ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ПРЕДОСТАВЛЕНИЯ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Баутин С.П., Габдулхаев В.Ф., Замыслов В.Е., Зорина О.Д., Козлов П.А., Скачков П.П.

Полная система уравнений Навье–Стокса:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\delta}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\delta - \delta\,\mathrm{div}\mathbf{V} = 0,\\[2mm]
\dfrac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \dfrac{1}{\gamma}\delta\nabla p = \mu_0\delta\left[\dfrac{1}{4}\nabla\left(\mathrm{div}\mathbf{V}\right) + \dfrac{3}{4}\Delta\mathbf{V}\right],\\[2mm]
\dfrac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla p + \gamma p\,\mathrm{div}\mathbf{V} = \varkappa_0\Delta(\delta p) + \Phi\left(\mu_0,\mathbf{V}\right).
\end{cases}
$$

$$
\Phi\left(\mu_0,\mathbf{V}\right) = \mu_0\gamma(\gamma-1)\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)^2\right] + \right.
$$

$$
\left. + \frac{3}{4}\left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\},
$$

$\mu_0 = \mathrm{const}$, $\varkappa_0 = \mathrm{const}$, $\delta = 1/\rho$ – удельный объем, $p = \rho T$, $e = T$.

Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск, Наука. 2009, 368 с.

Титов С.С. Пространственно-периодические решения полной системы Навье–Стокса // Доклады АН. 1999.

Одномерная начально-краевая задача

$$\begin{cases} \delta_t = \delta u_x - u\delta_x, \\ u_t = -uu_x - \dfrac{1}{\gamma}\delta p_x + \mu_0 \delta u_{xx}, \\ p_t = -up_x - \gamma p u_x + \varkappa_0 (\delta p)_{xx} + \mu_0 \gamma(\gamma-1)u_x^2, \\ \delta|_{t=0} = \delta^o(x), \\ u|_{t=0} = u^o(x), \\ p|_{t=0} = p^o(x), \\ u|_{x=0,\, x=\pi} = 0, \quad T_x|_{x=0,\, x=\pi} = 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{cases} \tag{1}$$

Поставленная начально-краевая задача имеет единственное решение в L_2, а при дополнительных предположениях и в $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ (по x, t).

Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

Кажихов А.В. Избранные труды. Математическая гидродинамика. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики. 2008.

Вид решения и его построение

$$\delta(t,x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(t)\cos kx, \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin kx,$$
$$p(t,x) = 1 + p_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\cos kx, \qquad (2)$$

Начальные данные:

$$\delta(t,x)|_{t=0} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k(0)\cos kx, \quad u(t,x)|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\sin kx,$$
$$p(t,x)|_{t=0} = 1 + p_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(0)\cos kx, \qquad (3)$$

Для представлений (2) при $x = 0$ и $x = \pi$ выполняются условия прилипания и теплоизоляции.

Сходимость представлений (2) доказана: Титов С.С., Курмаева К.В.

Представления (2) подставляются в систему (1) и каждое уравнение проецируется на свою систему базисных гармоник. Получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\delta'_\ell(t) = \ell u_\ell(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(ma_{km\ell} + kb_{km\ell}\right)\delta_k(t)u_m(t); \qquad (4)$$

$$u'_\ell(t) = -\frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty} mb_{k\ell m}u_k(t)u_m(t) + \frac{1}{\gamma}\ell p_\ell(t) +$$

$$+\frac{2}{\gamma\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty} mb_{m\ell k}\delta_k(t)p_m(t) - \mu_0\ell^2 u_\ell(t) - \qquad (5)$$

$$-\mu_0\frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty} m^2 b_{m\ell k}\delta_k(t)u_m(t);$$

$$p'_\ell(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty} (mb_{km\ell} - \gamma k a_{km\ell})\, u_k(t) p_m(t) - \gamma[1+p_0(t)]\ell u_\ell(t) -$$

$$-\varkappa_0 \ell^2\{[1+p_0(t)]\delta_\ell(t) + p_\ell(t)\} -$$

$$-\varkappa_0 \frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty}[(m^2+k^2)a_{km\ell} - 2kmb_{km\ell}]\delta_k(t)p_m(t) + \qquad (6)$$

$$+\mu_0\gamma(\gamma-1)\frac{2}{\pi}\sum_{k,m=1}^{\infty} km\, a_{km\ell} u_k(t) u_m(t);$$

$$p'_0(t) = \frac{1}{2}(1-\gamma)\sum_{k=1}^{\infty} k u_k(t) p_k(t) + \frac{1}{2}\mu_0\gamma(\gamma-1)\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k^2(t); \qquad (7)$$

$$a_{k,m,\ell} = \int_0^\pi \cos(kx)\cos(mx)\cos(\ell x)\,dx; \quad b_{k,m,\ell} = \int_0^\pi \sin(kx)\sin(mx)\cos(\ell x)\,dx.$$

Теоремы о кратных частотах

Первая теорема о кратных частотах. Если начальные данные содержат гармонику с частотой ℓ_1, то в решении присутствуют гармоники по пространственной переменной только с частотами, кратными ℓ_1: $\ell_1, 2\ell_1, 3\ell_1, \ldots$

Вторая теорема о кратных частотах. Если начальные данные содержат гармоники с частотами $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, то в решении присутствуют гармоники по пространственной переменной только с частотами, кратными d: $d, 2d, 3d, \ldots$

Здесь

$$\boxed{d = \text{НОД}(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n).}$$

Теоремы доказаны для бесконечной системы (4)–(7).

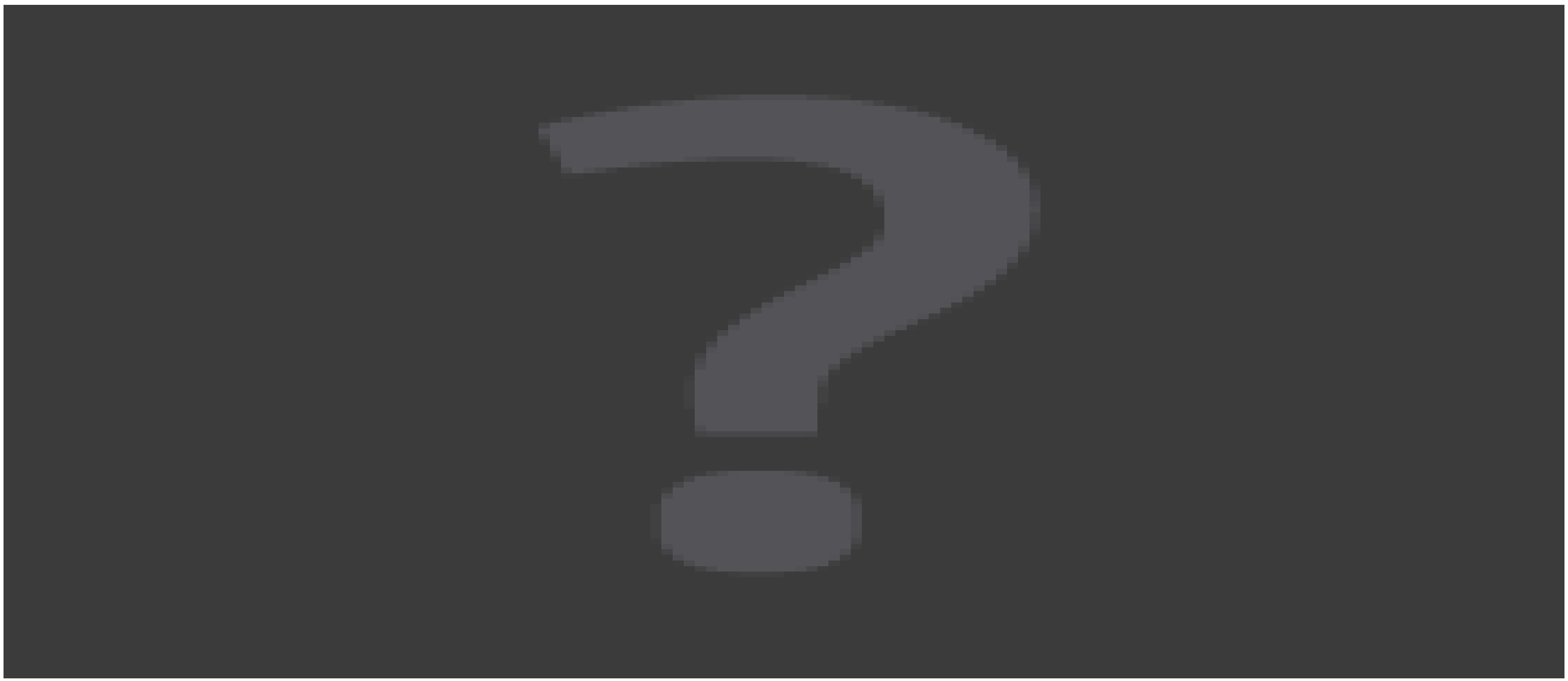
[8] Замыслов В.Е. Стоячие волны как решения полной системы уравнений Навье–Стокса в одномерном случае // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, №2. С. 33-45

Теоремы передоказаны Титовым С.С. и Курмаевой К.В.

Следствия теорем о кратных частотах:

$$\ell_1 = d = 5$$

Появление частот $\ell_2 = 10, \ell_2 = 15, \ell_2 = 20, \ldots$



Теорема о кратных частотах в трехмерном случае

Вид решения

$$\delta(t,x_1,x_2,x_3) = 1 + \delta_0(t) + \delta_1(t,x_1) + \delta_2(t,x_2) + \delta_3(t,x_3),$$

$$u(t,x_1,x_2,x_3) = u_1(t,x_1) + u_2(t,x_2) + u_3(t,x_3),$$

$$u(t,x_1,x_2,x_3) = v_1(t,x_1) + v_2(t,x_2) + v_3(t,x_3),$$

$$u(t,x_1,x_2,x_3) = w_1(t,x_1) + w_2(t,x_2) + w_3(t,x_3),$$

$$p(t,x_1,x_2,x_3) = 1 + p_0(t) + p_1(t,x_1) + p_2(t,x_2) + p_3(t,x_3)$$

Погодин Ю.А., Сучков В.А., Яненко Н.Н. О бегущих волнах уравнений газовой динамики // ДАН СССР. Т. CXIX, вып 4. 1957.

Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.

Решение строится в следующем виде:

$$\begin{cases} \delta(t,x_1,x_2,x_3) = 1 + \delta_0(t) + \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_j(t,x_j), \\ u(t,x_1,x_2,x_3) = \sum\limits_{j=1}^{3} u_j(t,x_j), \\ v(t,x_1,x_2,x_3) = \sum\limits_{j=1}^{3} v_j(t,x_j), \\ w(t,x_1,x_2,x_3) = \sum\limits_{j=1}^{3} w_j(t,x_j), \\ p(t,x_1,x_2,x_3) = 1 + p_0(t) + \sum\limits_{j=1}^{3} p_j(t,x_j) \end{cases} \qquad (2)$$

$$f_j(t,x_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{j,k,1}(t)\cos(kx_j)+f_{j,k,2}(t)\sin(kx_j)\right];$$

f: δ, u, v, w, p; первый индекс $j = 1, 2, 3$ – номер пространственной переменной;

второй индекс – частота гармоники;

Результат проецирования первого уравнения системы (1)

$$\delta_0'(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k\Big\{ -u_{1k1}(t)\delta_{1k2}(t) + u_{1k2}(t)\delta_{1k1}(t) -$$

$$-v_{2k1}(t)\delta_{2k2}(t) + v_{2k2}(t)\delta_{2k1}(t) - w_{3k1}(t)\delta_{3k2}(t) + w_{3k2}(t)\delta_{3k1}(t) +$$

$$+\delta_{1k1}(t)u_{1k2}(t) - \delta_{1k2}(t)u_{1k1}(t)\delta_{1k1}(t) + \delta_{2k1}(t)v_{2k2}(t) - \delta_{2k2}(t)v_{2k1}(t) +$$

$$+\delta_{3k1}(t)w_{3k2}(t) - \delta_{3k2}(t)w_{3k1}(t)\Big\};$$

$$\delta_{1\ell1}'(t) = [1+\delta_0(t)]\ell u_{1\ell2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[-a_{km\ell}u_{1k1}(t)\delta_{1m2}(t) +$$

$$+b_{km\ell}u_{1k2}(t)\delta_{1m1}(t) + a_{km\ell}\delta_{1k1}(t)u_{1m2}(t) - b_{km\ell}\delta_{1k2}(t)u_{1m1}(t)\Big];$$

$$\delta_{1\ell2}'(t) = -[1+\delta_0(t)]\ell u_{1\ell1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[b_{m\ell k}u_{1k1}(t)\delta_{1m1}(t) -$$

$$-b_{k\ell m}u_{1k2}(t)\delta_{1m2}(t) - b_{m\ell k}\delta_{1k1}(t)u_{1m1}(t) + b_{k\ell m}\delta_{1k2}(t)u_{1m2}(t)\Big];$$

$$\delta'_{2\ell 1}(t) = [1+\delta_0(t)]\ell v_{2\ell 2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[-a_{km\ell}v_{2k1}(t)\delta_{2m2}(t)+$$
$$+b_{km\ell}v_{2k2}(t)\delta_{2m1}(t) + a_{km\ell}\delta_{2k1}(t)v_{2m2}(t) - b_{km\ell}\delta_{2k2}(t)v_{2m1}(t)\Big];$$
$$\delta'_{2\ell 2}(t) = -[1+\delta_0(t)]\ell v_{2\ell 1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[b_{m\ell k}v_{2k1}(t)\delta_{2m1}(t)-$$
$$-b_{k\ell m}v_{2k1}(t)\delta_{2m1}(t) - b_{m\ell k}\delta_{2k1}(t)v_{2m1}(t) + b_{k\ell m}\delta_{2k2}(t)v_{2m2}(t)\Big];$$

$$\delta'_{3\ell 1}(t) = [1+\delta_0(t)]\ell w_{3\ell 2}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[-a_{km\ell}w_{3k1}(t)\delta_{3m2}(t)+$$
$$+b_{km\ell}w_{3k2}(t)\delta_{3m1}(t) + a_{km\ell}\delta_{3k1}(t)w_{3m2}(t) - b_{km\ell}\delta_{3k2}(t)w_{3m1}(t)\Big];$$
$$\delta'_{3\ell 2}(t) = -[1+\delta_0(t)]\ell w_{3\ell 1}(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m\Big[b_{m\ell k}w_{3k1}(t)\delta_{3m1}(t)-$$
$$-b_{k\ell m}w_{3k2}(t)\delta_{3m2}(t) - b_{m\ell k}\delta_{3k1}(t)w_{3m1}(t) + b_{k\ell m}\delta_{3k2}(t)w_{3m2}(t)\Big].$$

Теорема о кратных частотах. *Пусть заданы три набора целых положительных чисел и их наибольшие делители:*

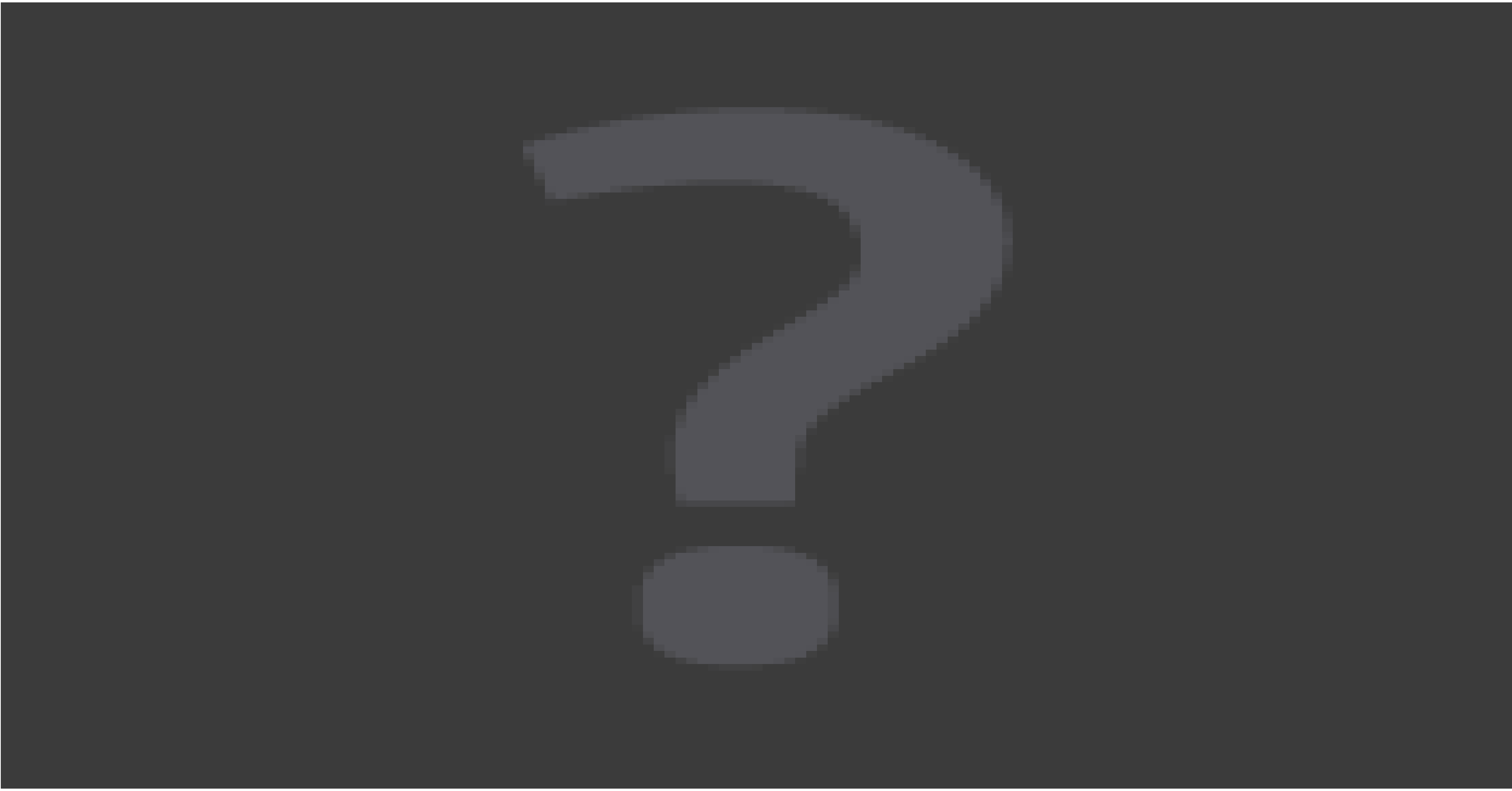
$$d_1 = НОД(\ell_0, ..., \ell_L); \;\; d_2 = НОД(m_0, ..., m_M); \;\; d_3 = НОД(n_0, ..., n_N).$$

Пусть при $t = 0$ начальные данные (3) содержат конечное число гармоник. Причем гармоники, зависящие от x_1, имеют частоты $\ell_0, ..., \ell_L$; зависящие от x_2 — частоты $m_0, ..., m_M$; зависящие от x_3 — частоты $n_0, ..., n_N$. Тогда в решении бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений все коэффициенты $f_{i\ell j}(t)$, у которых второй индекс ℓ не кратен числу d_i, будут тождественными нулями.

Теорема говорит о том, что в решении, представленном в виде (2) и содержащим в начальный момент времени только конечное число гармоник, при $t > 0$ могут присутствовать гармоники от x_i только с частотами, кратными d_i, $i = 1, 2, 3$.

Разделение частот по направлениям: разделив в начальных условиях пространственные переменные, получили, что в решении частоты гармоник оказались также разделенными по пространственным переменным.

Смысл теоремы



Замечание 1. Теорема справедлива и для системы уравнений газовой динамики, которая получается из системы (1), если в ней положить $\mu_0 = \varkappa_0 = 0$.

Замечание 2. Из теоремы следует, что решения вида (2) не обладают свойством «удвоения частот», которое иногда предполагают в течениях вязкой сплошной среды.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.

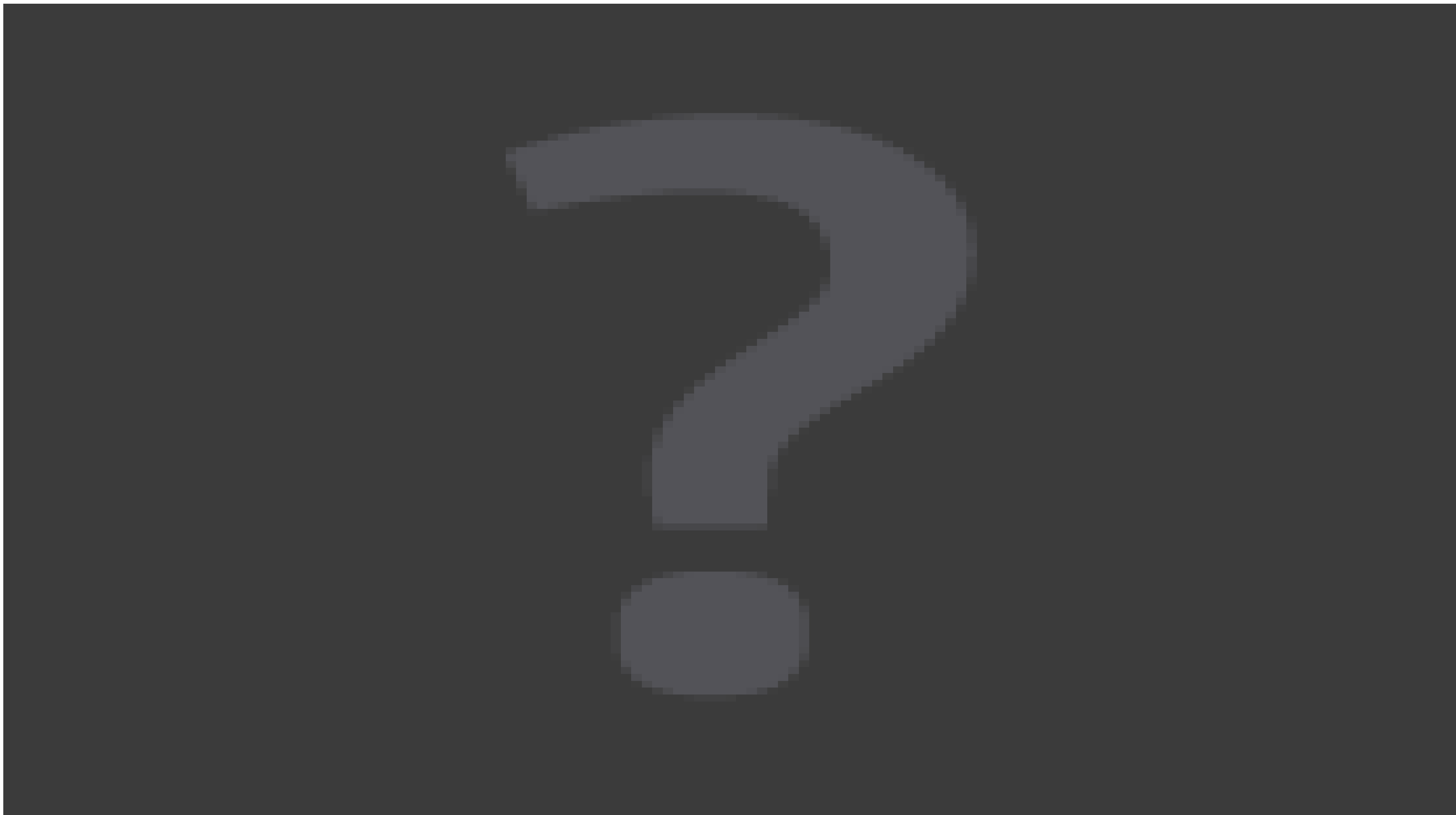
Замечание 3. Как природное явление давно известен факт, что при возбуждении гармоник с одними частотами, с течением времени фиксируются и новые гармоники, значения частот которых полностью согласуются с данной теоремой и аналогичными теоремами в одномерном случае.

Алдошина И., Приттс Р. Музыкальная акустика. С.-П.: «Композитор», 2006.

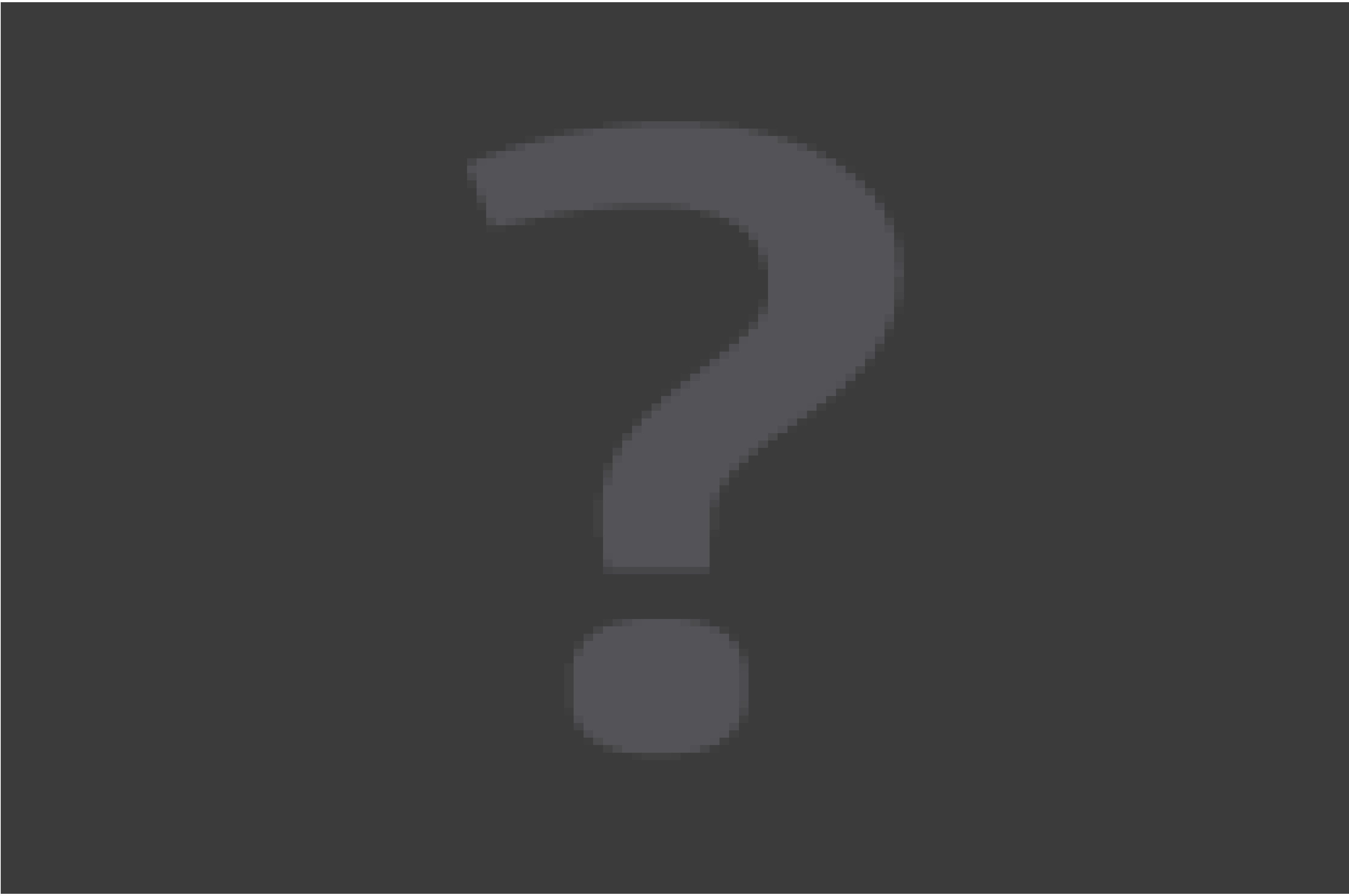
Замечание 4. Авторам приведенной теоремы неизвестны работы, в которых хотя бы для формальных решений конкретных нелинейных уравнений с частными производными был бы доказан факт, соответствующий теоремам о кратных частотах.

Сопоставление случая $\mu_0 \neq 0, \varkappa_0 \neq 0$ со случаем $\mu_0 = \varkappa_0 = 0$

$\mu_0 \neq 0, \varkappa_0 \neq 0$



$\mu_0 = \varkappa_0 = 0$



Заключение

1. С помощью бесконечных тригонометрических рядов приближенно построены нестационарные решения полной системы уравнений Навье–Стокса.

2. Доказаны теоремы о кратных частотах и тем самым установлен факт перераспределения начальных возмущений с одних гармоник на другие и дано математическое обоснование правил образования обертонов.

3. Установлена алгебраическая структура множества кратных частот.

4. Соответствующими вычислительными приемами подтверждено, что построенные в случае относительно небольших начальных данных приближенные решения с достаточной точностью передают одномерные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

5. Приведены примеры достаточно нетривиальных решений.

6. Предложенный подход позволяет получать решения на достаточно больших промежутках времени, в том числе, когда течение практически стабилизируется — в данном случае к однородному покою. Расчеты показали, что время стабилизации потока — порядка $1/\mu_0$.

Спасибо за внимание !

E-mail: SBautin@usurt.ru