



Совершенствование алгоритма расчёта смешанных ячеек и разрушения в методике ГРАД

Докладчик: Шатов М.М.

Снежинск - 2017



Методика ГРАД

ГРАД^{1 2} использует явную схему типа "крест" скорости отнесены к узлам сетки, тензор напряжений и другие величины – к центрам ячеек.

M – масса;

ρ – плотность;

v – объём;

A – площадь поверхности v ;

u^* – скорость v ;

u – скорость вещества;

\mathbf{S}, \mathbf{e} – тензоры напряжений, деформаций;

E – удельная внутренняя энергия.

$$\frac{dM}{dt} = \int_A \rho(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}.$$

$$\frac{dK}{dt} = \int_v \nabla \cdot \Sigma dv + \int_A \rho \mathbf{u}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}.$$

$$\frac{dU}{dt} = \int_v \Sigma \cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} dv + \int_A \rho E(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}.$$

1. А.А. Брагин, В.А. Сучков, А.С. Шнитко. Методика и комплекс программ ГРАД для решения нестационарных задач механики сплошной среды. Тезисы докладов. Конференция пяти лабораторий по вычислительной математике. Вена, 19-23 июня 2005 г.

2. V.A. Suchkov, A.S. Shnitko. Technique and Set of Programm GRAD for Solution of Nonstationary Problems of Continua Mechanics. Third Joint Conference on Computational Mathematics. Los Alamos, NM, USA, January 23-27, 1995.



Решаемые задачи

Задача №1. Требуется определить тензор напряжений «смешанной» ячейки, зная тензор деформации ячейки, уравнения состояния, модели пластичности и разрушения веществ, попавших в неё.

Задача №2. Требуется определить тензор напряжений в поврежденной (пористой) среде.

Задача №3. Требуется определить тензор напряжений в трещиноватой среде.

Задача №4. Требуется решить задачу об адвекции дискретных величин (флаг разрушения, флаг фронта и пр.).



Подходы к решению задач

«Смешанные» ячейки	Пористые тела	Разрушение, трещиноватость
Сучков В.А., Бахрах С.М., Янилкин Ю.В., Делов В.И., Колобянин В.Ю., Гончаров Е.А., Бондаренко Ю.А., Краюхин А.А., Камм J.R., Tipton R.	Быченков В.А., Куропатенко В.Ф. Вархамеев Ю.С., Трунин И.Р., Нигматулин Р.И., Глушак Б.Л., Новиков С.А., Подурец М.А., Маркелов В.Н Садовой А.А., Федотов А.Ф., Carroll M.M., Holt A.C, Curran D.R.	Глушак Б.Л., Новиков С.А., Куропатенко В.Ф., Канель Г.И., Маркелов В.Н. Быченков В.А., Лепов В.В., Алымов В.Т., Ларионов В.П Маслов В.М., Пирогов С.А. Герасимов А.В., Пашков С.В., Curran D.R.

Везде используется модель нескольких континуумов: смесь веществ, смесь пустот и сплошного вещества. Постулируется связь тензора напряжений смеси с тензорами напряжений её составляющих.

Задача: обобщить широкий круг известных многоконтинуальных моделей на случай пористости, разрушения и смешанных ячеек.



Базовая модель смеси

Фракция – составляющая смеси;

Смесь – совокупность k континуумов, каждый из которых связан с фракцией и занимает объём смеси.

Предположения:

- Гетерогенная смесь, односкоростное приближение;
- Аддитивность внутренних энергий (процессами на границах пренебрегаем);
- Массовые или объёмные силы отсутствуют (тензор напряжений симметричен);
- Размеры фракций малы по сравнению со смесью и во много раз больше молекулярно-кинетических расстояний.

$$d\varepsilon = \sum_i \beta_i d\varepsilon_i,$$

$d\varepsilon$ - приращение деформации; β_i - объёмная концентрация.



Взаимодействие фракций

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{21} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{33} \end{pmatrix} = (\Sigma); \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = (\varepsilon)$$

Требуется определить **приращения деформаций фракций**, зная приращение деформации смеси и связи, накладываемые на векторы напряжений и деформаций фракций.

Связи задаются матрицами: $[A_\varepsilon](6 \times 6, \text{rank}=6)$ и $[A_\Sigma](n \times 6, \text{rank}=n)$.

n - количество условий на равенство напряжений; $0 \leq n \leq 6$.



Взаимодействие фракций

$$[A_\Sigma](\Sigma)_f = (\hat{\Sigma})_f; \quad [A_\varepsilon](d\varepsilon)_f = \begin{pmatrix} (\widehat{d\varepsilon}) \\ (\overline{d\varepsilon}) \end{pmatrix}_f; \quad [A_\varepsilon](d\varepsilon) = \begin{pmatrix} (\widehat{d\varepsilon}) \\ (\overline{d\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

Индекс « f » - фракция; величины с « \wedge » - **ИСКОМЫЕ**; с « $\overline{\quad}$ » - **ИЗВЕСТНЫЕ**.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{\Sigma})_f = (\hat{\Sigma}^*) \\ (\overline{d\varepsilon})_f = (\overline{d\varepsilon}) \\ \sum_f \beta_f (\widehat{d\varepsilon})_f = (\widehat{d\varepsilon}) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} (\widehat{d\Sigma})_1 \\ \vdots \\ (\widehat{d\Sigma})_f \\ (\widehat{d\varepsilon}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [C_{11} & C_{12}]_1 & \dots & [0 & 0] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ [0 & 0] & \dots & [C_{11} & C_{12}]_f \\ \beta_1 [E & 0] & \dots & \beta_f [E & 0] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\widehat{d\varepsilon})_1 \\ (\overline{d\varepsilon})_1 \\ \vdots \\ (\widehat{d\varepsilon})_f \\ (\overline{d\varepsilon})_f \end{pmatrix}$$

« $*$ » - равновесный вектор; $[C_{ij}]$ – подматрицы матрицы жёсткости

$$(\overline{d\varepsilon})_f = [G]_f(d\varepsilon);$$

$$\sum_f \beta_f [G]_f = [E];$$

$$(\Sigma) = \sum_f \beta_f [G]_f^T (\Sigma)_f; \quad [C] = \sum_f \beta_f [G]_f^T [C]_f [G]_f$$

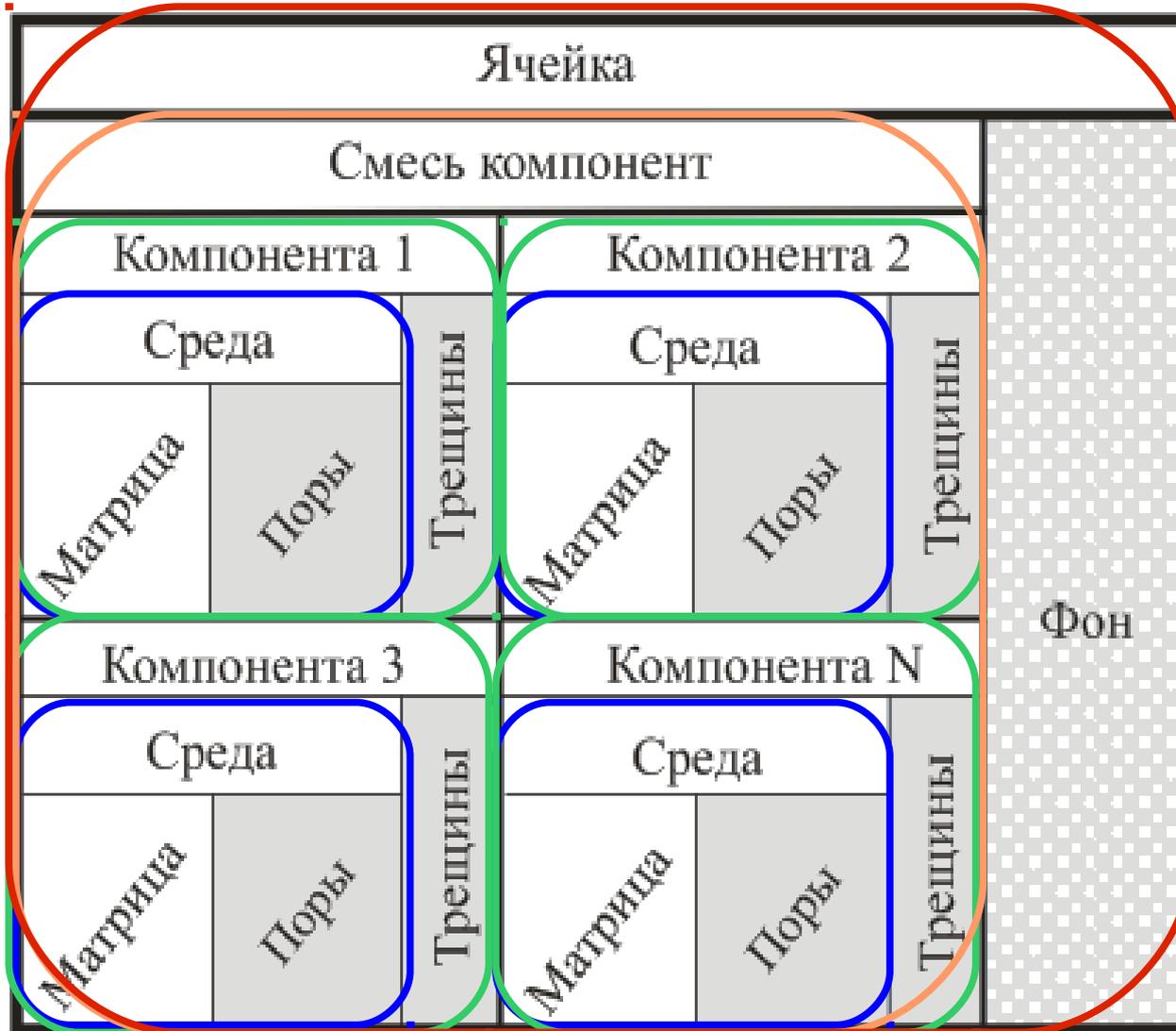


Модели взаимодействия

Модель взаимодействия	n	$[A_{\Sigma}]$	$[A_{\varepsilon}]$
Равенство скоростей деформации (равносжимаемость)	0	-	$[E]$
Равенство давлений / приращений давлений	1	$\frac{1}{3} [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$	$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
Равенство напряжений/ приращений напряжений	6	$[E]$	$[E]$
Равенство напряжений по направлению / приращений напряжений по направлению	3 или 5 или 6	$[[E] \ [0]],$ где $[E]$ – единичная матрица (n x n) $[0]$ нулевая подматрица (n x 6-n)	$[E]$



Многоуровневая структура ячейки



$$(\Sigma)_c = \beta_M [G]_M^T (\Sigma)_M;$$

$$[C]_c = \beta_M [G]_M^T [C]_M [G]_M;$$

$$(\Sigma)_k = \beta_c [G]_c^T (\Sigma)_c;$$

$$[C]_k = \beta_c [G]_c^T [C]_c [G]_c;$$

$$(\Sigma)_{ck} = \sum_k \beta_k [G]_k^T (\Sigma)_k;$$

$$[C]_{ck} = \sum_k \beta_k [G]_k^T [C]_k [G]_k;$$

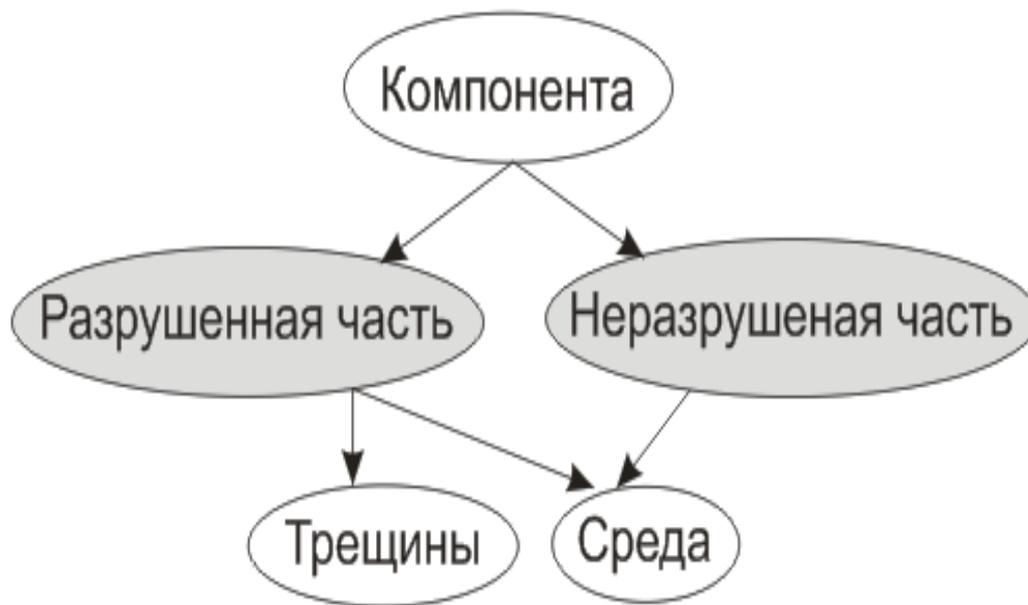
$$(\Sigma)_y = \beta_{ck} [G]_{ck}^T (\Sigma)_{ck};$$

$$[C]_y = \beta_{ck} [G]_{ck}^T [C]_{ck} [G]_{ck};$$



Разрушение

- Как правило, разрушение характеризуется дискретной меткой. Нельзя написать физический закон сохранения, нельзя интерполировать.
- Нет моделей смеси разрушенного и неразрушенного вещества.



Допущение модели:

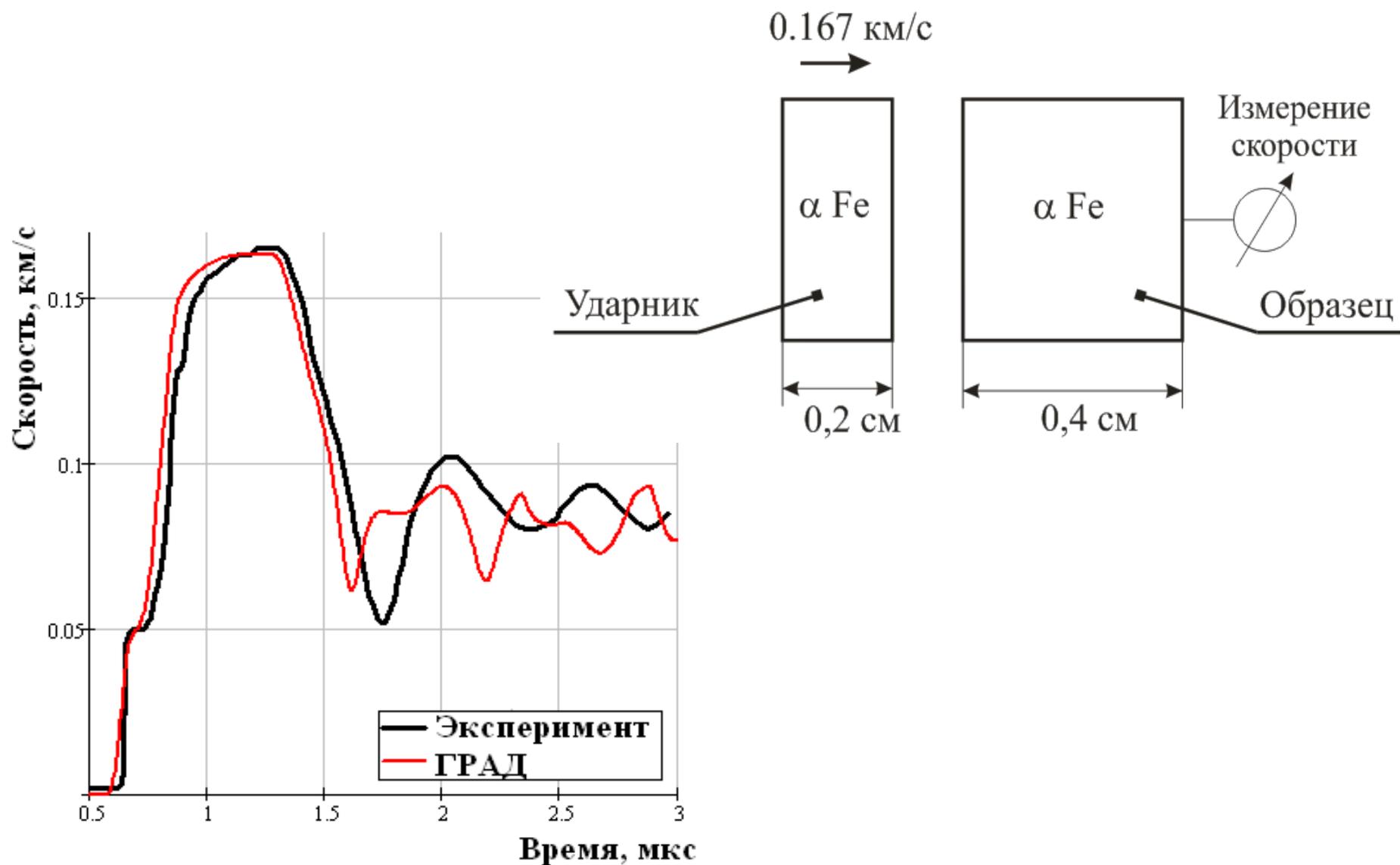
Тензор напряжений и плотность среды в разрушенном и неразрушенном состоянии одинаковые.

Разрушение характеризуется массовой концентрацией разрушенной части $\xi_K^{\text{разр}}$: $m_K^{\text{разр}} = m_c \xi_K^{\text{разр}}$

$$\beta_K^{\text{разр}} = 1 - \beta_c (1 - \xi_K^{\text{разр}}).$$



Тест. Соударение пластин

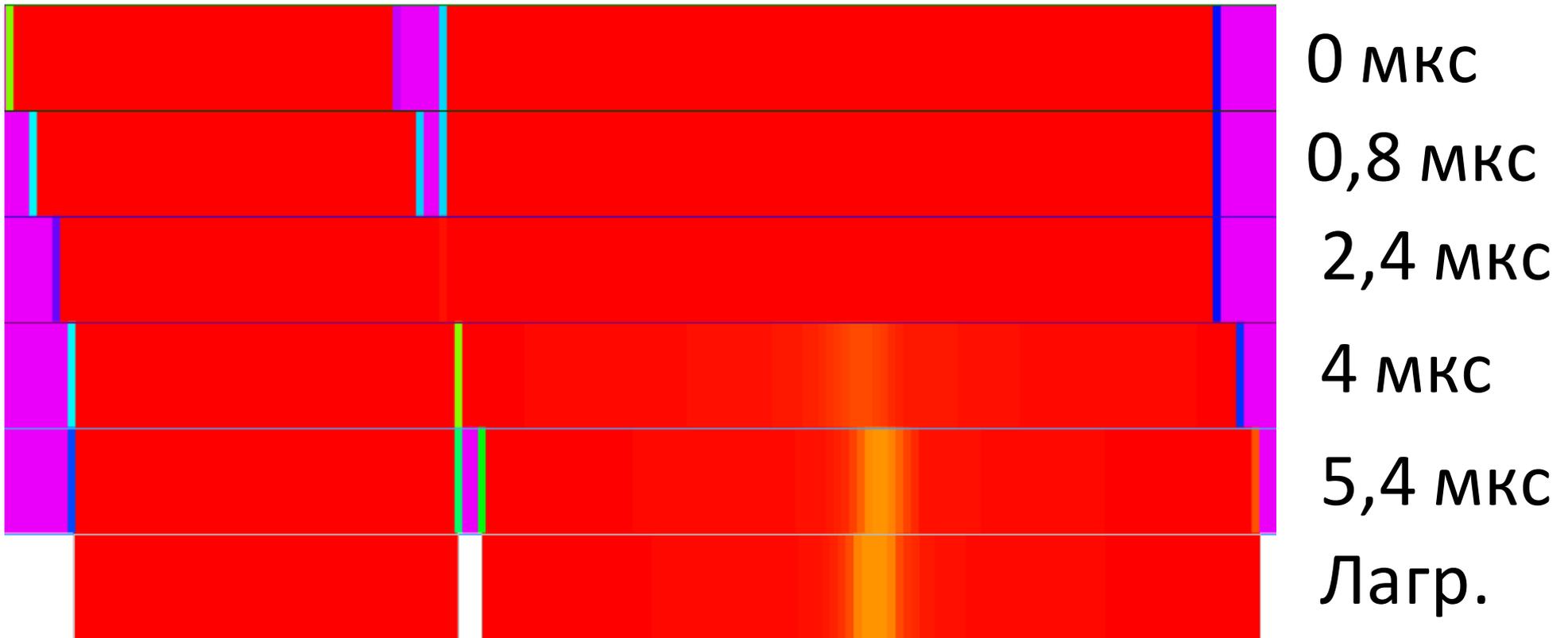




Тест. Соударение пластин

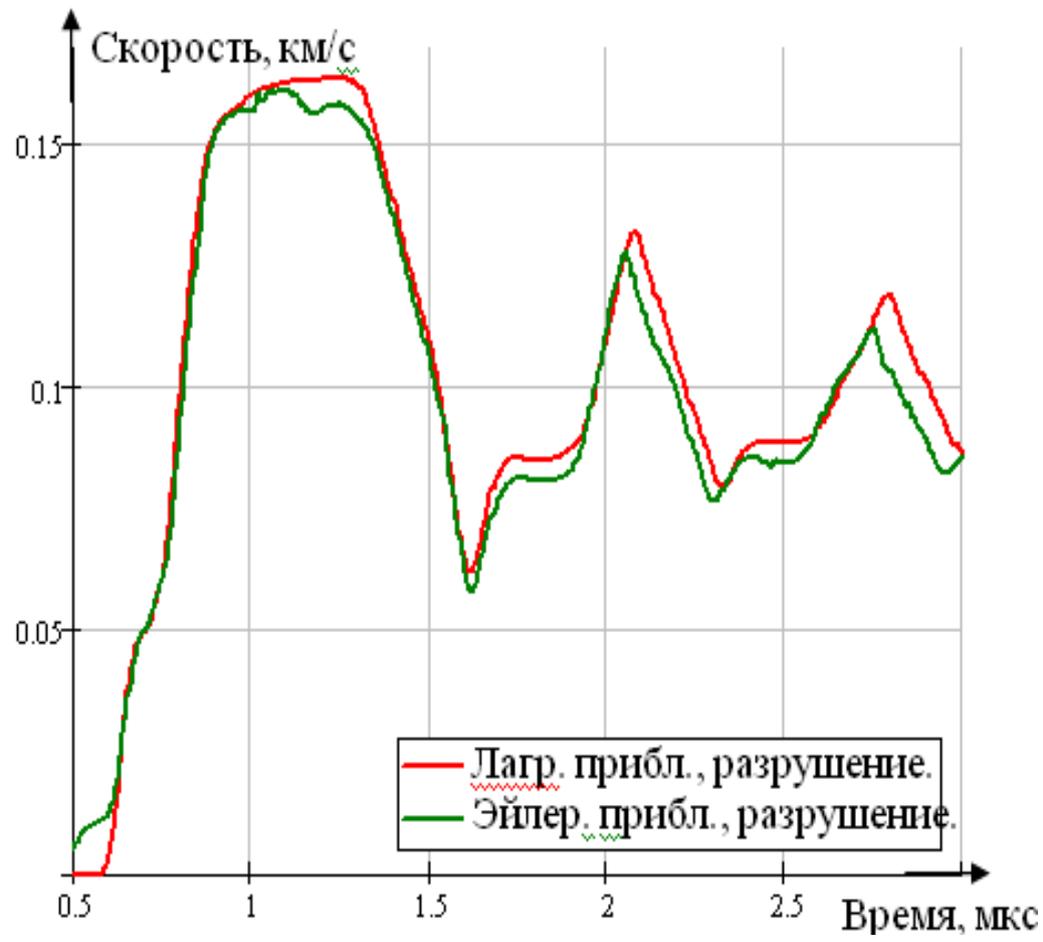
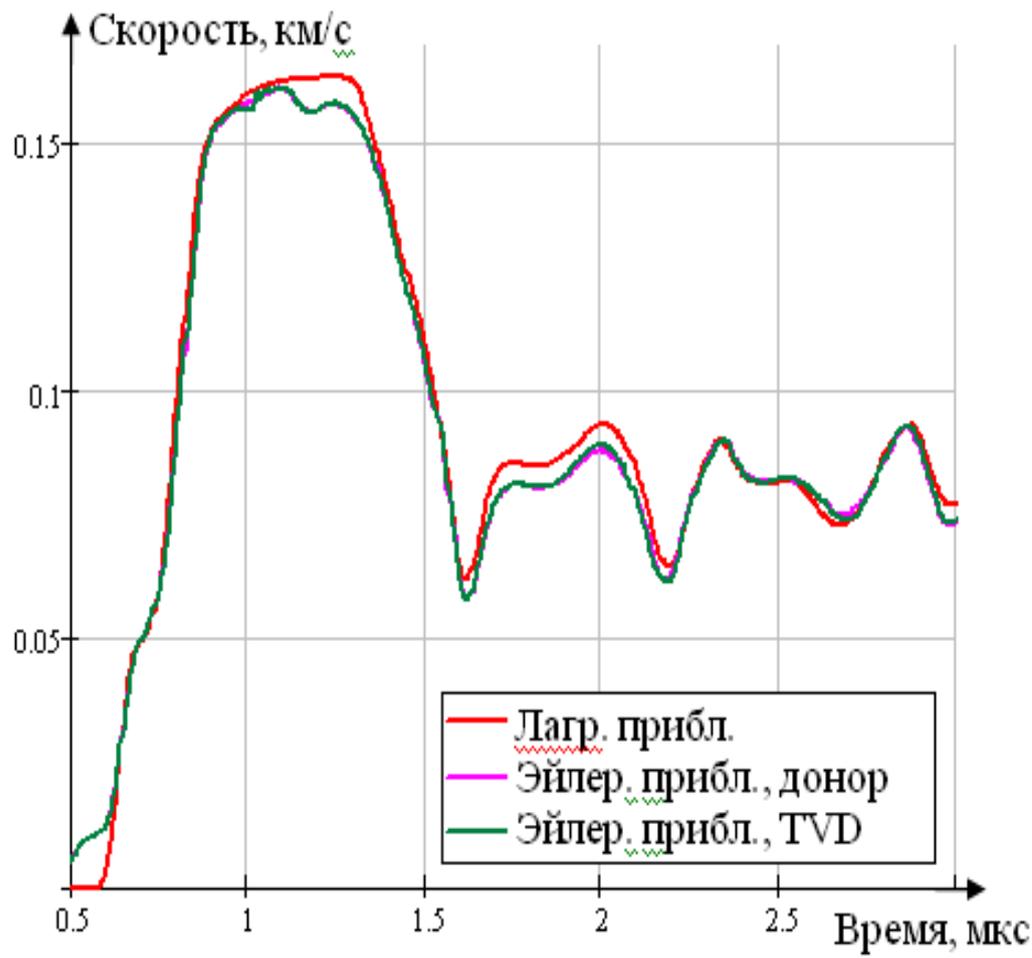
ударник

образец



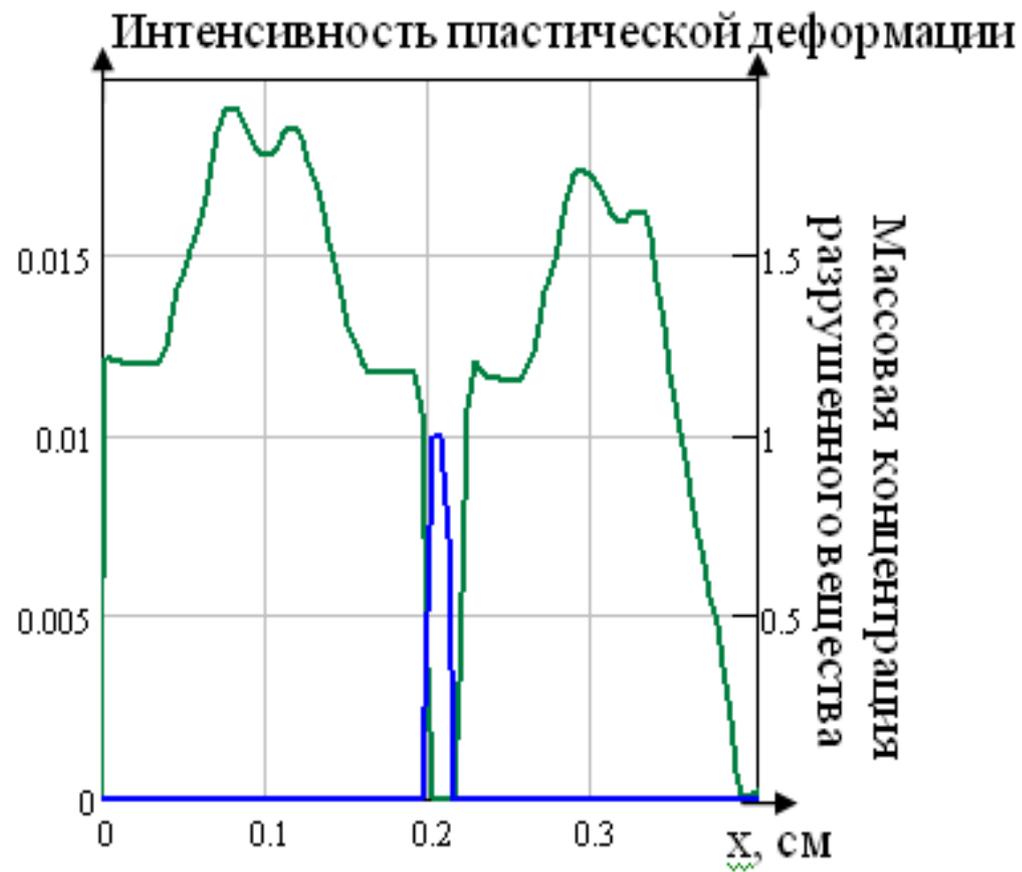
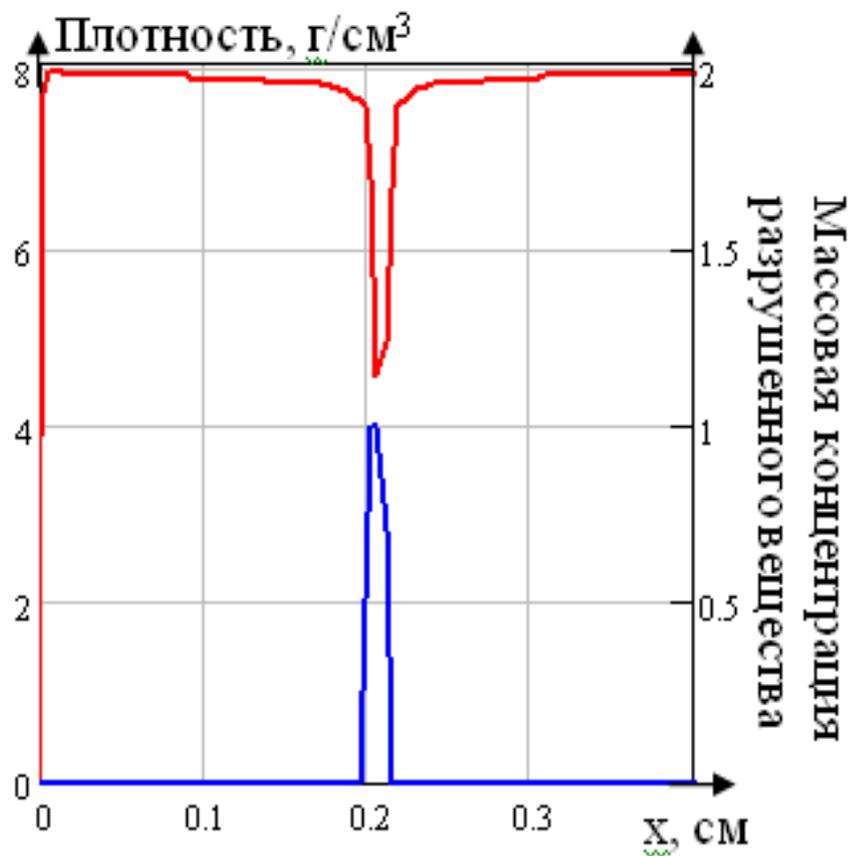


Тест. Соударение пластин





Тест. Соударение пластин



- Плотность
- Массовая концентрация разрушенного вещества
- Интенсивность пластической деформации



Заключение

- Была предложена базовая модель смеси, обобщающая широкий круг известных и перспективных односкоростных многоконтинуальных моделей.
- На основе базовой модели смеси построена модель пористой и трещиноватой среды, которая может применяться с разнообразными критериями разрушения и образования/залечивания пор.
- Предложена модель смеси разрушенного и неразрушенного состояния вещества. Выполняется закон сохранения массы в разрушенном состоянии. Введён признак счёта потоков величин истории с неразрушенной частью;
- Новые условия замыкания в смешанной ячейке (выравнивание напряжений по направлениям);
- В методе концентраций реализован отрыв контактных границ, под которым понимается появление в «смешанной» ячейке специального вещества – фона, ограничивающего растягивающие напряжения.