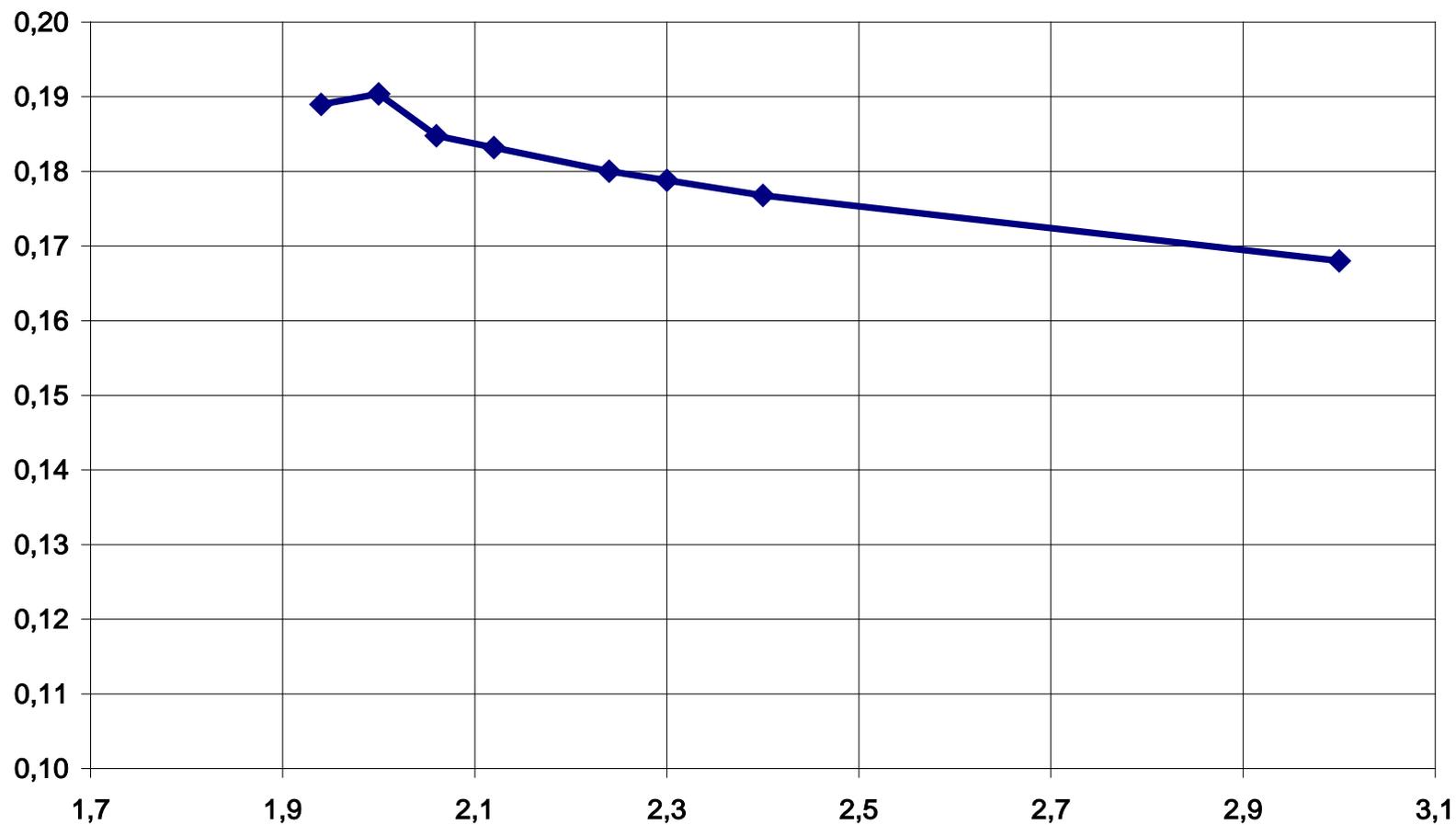
Приведем результаты конкретных расчетов.

Результаты расчетов

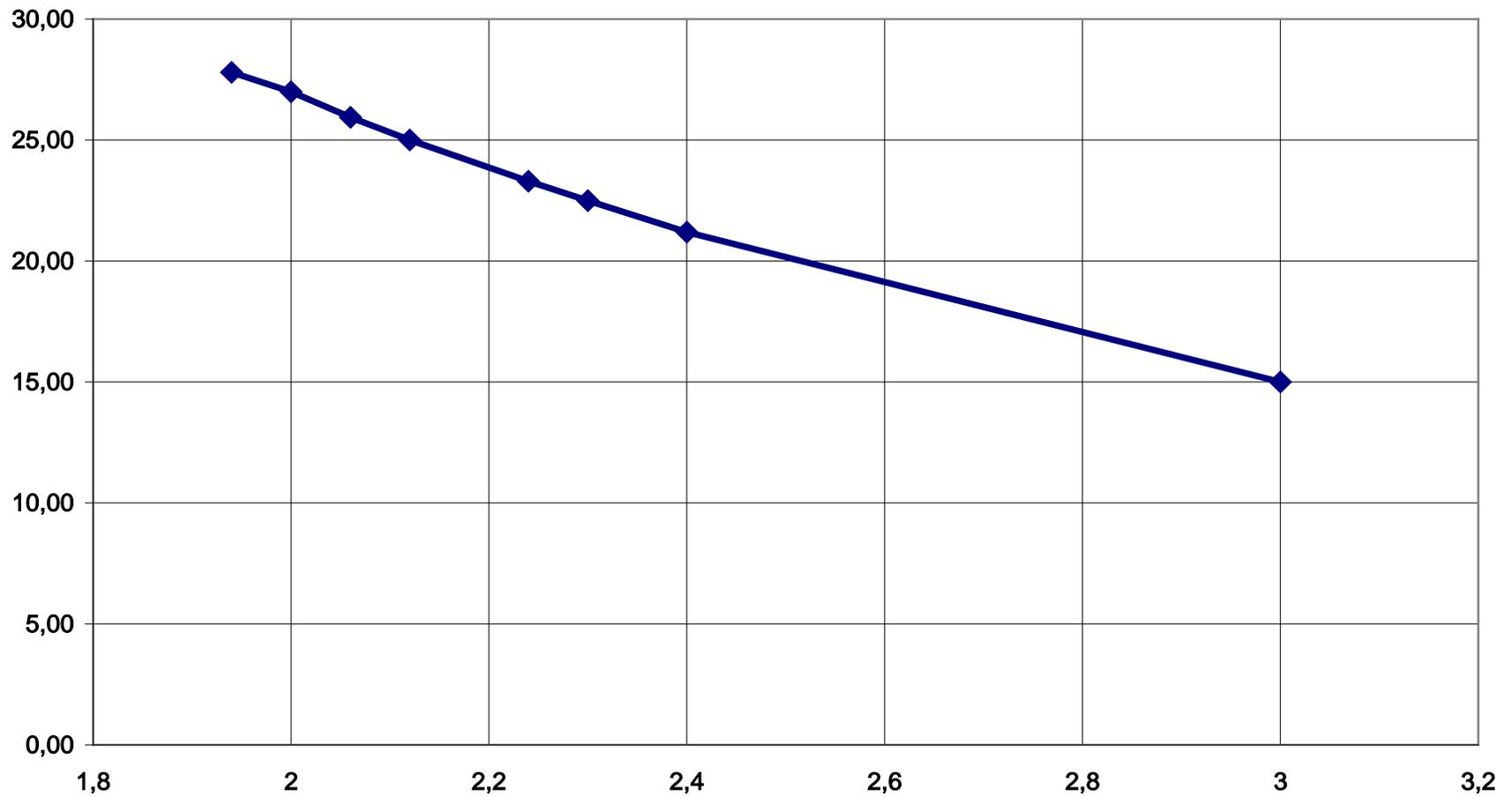
Зависимость диаметра спирали от диаметра пузыря, в мм



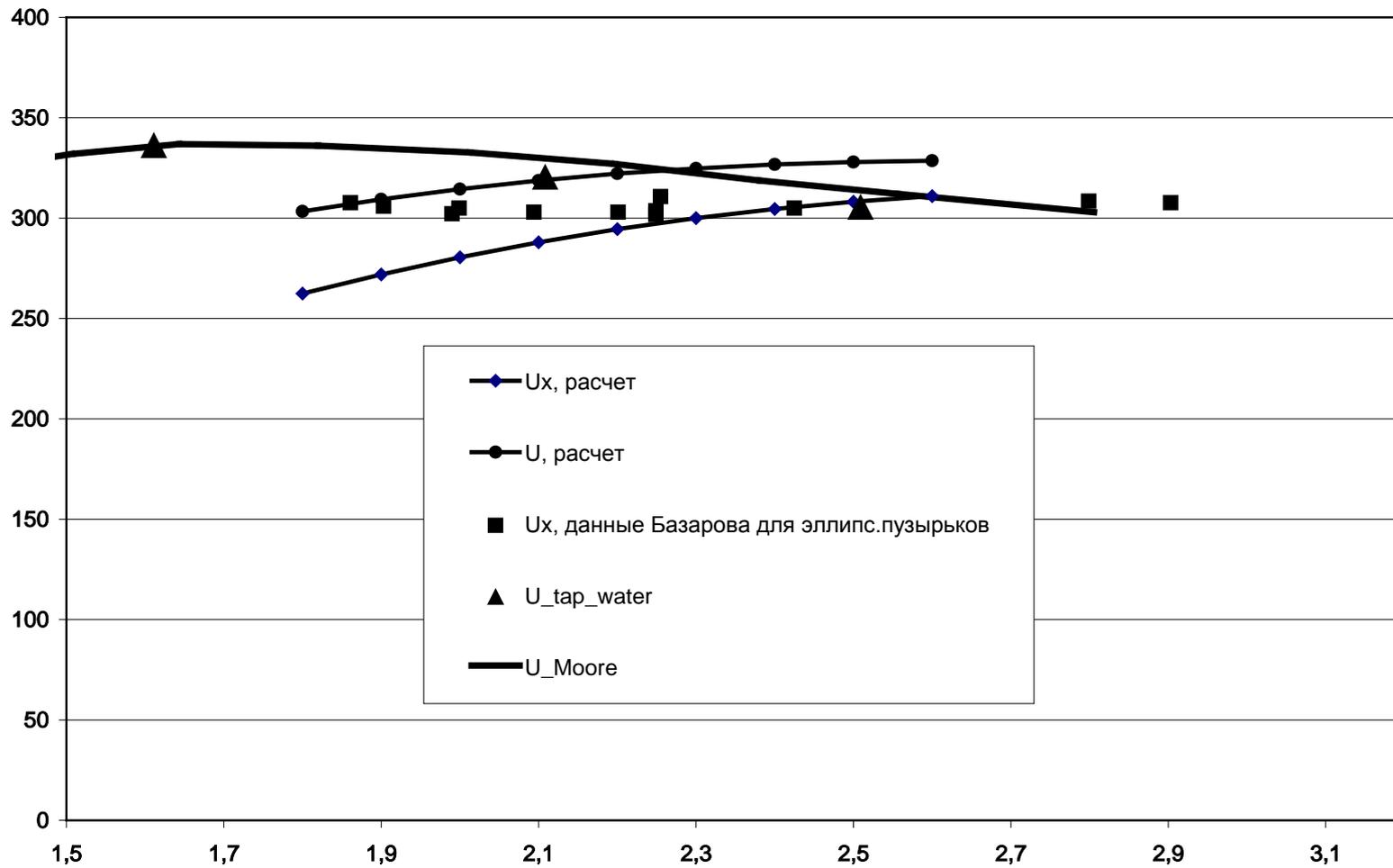
Период спиральной траектории (в сек) в зависимости от диаметра пузыря (в мм)



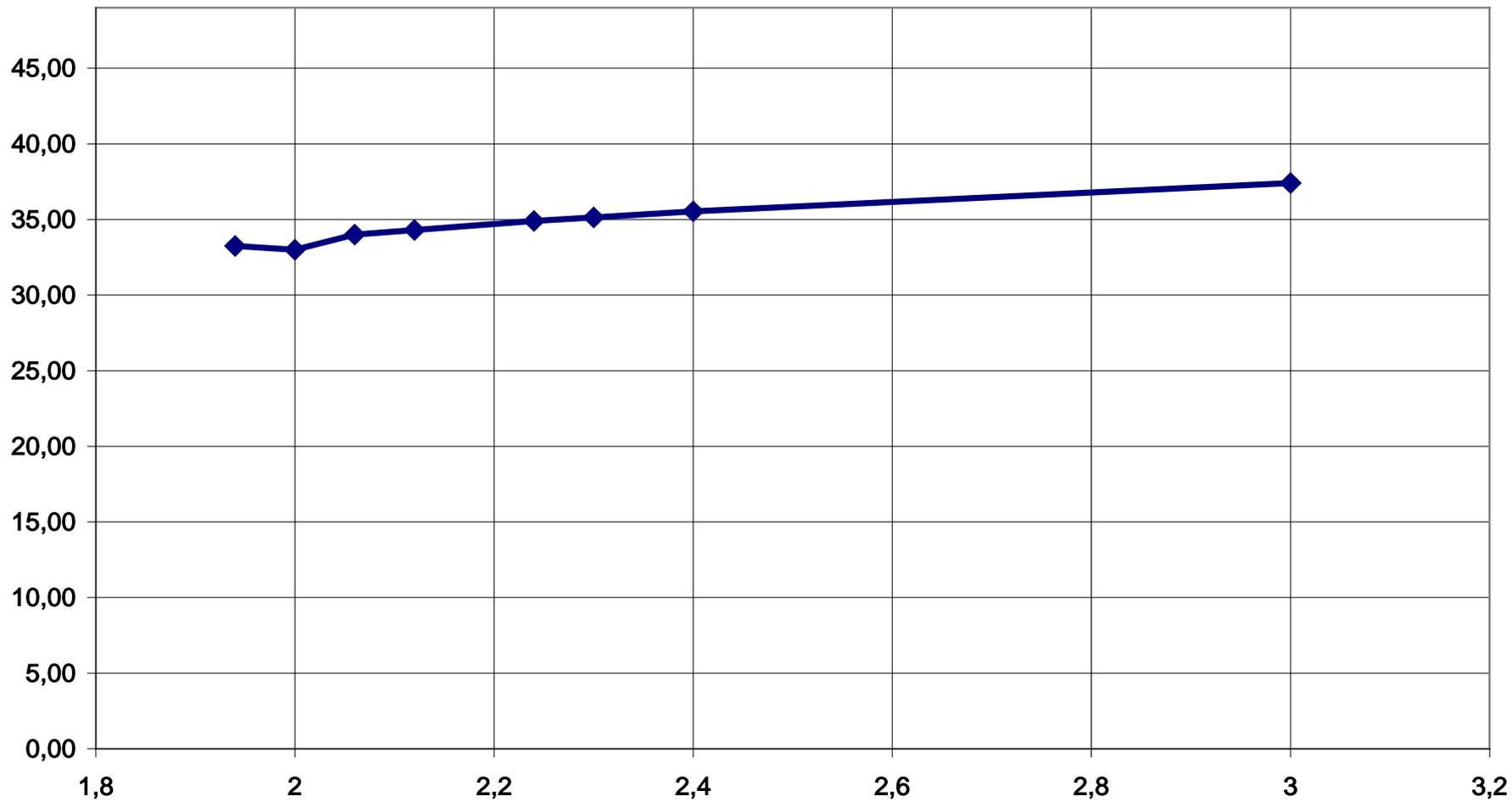
Зависимость угла наклона скорости в градусах от диаметра пузыря в мм



Зависимость скорости пузыря (мм/с) от диаметра (мм)



Угловая частота (в 1/сек от диаметра пузыря (в мм))



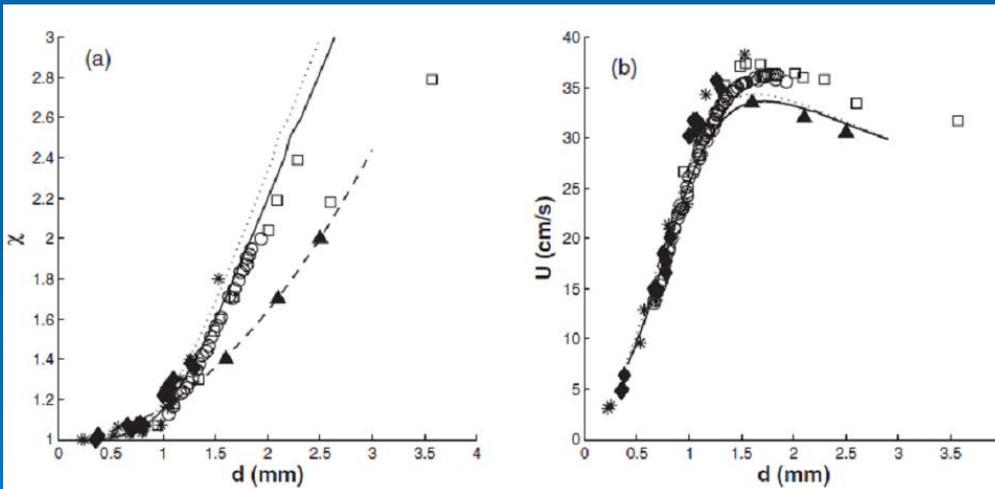
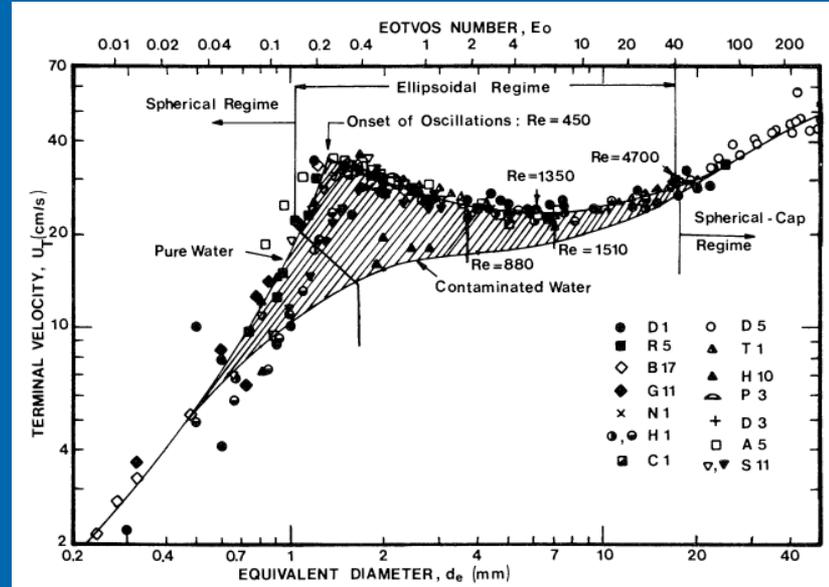
Замечания о соответствии теории и экспериментов: разница в результатах для “чистой” и “грязной” воды

Михаелидес:

It must be also pointed out that, more recent studies using systems of high purity, such as the one by Wu and Gharib (2002), show conclusively that the shape, the motion and the drag coefficients of fluid objects in pure fluids exhibit significant departures from the results for contaminated fluids, even if the degree of contamination is very low

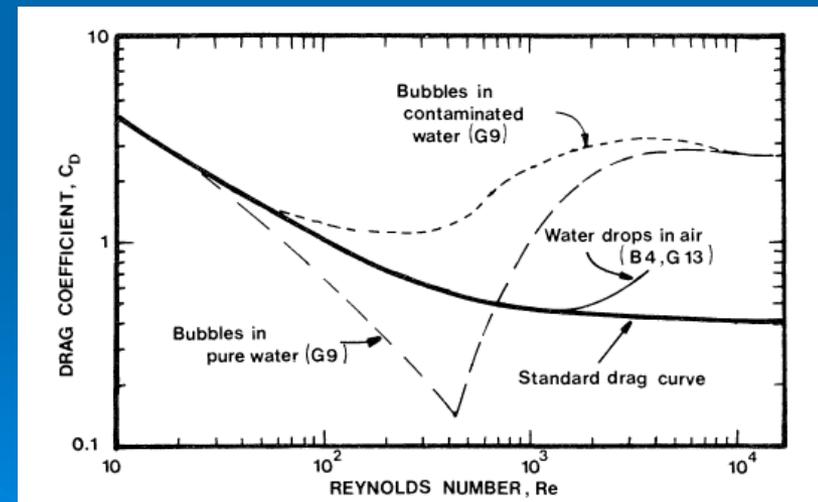
Клифт, Грейс:

Surface-active contaminants affect the rise velocity most strongly in the ellipsoidal range.



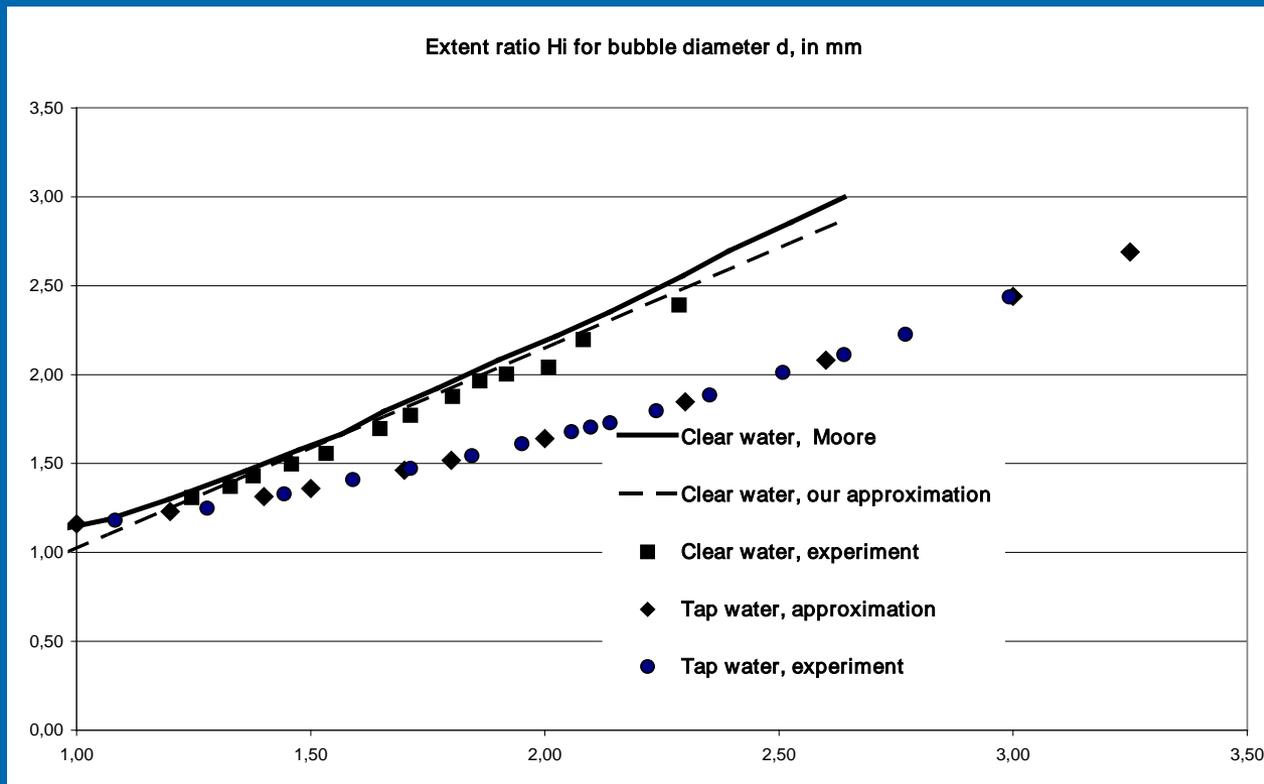
Водопроводная вода: ▲

Фильтрованная вода: ◆ ★ ○ □



Dominique Legendre, Roberto Zenit and J. Rodrigo Velez-Cordero. On the deformation of gas bubbles in liquids //Physics of fluids, Vol 24. 2012. P.043303(1-12).

Clift R., Grace J.R., Weber M.E. Bubbles, Drops and particles. Academic Press. 1978. P.1-380.



Формулы теории Мура для коэффициента сопротивления

Для сплюснутого эллипсоида формула Мура

$$C_D = \frac{48}{Re} G(\chi) \cdot \left(1 + \frac{H(\chi)}{\sqrt{Re}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right) \right),$$

где χ - аспектное соотношение, G и H - известные функции:

$$G(\chi) = \frac{1}{3} \chi^{\frac{1}{2}} (\chi^2 - 1)^{\frac{3}{2}} [(\chi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} - (2 - \chi^2) \sec^{-1} \chi] / [\chi^2 \sec^{-1} \chi - (\chi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]^2.$$

Согласие результатов Мура и эксперимента для чистой воды получено хорошее.

Для $H(\chi)$ используют аппроксимацию:

$$H(\chi) = 2.2 \left(\frac{\chi^2 - 1}{3.7} - 1 \right) \frac{1.4(\chi^2 - 1) + 4}{1.1(\chi^2 - 1) + 4}.$$

Отметим здесь достаточно хорошо измеренные значения для эквивалентного диаметра пузыря 2 мм в чистой воде (данные de Vries).

Данные де Вриза, полученные из обработки экспериментов в случае воздушного пузырька радиусом $R = 1.01$ мм, поднимающегося в воде:

$$x(t) = 3.39 + 0.42 \sin(33.0t - 1.07),$$

$$y(t) = 3.86 + 0.32 \sin(32.5t + 0.62),$$

$$z(t) = -0.32 + 0.02 \sin(54.2t + 1.44) + 31.3t$$

Здесь координаты в см, время в секундах

Сравнение данных для пузырей (“чистая вода”)

Диаметр пузыря, D	Диаметр спирали, мм	Угловая частота, 1/с	Число Рейнольдса, Re
Эксперимент, 2 мм	7.4	33	641
Теория, 2 мм	8.58	33	632
Эксперимент, 2мм	2-3.7	34.5	1018
Теория, 3.6 мм	3	39	1127

Приведем также данные для диаметра 3.6 мм (Christian Veldhuis):

TABLE I. Overview of experiments in clean water.

Subfigure	D_{eq} (mm)	χ	f_{path} (Hz)	Re	Path
(a)	3.0	2.2	6.7	899	Zigzag
(b)	3.4	2.2	7.0	973	Zigzag
(c)	3.6	2.3	5.5	1018	Spiral
(d)	4.0	2.4	6.5	1096	Flattened spiral
(e)	4.5	2.7	6.5	1162	Tilted flattened spiral
(f)	5.2	2.8	5.2	1305	Chaotic

Заключение

Предложено объяснение механизма формирования вихрей за пузырем.

Предложено объяснение характера траектории пузыря. Показана связь с движением присоединенных вихрей.

Разработана модель для определения траектории движения пузыря:

- 12 алгебраических уравнений
- одно эмпирическое число в выражении для подъемной силы
- один входной параметр – радиус пузыря

Данную модель можно использовать для тестирования расчетов движения пузырей на основе трехмерных гидродинамических программ.

Спасибо за внимание