



В  
НИ  
И  
А

ПРЕДПРИЯТИЕ ГОСКОРПОРАЦИИ "РОСАТОМ"

ФГУП "ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ им. Н.Л.Духова"

# Математическое моделирование ударно-волновых процессов в двухфазных средах в широком диапазоне течений

А.А. Серёжкин, И.С. Меньшов

XIII Международная конференция  
"Забабахинские научные чтения"

Снежинск

23 марта 2017 г.

# Цели и задачи

*Цель исследования:*

- Построение математической модели для задач течения двухфазных гранулированных сред.
- Численное исследование задачи удара по насыпному слою твердых частиц с последующим разлетом твердой фазы в пространство, заполненное газом.

*Требование к математической модели:*

- Корректное описание процессов в двухфазной среде в полном диапазоне изменения объемной доли фаз, от режима сильно разреженных одиночных частиц до режима плотной упаковки.

*Основные положения континуальной модели:*

- Гетерогенная среда состоит из двух фаз: твердые гранулы (S) и газ (G).
- Количественное соотношение фаз определяется параметром объемной доли  $\varphi_S + \varphi_G = 1$
- Состояние каждой фазы среды описывается набором параметров: плотности, скорости, давления и внутренней энергии  $u_{S,G}, P_{S,G}, \rho_{S,G}, e_{S,G}$
- Параметры состояния фаз связаны между собой уравнениями состояния:

$$e_S = e_S(P_S, \rho_S) \quad e_G = e_G(P_G, \rho_G)$$

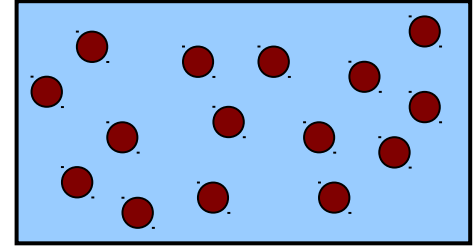
- Режим течения среды определяется объемной долей твердой фазы

# Обзор существующих моделей двухфазных дисперсных сред

## 1. Модель (режим) облака частиц

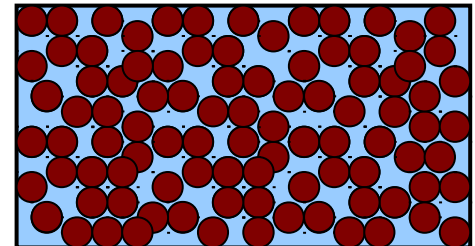
$$\varphi_S \leq \varphi_S^* \quad P_S = P_G$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi_S \rho_S \\ \varphi_S \rho_S u_S \\ \varphi_G \rho_G \\ \varphi_G \rho_G u_G \\ \varphi_G \rho_G E_G \end{pmatrix} + \nabla \begin{pmatrix} \varphi_S \rho_S u_S \\ \varphi_S \rho_S u_S^2 + \varphi_S P_G \\ \varphi_G \rho_G u_G \\ \varphi_G \rho_G u_G^2 + \varphi_G P_G \\ \varphi_G \rho_G u_G E_G + \varphi_G u_G P_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P_G \\ 0 \\ P_G \\ 0 \end{pmatrix} \nabla \varphi_G + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_G \end{pmatrix} \nabla (\varphi_G u_S)$$



## 2. Режим твердого скелетона (M. Baer and J. Nunziato Int. J. Multiph. Flow 12 1986)

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi_S \rho_S \\ \varphi_S \rho_S u_S \\ \varphi_S \rho_S E_S \\ \rho_S \\ \varphi_G \rho_G \\ \varphi_G \rho_G u_G \\ \varphi_G \rho_G E_G \end{pmatrix} + \nabla \begin{pmatrix} \varphi_S \rho_S u_S \\ \varphi_S \rho_S u_S^2 + \varphi_S P_S \\ \varphi_S \rho_S u_S E_S + \varphi_S u_S P_S \\ \rho_S u_S \\ \varphi_G \rho_G u_G \\ \varphi_G \rho_G u_G^2 + \varphi_G P_G \\ \varphi_G \rho_G u_G E_G + \varphi_G u_G P_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P_G \\ -P_G u_S \\ 0 \\ 0 \\ P_G \\ P_G u_S \end{pmatrix} \nabla \varphi_G \quad \varphi_S > \varphi_S^*$$



$$E_S = e_S + \frac{u_S^2}{2} \quad E_G = e_G + \frac{u_G^2}{2}$$

Цель: Построение универсальной математической модели, которая сопрягала бы две модели и позволяла единым образом описать динамику двухфазной гетерогенной гранулированной среды при больших изменениях объемной доли твердой фазы.

# Модель двухфазной среды

**Законы сохранения консервативных параметров фаз.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S + \nabla(\varphi_S \rho_S u_S) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S u_S + \nabla(\varphi_S \rho_S u_S u_S) + \nabla(\varphi_S P_S) = P_I \nabla \varphi_S + K(u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S E_S + \nabla(\varphi_S \rho_S E_S u_S) + \nabla(\varphi_S P_S u_S) = P_I u_S \nabla \varphi_S + A_{def} + K u_I (u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G + \nabla(\varphi_G \rho_G u_G) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G u_G + \nabla(\varphi_G \rho_G u_G u_G) + \nabla(\varphi_G P_G) = -P_I \nabla \varphi_S - K(u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G E_G + \nabla(\varphi_G \rho_G E_G u_G) + \nabla(\varphi_G P_G u_G) = -P_I u_S \nabla \varphi_S - A_{def} - K u_I (u_S - u_G) \end{array} \right.$$

**Работа по изменению объемной доли твердой фазы.**

$$A_{def} = -P_I \frac{d_S \varphi_S}{dt} + \lambda_S \nabla u_S + \lambda_G \nabla u_G$$

**Замыкающие соотношения необходимы для следующих параметров модели:**

$\varphi_S, \varphi_G$  - объемные доли фаз.

$P_I$  - давление на межфазной границе.

$u_I$  - скорость на межфазной границе.

$\lambda_S, \lambda_G$  - параметры модели.

---

$$\frac{d_S \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + u_S \nabla \bullet \quad \frac{d_G \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + u_G \nabla \bullet \quad - \text{субстанциональные производные.}$$

# Модель двухфазной среды

Замыкающие соотношения как следствия энтропийного неравенства  
(в форме Р. И. Нигматулина\*):

$$\varphi_S \rho_S \frac{d_S S_S}{dt} + \varphi_G \rho_G \frac{d_G S_G}{dt} \geq 0$$

Достаточные условия выполнения энтропийного неравенства:

$$1) \frac{d_G P_G}{dt} + (\rho_G C_G^2 + \lambda_G A) \nabla u_G = - \frac{P_G - P_{IG}}{\tau_G T_G}$$

$$A = \frac{(T_G - T_S)(\varphi_G \rho_S C_S^2 + \varphi_S \rho_G C_G^2) + (\varphi_G \Gamma_S T_S + \varphi_S \Gamma_G T_G)(P_S - P_G)}{\varphi_S \varphi_G ((P_S - P_I) T_G - (P_G - P_I) T_S)}$$

$$2) \frac{d_S P_S}{dt} + (\rho_S C_S^2 - \lambda_S A) \nabla u_S = - \frac{P_S - P_{IS}}{\tau_S T_S}$$

$$3) u_I = \frac{\varphi_G \Gamma_S u_S + \varphi_S \Gamma_G u_G}{\varphi_G \Gamma_S + \varphi_S \Gamma_G}$$

4) Величина давления на межфазной границе - корень квадратного уравнения на отрезке  $[\min(P_S, P_G), \max(P_S, P_G)]$

$$: \varphi_S \rho_G C_{GI}^2 \left( \frac{P_S - P_I}{T_S} \right) + \varphi_G \rho_S C_{SI}^2 \left( \frac{P_G - P_I}{T_G} \right) = 0$$

$\Gamma$  - параметр Грюнайзена материала фазы.

$$C_{SI}^2 = \left( \frac{P_I}{\rho_S^2} - \frac{\partial e_S}{\partial \rho_S} \right) / \frac{\partial e_S}{\partial P_S}$$

$$C_{GI}^2 = \left( \frac{P_I}{\rho_G^2} - \frac{\partial e_G}{\partial \rho_G} \right) / \frac{\partial e_G}{\partial P_G}$$

\* Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.// Москва: Наука, 1978.

# Модель двухфазной среды

Следствие анализа уравнений живых сил для каждой фазы:

$$\begin{cases} \frac{d_s \varphi_s}{dt} \frac{\rho_s}{\varphi_s} C_{SI}^2 + \frac{d_s P_s}{dt} = -\rho_s C_s^2 \nabla u_s + \frac{\Gamma_s}{\varphi_s} (\lambda_s \nabla u_s + \lambda_G \nabla u_G) + \frac{\Gamma_s K}{\varphi_s} (u_I - u_s)(u_s - u_G) \\ \frac{d_s \varphi_s}{dt} \frac{\rho_G}{\varphi_G} C_{GI}^2 - \frac{d_G P_G}{dt} = \rho_G C_G^2 \nabla u_G + \frac{\Gamma_G}{\varphi_G} (\lambda_s \nabla u_s + \lambda_G \nabla u_G) + \frac{\Gamma_G K}{\varphi_G} (u_I - u_G)(u_s - u_G) + \frac{\rho_G}{\varphi_G} (u_s - u_G) C_{GI}^2 \nabla \varphi_s \end{cases}$$

Сложив уравнения можно получить:

$$\begin{aligned} \frac{d_J \varphi_s}{dt} = \frac{\varphi_s \varphi_G}{Z} \left( \left( \frac{d_G P_G}{dt} + \rho_G C_G^2 \nabla u_G \right) - \left( \frac{d_s P_s}{dt} + \rho_s C_s^2 \nabla u_s \right) \right) + \\ + \frac{(\varphi_G \Gamma_s + \varphi_s \Gamma_G)}{Z} (\lambda_s \nabla u_s + \lambda_G \nabla u_G) + K \frac{\varphi_G \Gamma_s (u_I - u_s) + \varphi_s \Gamma_G (u_I - u_G)}{Z} (u_s - u_G) \end{aligned}$$

$$Z = \varphi_G \rho_s C_{SI}^2 + \varphi_s \rho_G C_{GI}^2$$

$$\frac{d_J \bullet}{dt} = \frac{\partial \bullet}{\partial t} + u_J \nabla \bullet$$

$$u_J = \frac{\varphi_G \rho_s C_{SI}^2 u_s + \varphi_s \rho_G C_{GI}^2 u_G}{\varphi_G \rho_s C_{SI}^2 + \varphi_s \rho_G C_{GI}^2}$$

Уравнение на эволюцию объемной доли:

$$\frac{d_J \varphi_s}{dt} = -\frac{\varphi_s \varphi_G}{\tau_G T_G Z} (P_G - P_{IG}) + \frac{\varphi_s \varphi_G}{\tau_s T_s Z} (P_s - P_{IS}) + \frac{(\varphi_G \Gamma_s + \varphi_s \Gamma_G - \varphi_s \varphi_G A)}{Z} (\lambda_G \nabla u_G + \lambda_s \nabla u_s)$$

# Модель двухфазной среды

Полная система уравнений модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S + \nabla(\varphi_S \rho_S u_S) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S u_S + \nabla(\varphi_S \rho_S u_S u_S) + \nabla(\varphi_S P_S) = P_I \nabla \varphi_S + K(u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S \rho_S E_S + \nabla(\varphi_S \rho_S E_S u_S) + \nabla(\varphi_S P_S u_S) = P_I u_J \nabla \varphi_S + P_I D_P + P_I W (\lambda_S \nabla u_S + \lambda_G \nabla u_G) + K u_I (u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_S = -u_J \nabla \varphi_S + W (\lambda_S \nabla u_S + \lambda_G \nabla u_G) - D_P \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G + \nabla(\varphi_G \rho_G u_G) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G u_G + \nabla(\varphi_G \rho_G u_G u_G) + \nabla(\varphi_G P_G) = -P_I \nabla \varphi_S - K(u_S - u_G) \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_G \rho_G E_G + \nabla(\varphi_G \rho_G E_G u_G) + \nabla(\varphi_G P_G u_G) = -P_I u_J \nabla \varphi_S - P_I D_P - P_I W (\lambda_S \nabla u_S + \lambda_G \nabla u_G) - K u_I (u_S - u_G) \end{array} \right.$$

$$D_P = \frac{\varphi_S \varphi_G}{Z} \left( \frac{P_G - P_{IG}}{\tau_G T_G} - \frac{P_S - P_{IS}}{\tau_S T_S} \right) \quad W = \frac{(\varphi_G \Gamma_S + \varphi_S \Gamma_G - \varphi_S \varphi_G A)}{Z}$$

Получим значения параметров  $\lambda_S, \lambda_G$  из анализа собственных значений матрицы линеаризованной системы уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{H} \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} - \tilde{\mathbf{B}} \right] \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{H}$$

# Модель двухфазной среды

$$\lambda_S A = \rho_S C_S^2, \quad \lambda_G = 0$$

$$\lambda_{1,2} = u_S$$

$$\lambda_3 = u_G$$

$$\lambda_{4,5} = u_G \pm C_G$$

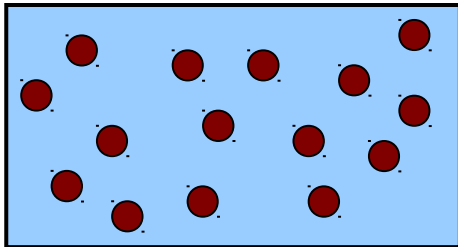
$$\lambda_{6,7} = \frac{1}{2}(u_S + u_J) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(u_S - u_J)^2 + 4\varphi_G C_S^2 (P_S - P_I)} \frac{W}{A\rho_S}$$

Для сохранения гиперболичности системы необходим переход к равновесной по давлению системе

$$\tau_S \rightarrow 0 \Rightarrow P_S = P_I$$

Между частицами твердой фазы отсутствует механическая связь



$$\varphi_S < \varphi_S^*$$

$$\lambda_S = \lambda_G = 0$$

$$\lambda_1 = u_S$$

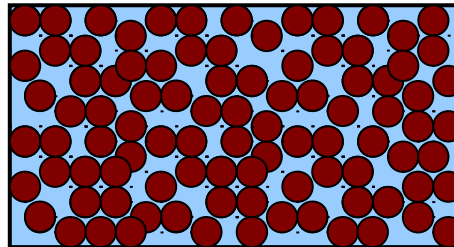
$$\lambda_{2,3} = u_S \pm C_S$$

$$\lambda_4 = u_G$$

$$\lambda_{5,6} = u_G \pm C_G$$

$$\lambda_7 = u_J$$

- 1) Между частицами твердой фазы существует механическая связь
- 2) Газовая фаза свободно протекает в пространстве между частицами твердой фазы



$$\varphi_S^* < \varphi_S < \varphi_S^{**}$$

$$\lambda_S = 0, \quad \lambda_G A = -\rho_G C_G^2$$

$$\lambda_{1,2} = u_G$$

$$\lambda_3 = u_S$$

$$\lambda_{4,5} = u_S \pm C_S$$

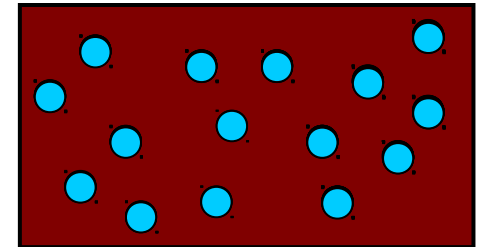
$$\lambda_{6,7} = \frac{1}{2}(u_G + u_J) \pm$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{(u_G - u_J)^2 + 4\varphi_S C_G^2 (P_G - P_I)} \frac{W}{A\rho_G}$$

Для сохранения гиперболичности системы необходимо равенство давлений

$$\tau_G \rightarrow 0 \Rightarrow P_G = P_I$$

Газ не способен свободно протекать между частицами твердой фазы



$$\varphi_S^{**} < \varphi_S$$



# Численный метод разделения по физпроцессам.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} + \mathbf{H}$$

Вычисления проводятся в среде комплекса прикладных программ ТИС.

Вычисления на каждом шаге по времени разделяются на два этапа:

I этап

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \tilde{\mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{0}$$

На первом этапе производится расчет процессов гидродинамического течения среды.

Решение строится на подвижной эйлеровой сетке методом типа С.К. Годунова. Аппроксимация численных потоков производится с помощью метода HLLEM (M. Dumbser, D. Balsara JCP vol.304, 2016) для неконсервативных систем общего вида.

II этап

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \mathbf{H}$$

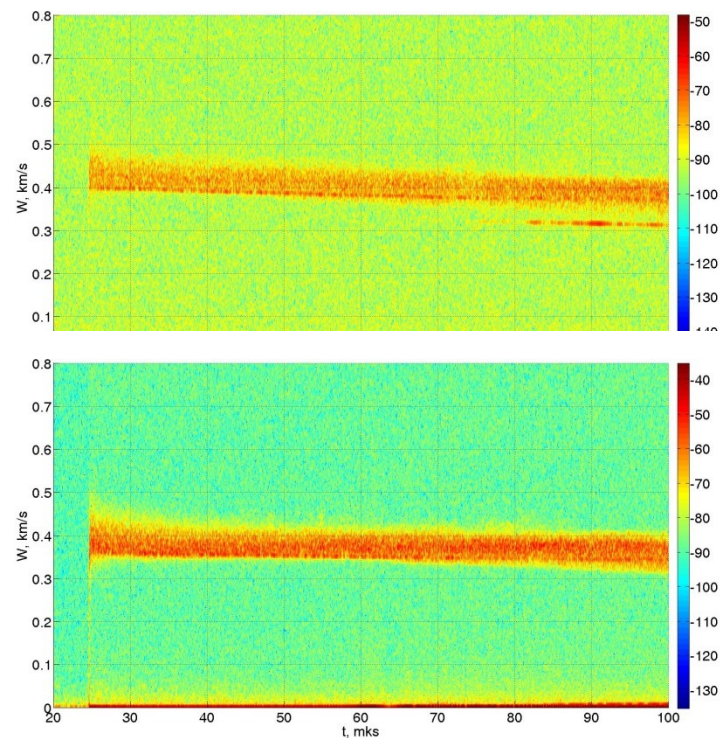
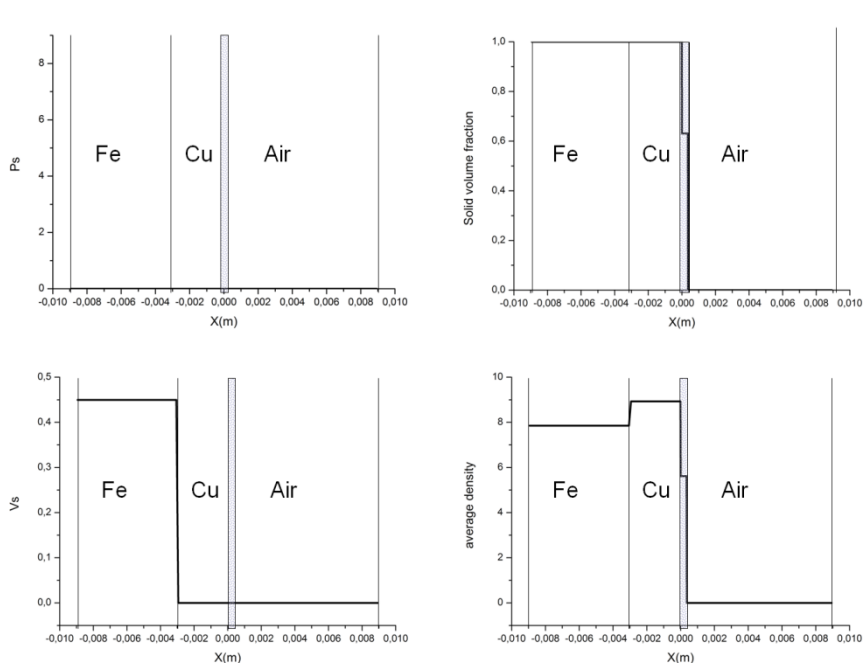
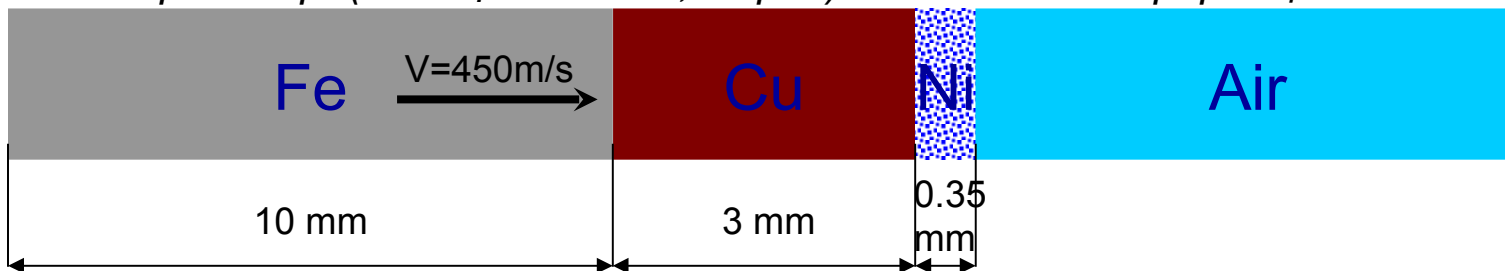
На втором этапе решение с первого этапа корректируется посредством решения системы ОДУ. Правая часть системы содержит недифференциальные кинетические соотношения.

На втором этапе сетка фиксирована, все расчеты производятся внутри конкретной ячейки. Для решения системы ОДУ используется метод Гира для жестких систем.

# Результаты расчетов

Расчет ударного нагружения слоя частиц никеля характерным размером 40 мкм  
Ударная волна генерируется в медной подложке ударом 450 м/с железной пластины с  
тыльной стороны от засыпки частиц.

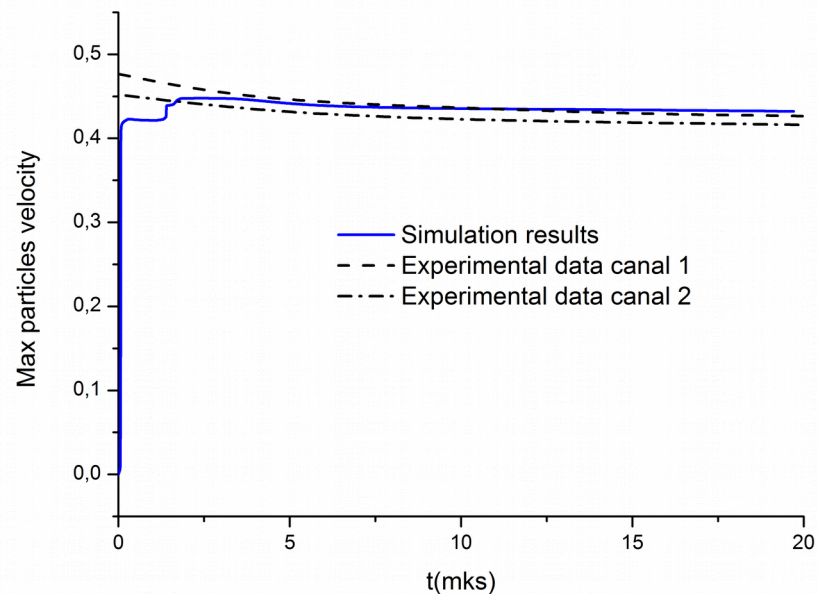
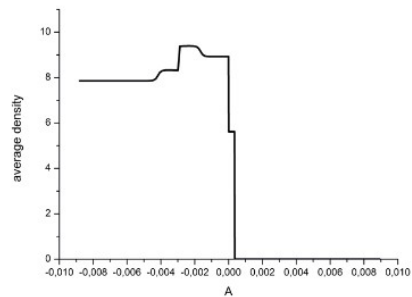
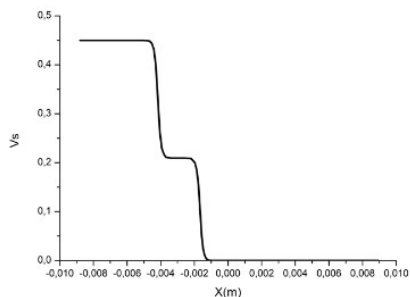
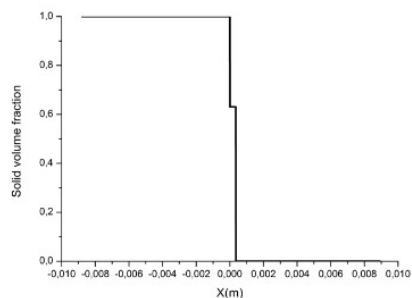
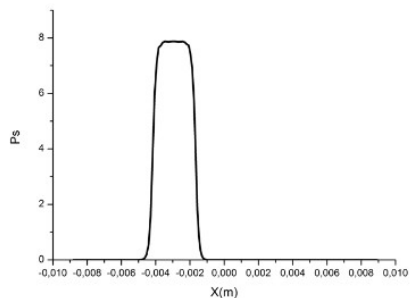
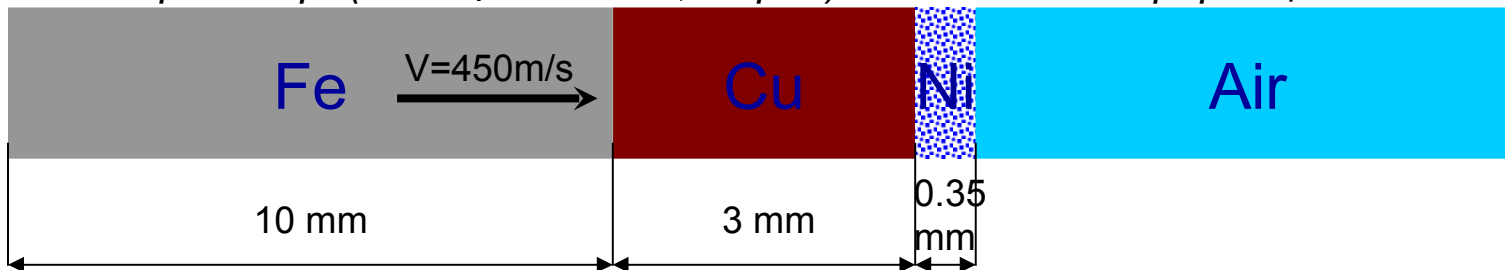
(А.В. Федоров и др. (РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров) доклад на конференции ЗНЧ-2014)



# Результаты расчетов

Расчет ударного нагружения слоя частиц никеля характерным размером 40 мкм  
Ударная волна генерируется в медной подложке ударом 450м/с железной пластины с  
тыльной стороны от засыпки частиц.

(А.В. Федоров и др. (РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров) доклад на конференции ЗНЧ-2014)

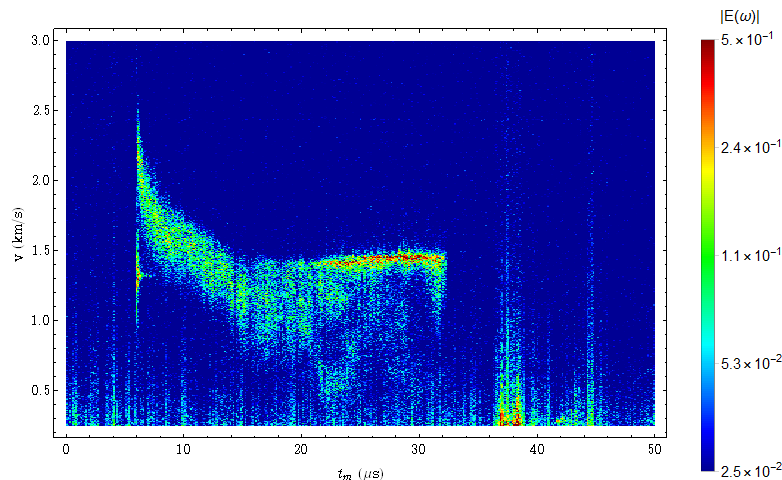
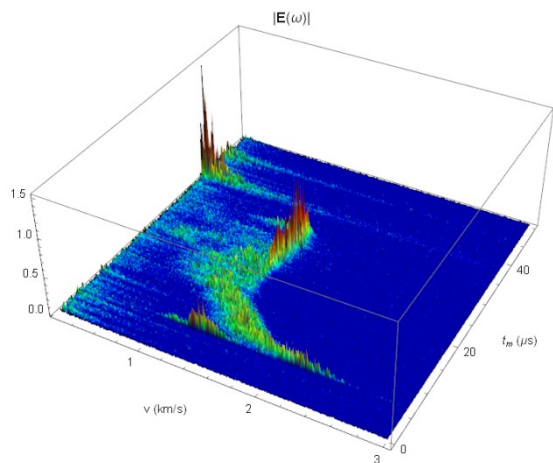


# Результаты расчетов

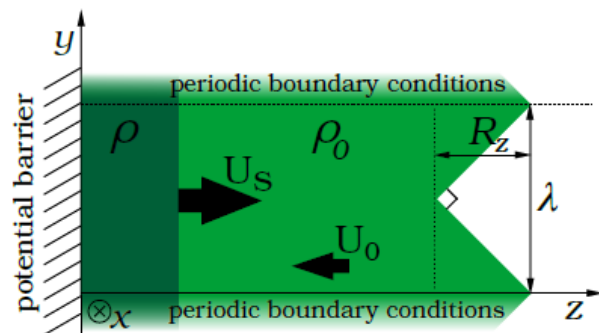
Расчет динамики фрагментов кумулятивной струи.

Начальные данные – прямое SPH моделирование кумулятивного выброса массы с шероховатой поверхностью (С.А. Дьячков и др. ВНИИА). Экспериментальные данные – А.В. Федоров и др. (РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров), доклад на конференции ЗНЧ-2014

Спектрограммы измерения скорости с помощью системы PDV:

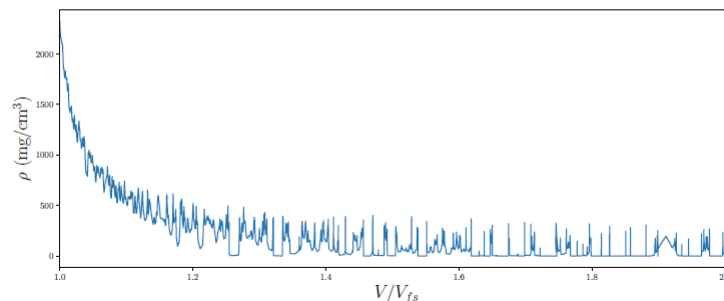
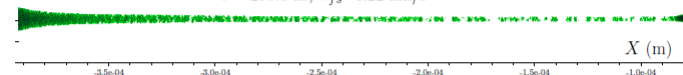


Постановка расчета и результаты SPH моделирования:



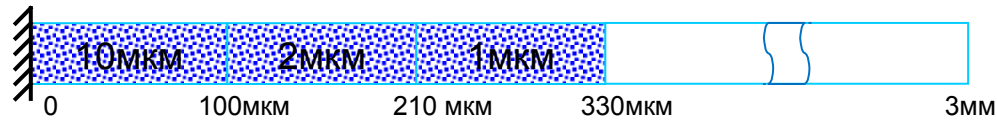
Pb, 23 GPa,  $R_z=20 \mu\text{m}$ ,  $\lambda=40 \mu\text{m}$ , elastic-plastic

$t = 290.8 \text{ ns}$ ,  $V_{fs}=1.22 \text{ km/s}$

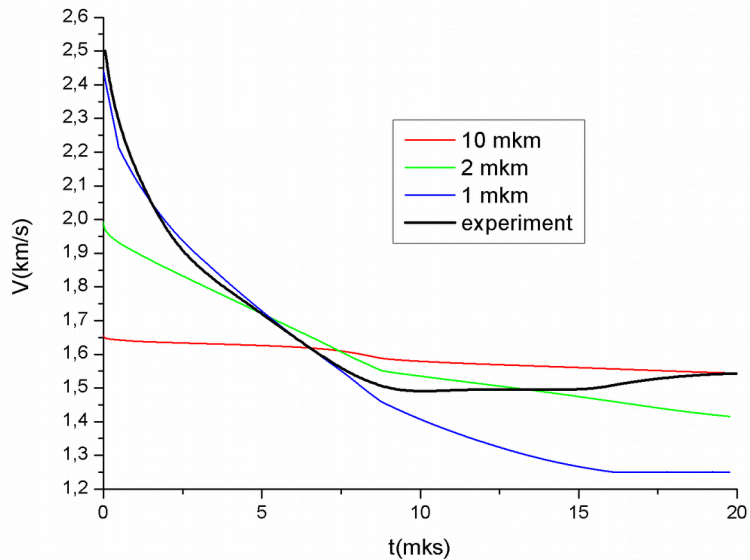


# Результаты расчетов

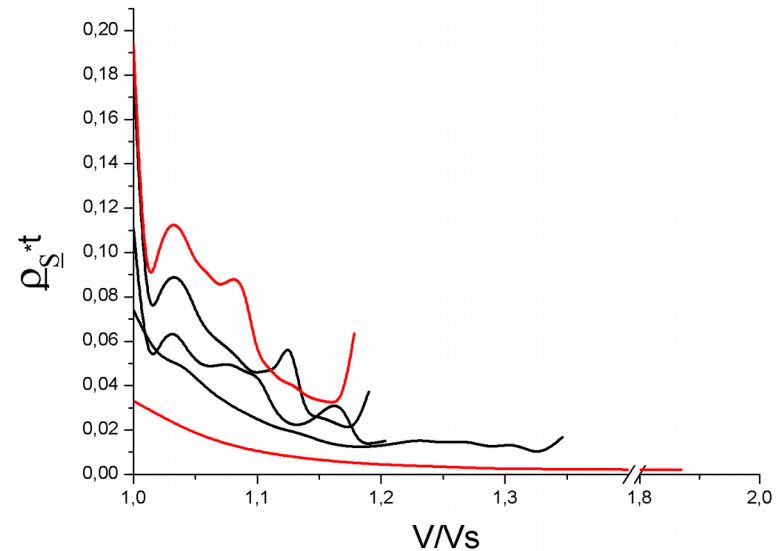
Расчет динамики фрагментов кумулятивной струи.



Определение распределения характерных размеров фрагментов по максимальной скорости твердой фазы:



Динамика произведения поверхностной плотности частиц и времени ( $\rho \cdot s / m^2$ ) в процессе разлета фрагментов с шагом 5 мкс:



# Заключение

## Основные результаты работы:

- Разработана модель двухфазной гранулированной среды, позволяющая единым образом описывать процессы в полном диапазоне изменения объемной доли фаз, от режима разреженных частиц до режимов плотной упаковки.
- С помощью модели получено численное исследование ударного нагружения слоя сферических частиц с последующим разлетом твердой массы в пространство
- С помощью модели получено численное исследование разлета фрагментированных кумулятивных струй.

## Направления дальнейших исследований:

- Исследование свойств модели при разных значениях  $\lambda_S, \lambda_G$
- Развитие численного метода для более точного численного решения системы уравнений модели

Спасибо за внимание!