



АН
ИИ
А

ПРЕДПРИЯТИЕ ГОСКОРПОРАЦИИ "РОСАТОМ"

ФГУП "ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ АВТОМАТИКИ им. Н.Л.Духова"

Программный комплекс для расчета задач механики сплошной среды на двумерных декартовых сетках с динамической локальной адаптацией

П.П. Захаров, И.С. Меньшов, К.Д. Меркулов

Цели работы

Предмет исследования:

Численное решение задач механики сплошной среды на динамически перестраиваемых декартовых сетках (далее ЛАД - локально-адаптивные декартовы).

Основные задачи:

1. Выбор формата данных.
2. Разработка алгоритмов работы с ЛАД сеткой
2. Составление и программирование численных методов.
3. Проекция данных между сетками разного масштаба.
4. Выбор критерия адаптации.
6. Представление геометрии на ЛАД сетке.
7. Движение геометрии по ЛАД сетке
8. Внедрение методики расчета многоматериальных течений

Мотивация

Области применения:

- Отслеживание зон с высокими градиентами сеточного решения для уточнения решения внутри таковых.
- Сопровождение подвижных тел и выделение пристеночных слоев для численного решения задач обтекания. Применение метода свободной границы позволяет качественно реконструировать сложные поверхности на декартовых сетках.
- Отслеживание границы для многоматериальных решателей.
- Декартовы сетки позволяют упростить алгоритмы численного счета. Вычислительный примитивизм свойственен для массивно-параллельных кодов, приспособленных для гибридных вычислительных систем.

Программные реализации:

1980 – NASA, США (CART3D, M. Aftosmis)

1990 – Tesis, Россия (FowVision)

2012 – W. Schneider, Институт Аэродинамики г. Аахен, Германия

2013 – Саров, Россия (код ЭГИДА)

2014 – p4est, США (C. Burstede)

План

1. Работа с ЛАД-сетками:

- Формат данных (Четверичные деревья для 2D, ОС3-формат для 3D)
- Многоуровневый алгоритм адаптации

2. Численное решение гиперболических систем на ЛАД-сетках:

- Математическая модель
- Численный метод (метод конечного объема для неконформной сетки)
- Схема 2-го порядка точности по времени пространству
- Двумерная консервативная подсеточная WENO-реконструкция

3. Критерии адаптации сетки

- Вейвлеты
- Примеры применения
- Шаблон «неравномерный крест»

5. Обработка геометрии

- Алгоритм адаптации сетки к геометрии
- Движение геометрии по ЛАД сетке
- Метод свободной границы

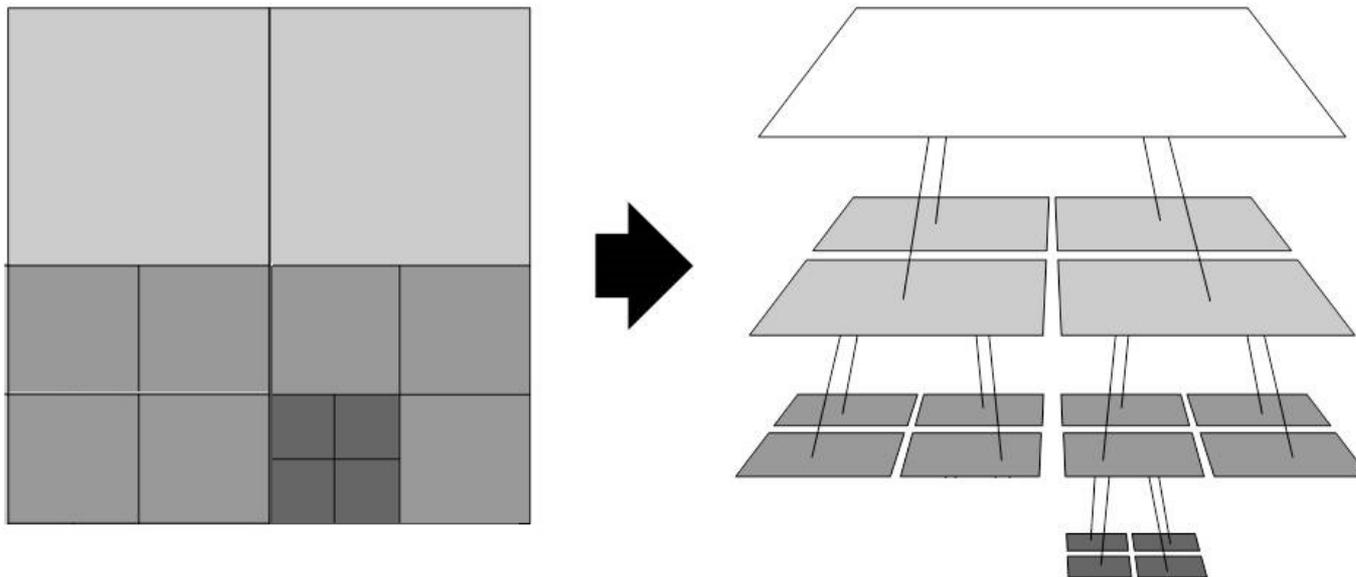
6. Внедрение модели многоматериальной среды

Представление данных

Рассмотрим двумерный (2D) вариант:

1. Начинаем с базовой прямоугольной сетки $M \times N$.
2. Каждая ячейка может быть разделена на 4 равные части.
3. Если ячейки были одной, они могут объединиться вновь.
4. Соседние ячейки могут отличаться не более, чем в 2 раза.

Согласно этим ограничениям удобно хранить сетку как **двумерный массив четверичных деревьев**. Каждый элемент базовой сетки ($M \times N$) становится деревом:



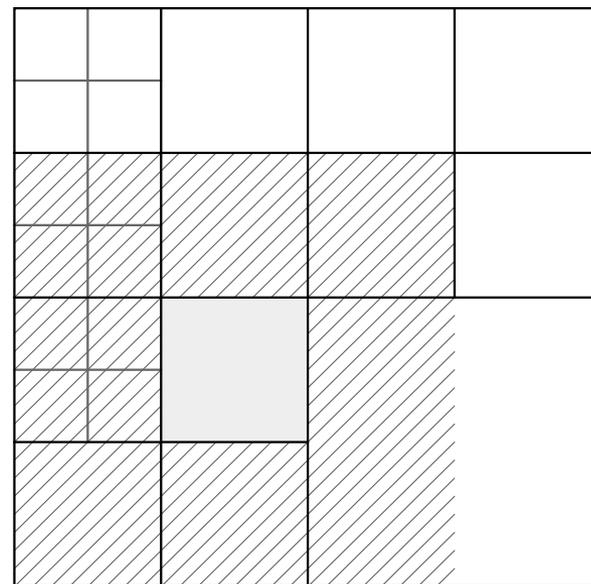
Четверичное дерево

Ячейка описывается тремя целыми координатами:

1. Уровень lvl
- 2-3. Виртуальное положение ячейки (i, j) на уровне lvl , если бы он был заполнен.

Базовая сетка – уровня 0.

Каждая ячейка имеет флаг «подразбитости» (истина, если ячейка имеет потомков). Листовые ячейки хранят указатель на газодинамические параметры и координаты, подразбитые – указатели на потомков.



Особенности:

1. Ячейка уровня $lvl > 0$ всегда имеет родителя с координатами $(lvl - 1, [i / 2], [j / 2])$.
2. Число соседей варьируется от 6 до 12, **прямых соседей** (вдоль осей) – от 4 до 8.
3. Упрощенные алгоритмы построения, изменения, обхода сетки и поиска соседних ячеек. **Функции: divide cell, combine cells, search neighbors, cells sweeping**
4. Простое обобщение на трехмерный случай.

Поиск соседей

Оранжевая ячейка имеет координаты (2, 1, 2).

Нумерация с нуля.

i – строка снизу, j – столбец слева.

Запишем в двоичной форме, причем число знаков равно $|v|$: получим

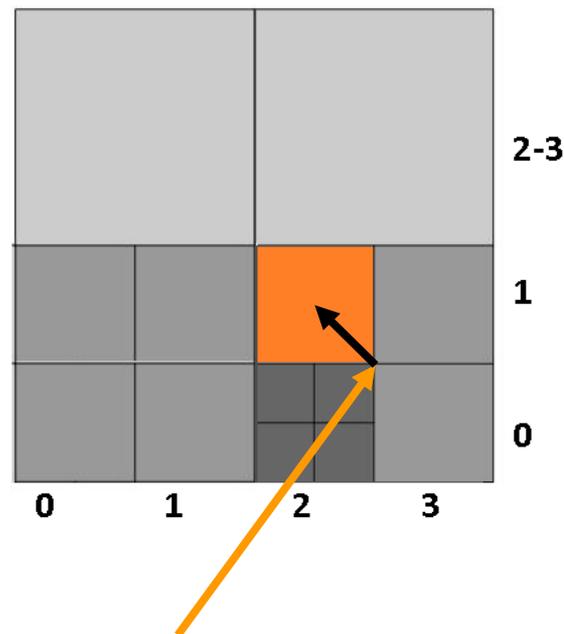
(2, 01, 10).

Получили зашифрованный путь к ячейке.

Идем от базовой ячейки, **для выбора k -й альтернативы выбираем знак, стоящий на k – позиции в i и j** . 0 – путь к уменьшению индекса (вниз и влево), 1 – к увеличению (вверх и вправо).

$k = 1 \Rightarrow \{0,1\}$ - на 1 уровне нижняя строка, правый столбец

$k = 2 \Rightarrow \{1,0\}$ - на 2 уровне верхняя строка, левый столбец



Поиск соседей можно осуществлять поиском ячеек:

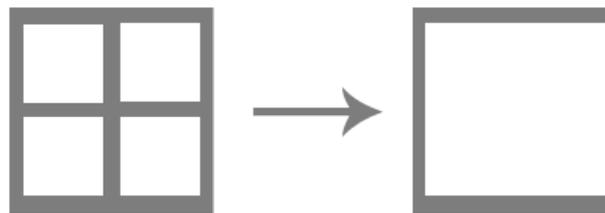
$(|v|, i+1, j)$, $(|v|, i-1, j)$ –
верхний и нижний

$(|v|, i, j+1)$, $(|v|, i, j-1)$ –
правый и левый

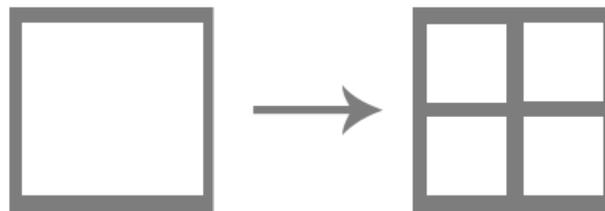
Если не найден (остановка раньше по сетке), берем родителя. Для подразбитых выбираем 2 части из 4.

Многоуровневая адаптация

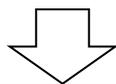
Огрубление сетки
(объединение ячеек):



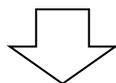
Измельчение сетки
(деление ячеек):



Огрубление



Измельчение



Сглаживание

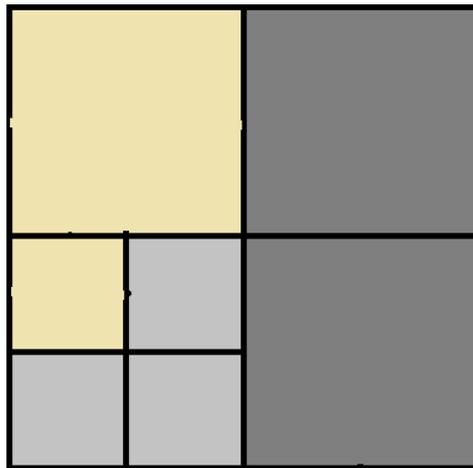
Одноуровневый алгоритм: обходим дерево, расставляем флаги ячейкам, которые могут и должны быть огрублены, на втором проходе – огрубляем.

Многоуровневый алгоритм: цикл по уровням: с 0 по l-1: если выполняется критерий измельчения и данная ячейка не была только что огрублена, подразбиваем ее. Или **одноуровневый алгоритм:** расставляем флаги и измельчаем ячейки.

Цикл по уровням: с 1 до 2: если сосед ячейки крупнее более, чем вдвое, подразбиваем его до удовлетворения условия

Измельчение и сглаживание

Анимация работы многоуровневого алгоритма измельчения

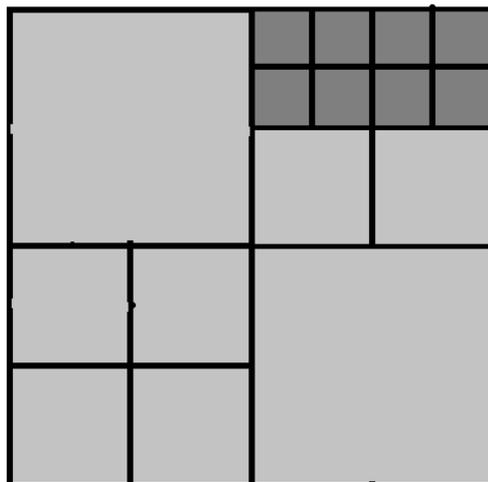


level = 0

-  - just coarsened
-  - can be divided

Цикл по уровням: с 0 по I-1:
если выполняется критерий
измельчения и данная ячейка
не была только что
огрублена, подразбиваем ее.

Анимация сглаживания



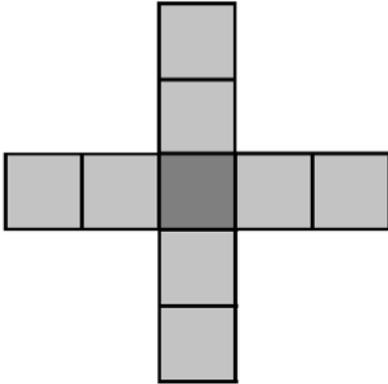
level = 2

-  - cells of current level

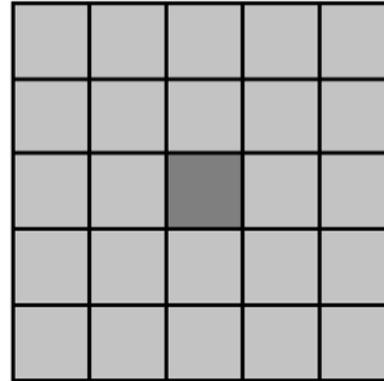
Цикл по уровням: с I до 2:
если сосед ячейки крупнее
более, чем вдвое,
подразбиваем его до
удовлетворения условия

Метод скользящего окна. Огрубление.

Крестовое окно



Квадратное окно

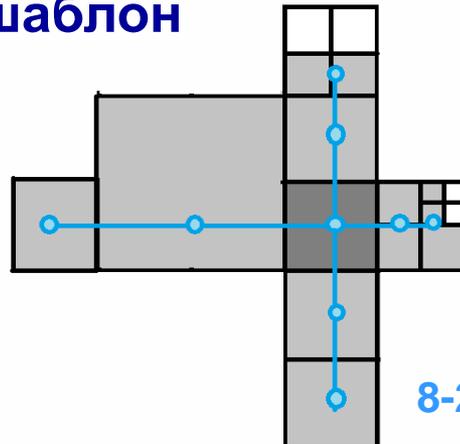


или

Используем 1D разложение по направлениям.
Если хотя бы 1 коэффициент $> \text{border}$, $\text{flag} := 1$
8 соседей

Используем 2D разложение
24 соседа

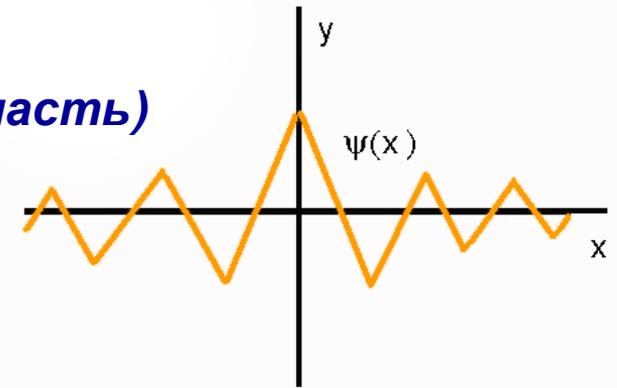
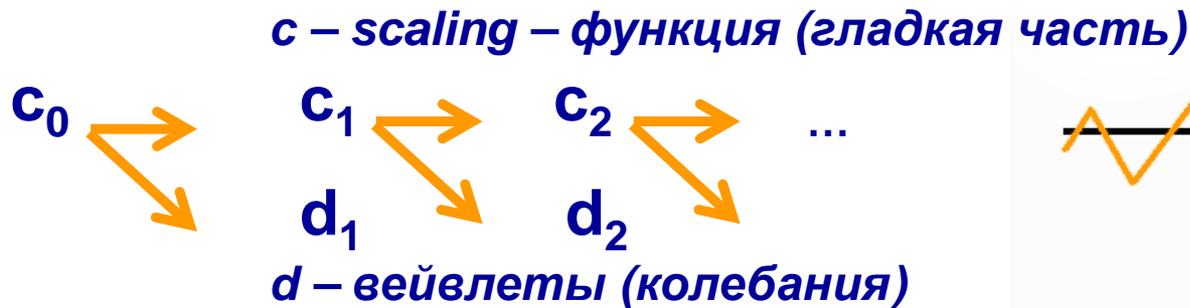
Неравномерный шаблон



8-24 соседа

Критерии на основе вейвлет-анализа

Для адаптации сеток удобно иметь свободные от параметров глобальные критерии. Вейвлет-разложение делит численно заданную



Мы рассматриваем вейвлеты 1^{го} порядка с 2 нулевыми моментами на основе В-сплайнов и вейлетов Добеши. Если коэффициент вейвлет-разложения сеточной функции больше некоторого порога, ячейка помечается флагом 1. Эта операция проводится по всем направлениям сеточного поля. Результирующий флаг равен 1 если хотя бы 1 из осевых флагов 1. Значения данных флагов используются как критерии измельчения и огрубления сетки.

$$flag = \vee_{i=x,y,(z)} flag_i, \quad flag_i = (c_i > border_i)$$

Для вейвлетов 1^{го} порядка пороги пропорциональны пространственному шагу вдоль соответствующего направления.

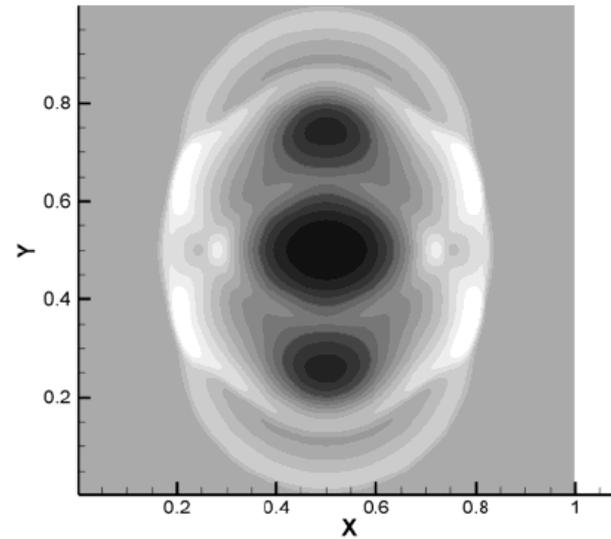
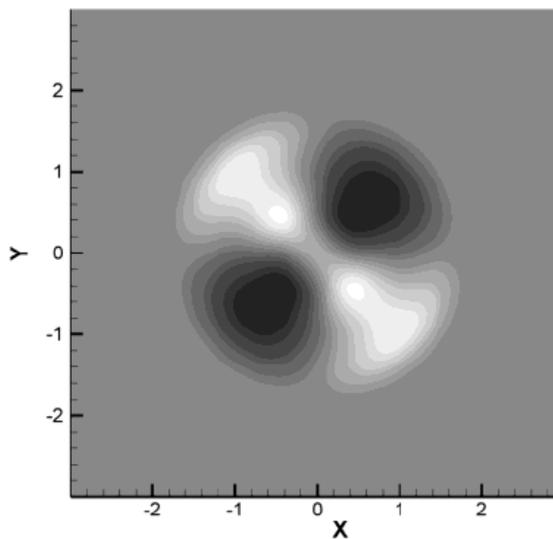
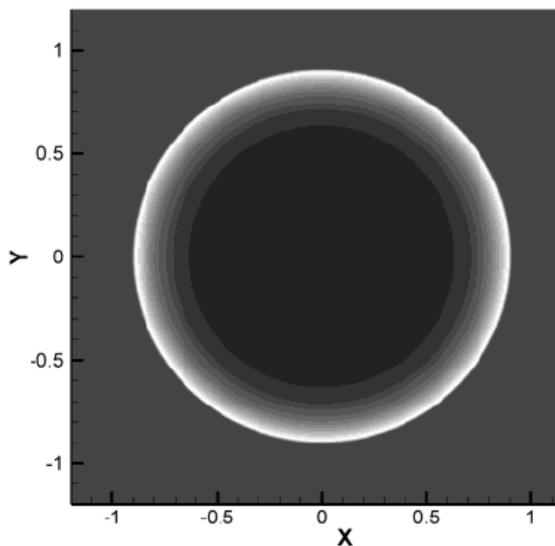
Примеры применения критерия

Задача 1

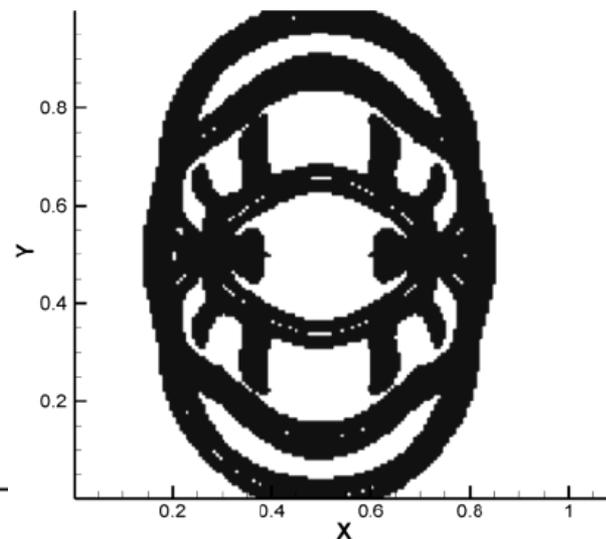
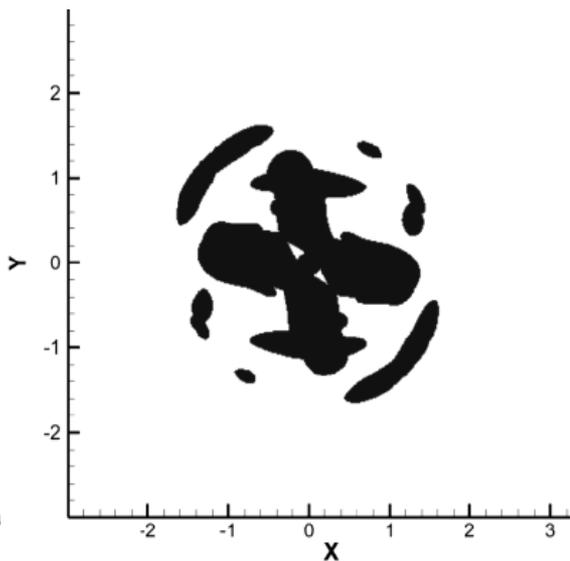
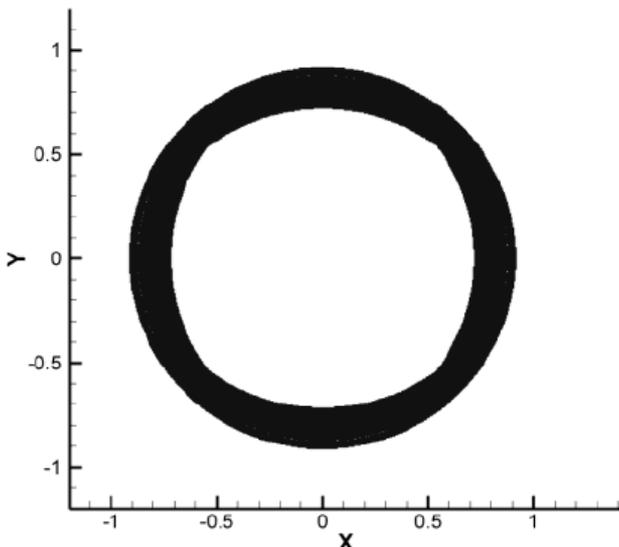
Задача 2

Задача 3

Плотность



Флаги



Базовый численный метод

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = 0$$

- Система уравнений на консервативных переменных в векторной форме. Мы переписали метод конечного объема (FVM) для особой формы сетки.

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E)^T$$

$$\mathbf{F}_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H)^T, \quad k = x, y$$

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n - \frac{\Delta t}{V_{lvl,i,j}} \left[\sum_{\sigma x} s_\sigma \mathbf{F}_\sigma + \sum_{\sigma y} s_\sigma \mathbf{F}_\sigma \right]$$

Подсчет потоков:

1. Метод Русанова
 2. Метод Годунова
- 1^й порядок точности

Расчет временного шага:

$$\Delta t = K_{safe} \cdot (\Delta t)_{CFL} \quad - \text{условие Куранта}$$

$$(\Delta t)_{CFL} = \min_{\Omega} (\tau_x, \tau_y),$$

$$\tau_i = \min_{\Omega} \left(\frac{\Delta i}{c_0 + |U_i|} \right), \quad i = x, y,$$

Граничные условия:

1. Свободное вытекание
2. Жесткая стенка
3. Фиксированный вектор
4. Формульный вид

Задачи с цилиндрической симметрией

Система для осесимметричного случая ($y = 0$):

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = -\frac{1}{y} \mathbf{H}$$

Правая часть: $\mathbf{H} =$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \rho U_y \\ \rho U_x U_y \\ \rho U_y^2 \\ (\rho E + p) U_y \end{pmatrix}$$

Запись получена на основе формулировки законов сохранения в цилиндрических координатах с последующим делением на R (координата y). На нижней границе области ($y = 0$) ставится граничное условие жесткой стенки. На решение МСГ данная добавка влияния не

Разные способы интегрирования правой части:

1. Среднее арифметическое R
2. Баричесентрическое R
3. Интегральное R (для приосевых ячеек нужно другое приближение)

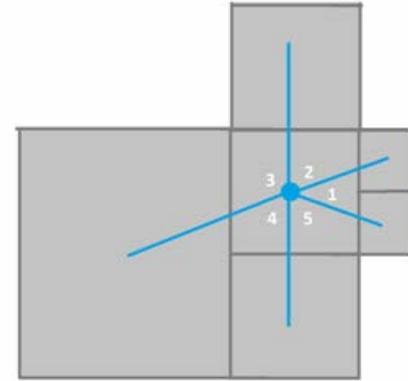
$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \frac{1}{R} \mathbf{H}(\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^n),$$

$$R = \begin{cases} \frac{y_{top} + y_{bottom}}{2}, (1) \\ \sqrt{\frac{y_{top}^2 + y_{bottom}^2}{2}}, (2) \\ \frac{y_{top} - y_{bottom}}{\ln \frac{y_{bottom}}{y_{top}}}, y_{bottom} > 0, (3) \end{cases}$$

Измельчение сетки. WENO - реконструкция

При разбиении ячейки на 4 нужно заполнять новые потомки данных. При сносе значения из ячейки-родителя теряем точность.

WENO реконструкция – weighted essentially non-oscillatory функциональная реконструкция.



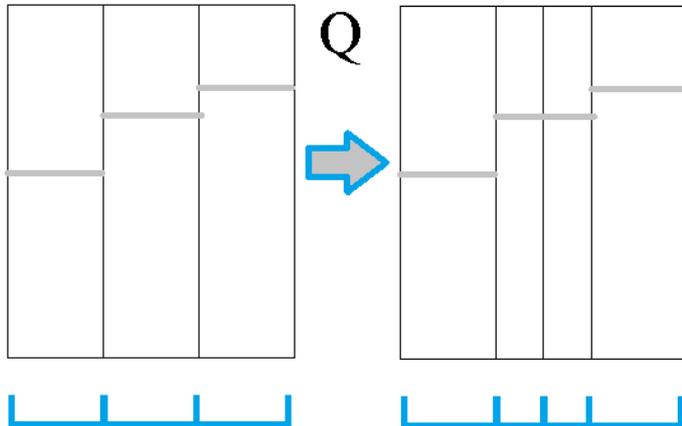
3-точечные градиенты

$$\nabla U_i = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i} \right)$$

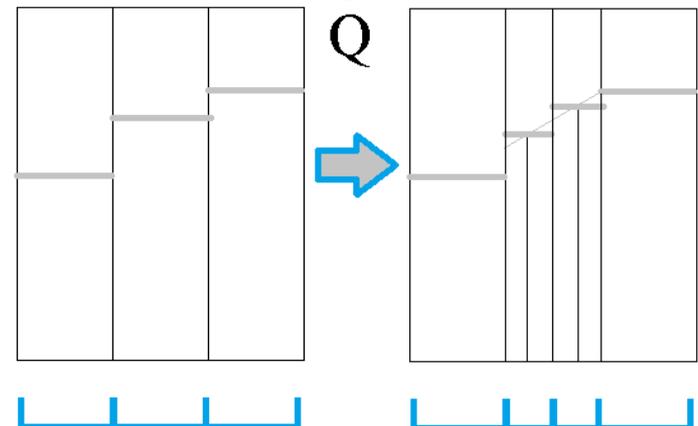
взвешиваются с весами

$$w_i = \frac{1}{(|\nabla U_i| + \varepsilon)^2} \text{ нормированными } 1.$$

Снос значений:



WENO-интерполяция



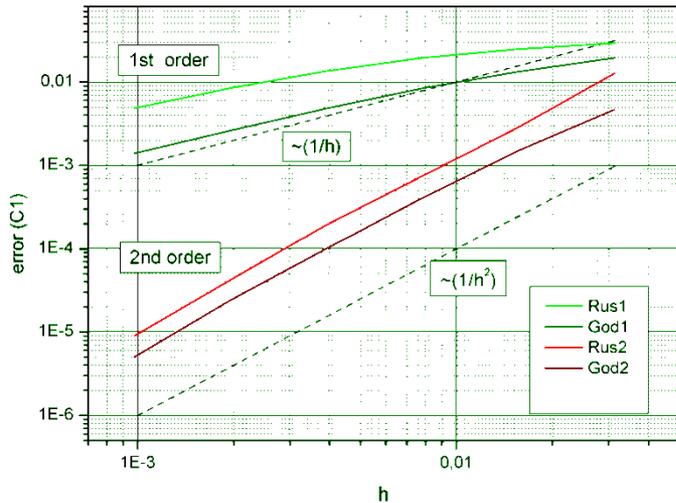
2-й порядок точности на основе WENO

Предиктор (полушаг по времени):

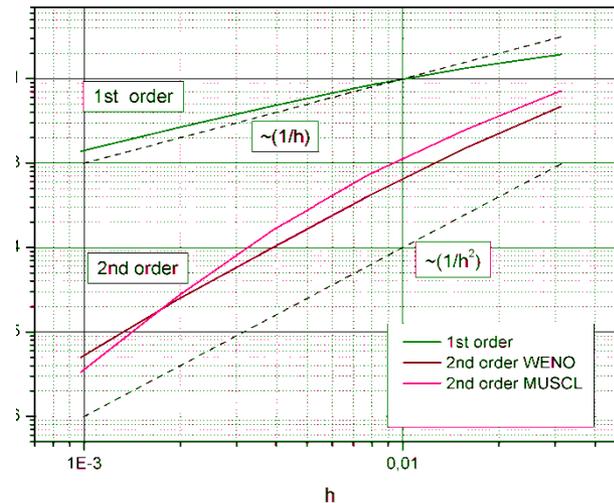
$$Q^{n*} = Q^n + \frac{dt}{2V_{cell}} \sum_{\sigma} F(Q^n + (\nabla Q^n, \mathbf{r}_{\sigma})) S_{\sigma}$$

Солвер:

$$Q^{n+1} = Q^n + \frac{dt}{V_{cell}} \sum_{neig} F(Q^{n*} + (\nabla Q^n, \mathbf{r}_{\sigma}), Q_{neig}^{n*} + (\nabla Q_{neig}^n, \mathbf{r}_{neig, \sigma})) S_{\sigma}$$



- Анализ схемы на гладком решении
(перенос синусоидального возмущения)



- Анализ схемы на разрывном решении
(задача Седова) – порядок 1 (~0,85), 2 (~1,6)

Задача Седова о сильном взрыве. 4 и 6 уровней

Постановка задачи:

$$(\rho, U_x, U_y, p) = (1, 0, 0, 10^{-6}),$$

$$e^* = 0.2082$$

$$D = [-1.2, 1.2] \times [-1.2, 1.2]$$

$$t = 1, p_{\text{solution}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6$$

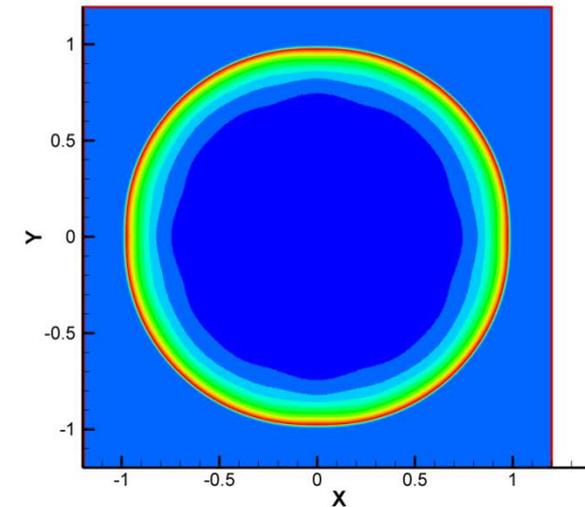
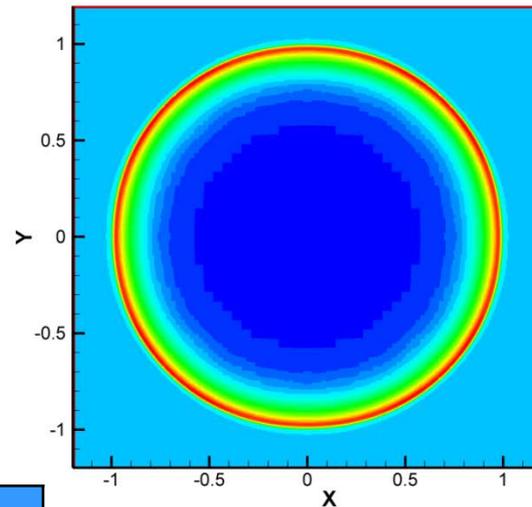
Статистика

Уровни	4	6
Базовая	50 x 50	50 x 50
Подробная	800 x 800	3200 x 3200
Итоговая	40552 (6,34 %)	589708 (5,76 %)
Пик плотности	4.316	5.287
Время счета	72.9 с.	5270 с.

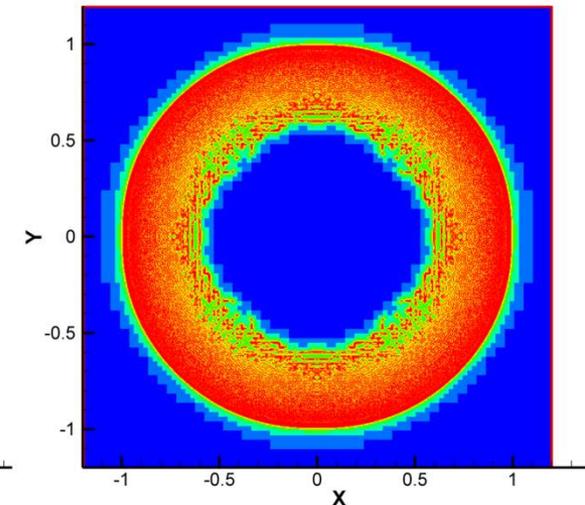
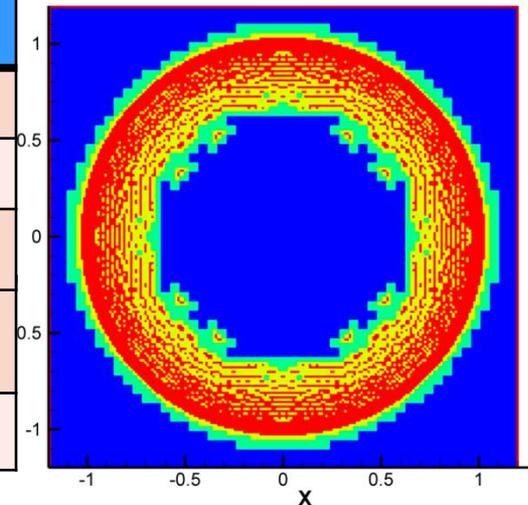
4 уровня

плотность

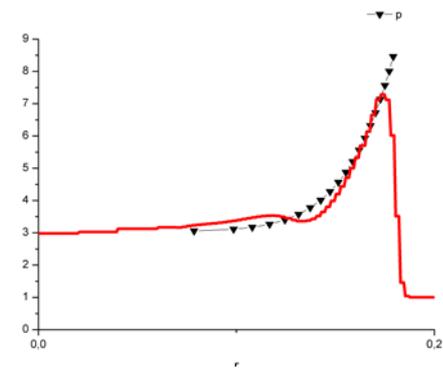
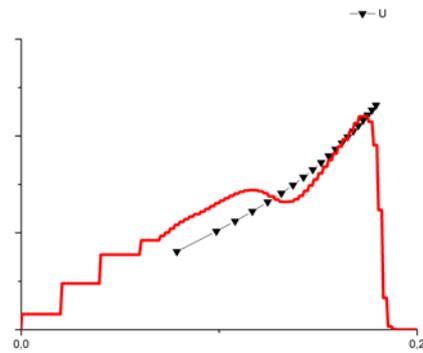
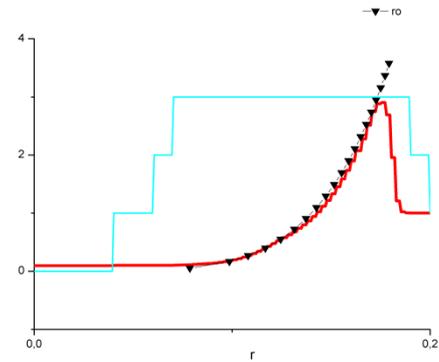
6 уровней



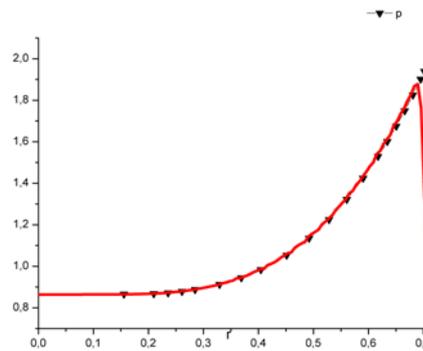
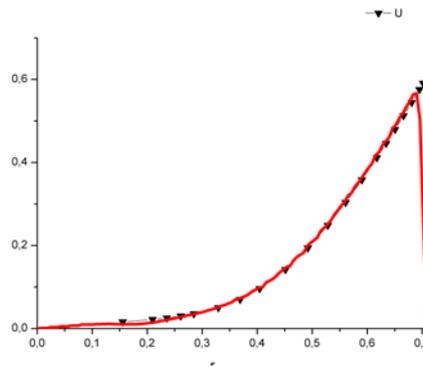
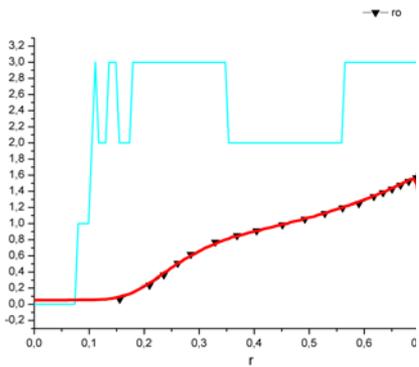
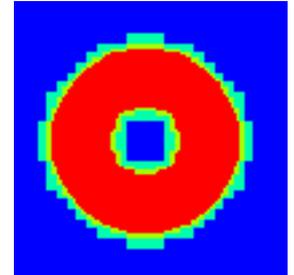
сетка (уровни ячеек)



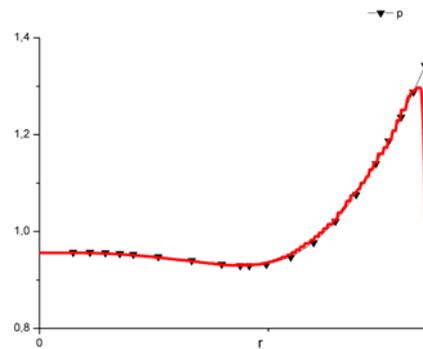
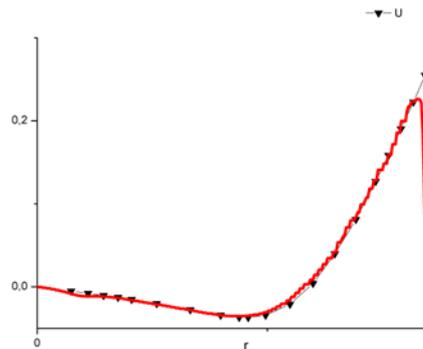
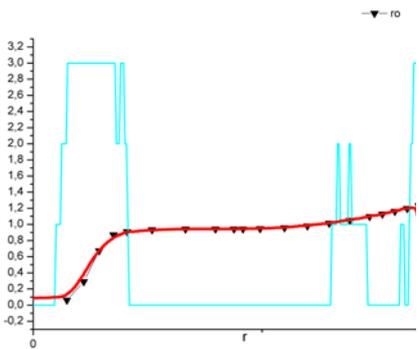
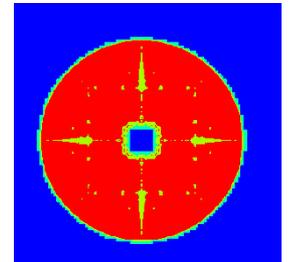
Взрыв с противодавлением



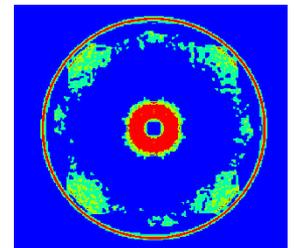
$t=0.03$



$t=0.2981$



$t=0.9874$

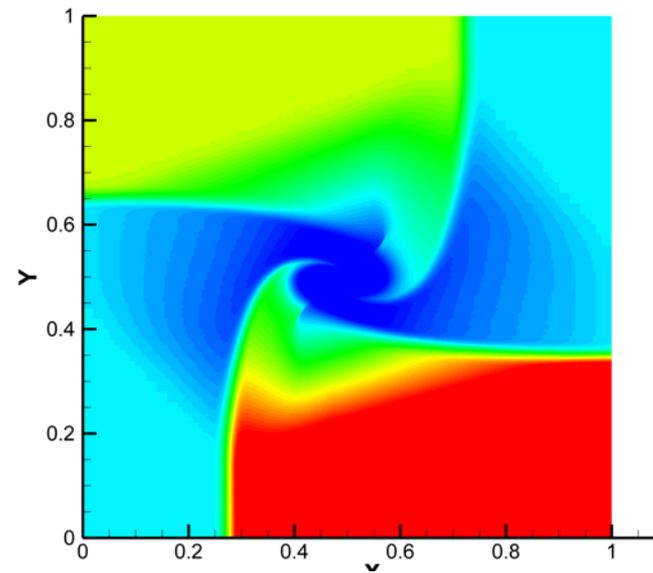
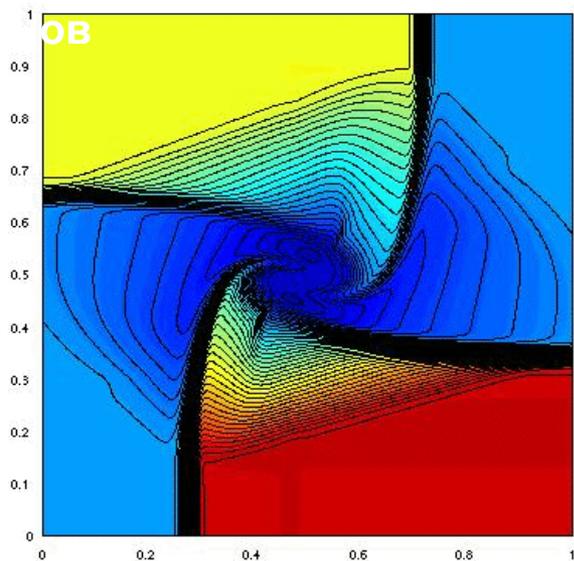


Аналогичная постановка, $p=1$, область $[-5,6;5,6] \times [-5,6;5,6]$, базовая сетка 560×560 , 4 уровня
Сравнение с книгой Чудов и др. «Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы»

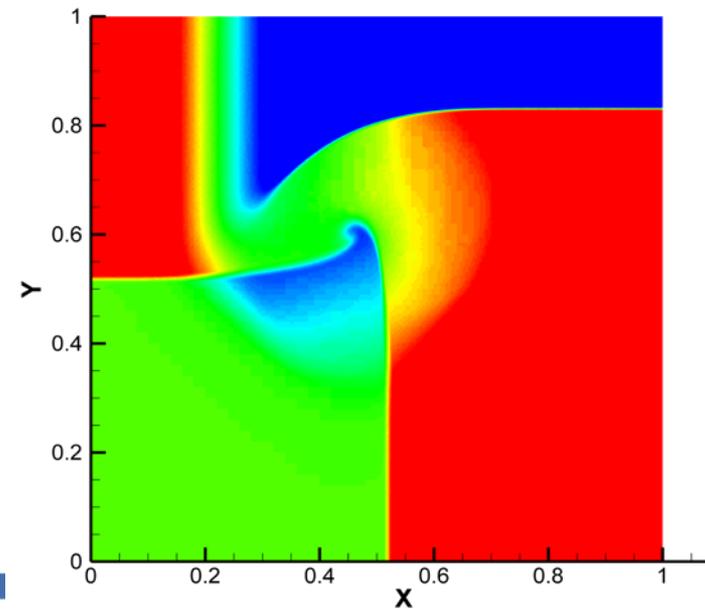
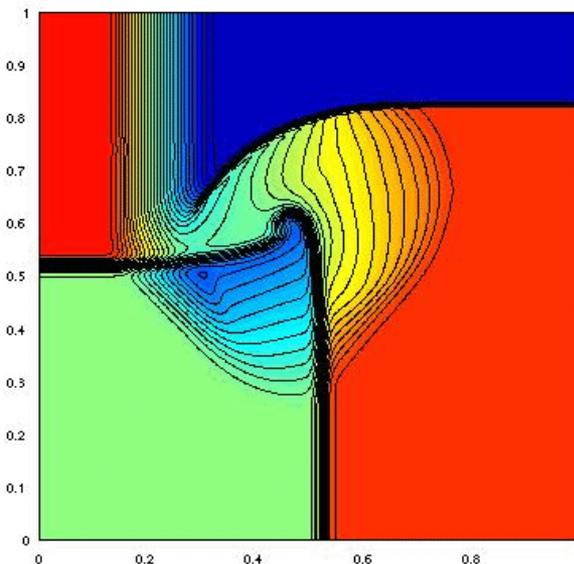
Тесты Лиски № 6 и № 16

№6

ПЛОТНОСТЬ



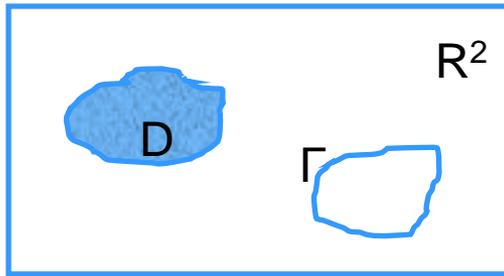
№16



Адаптация сетки к геометрии

Геометрия внутри расчетной области может служить критерием адаптации:

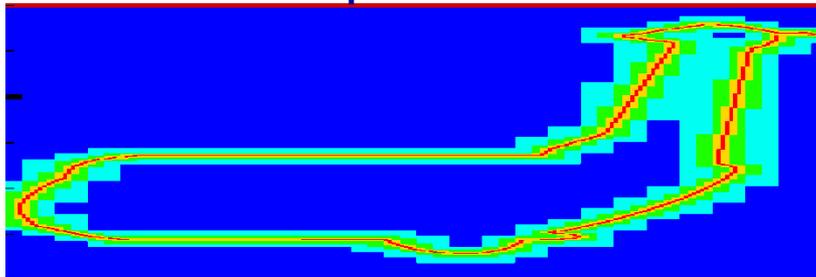
Геометрия описывается ограничивающей поверхностью Γ , заданной набором элементов (отрезков для двумерного случая, треугольников – для трехмерного)



Сегментация:



Уровни ячеек:



Алгоритм:

Объект окружается кубом соответствующей размерности.

Цикл по всем элементам тела (отрезкам для 2D или треугольникам для 3D):

1. Проводим начальное разбиение куба (базовая сетка) и находим ячейки, имеющие ненулевое пересечение с заданным элементом геометрии.

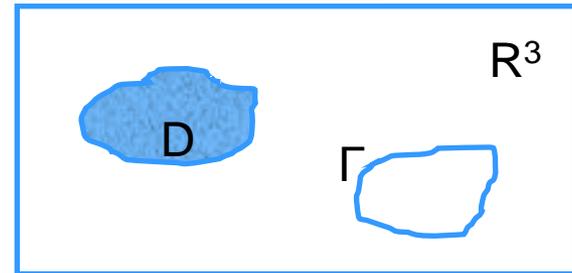
2. Каждую из этих ячеек разбиваем на 4 (2D) или 8 (3D) частей и повторяем процедуру для ячеек-потомков.

3. Повторяем последний шаг до достижения нужной точности

Метод свободной границы (МСГ)

Внутренние граничные условия на декартовой сетке

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} \right] = -\mathbf{F}_w$$



Компенсационный поток для пересекаемых ячеек:

$$\mathbf{F}_w = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{U} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \\ \rho(\mathbf{U} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n})\mathbf{U} + (p - p_w)\mathbf{n} \\ \rho(\mathbf{U} - \mathbf{U}_s, \mathbf{n})E + (p\mathbf{U} - p_w\mathbf{U}_s, \mathbf{n}) \end{pmatrix} \delta(\mathbf{x}, \Gamma)$$

Здесь \mathbf{U}_s – вектор скорости подвижного тела $\delta(\mathbf{x}, \Gamma)$ обобщенная функция Дирака поверхности Γ , $= d\mathbf{S}$ для пересекаемых ячеек.

Выражение p_w :

$$p_w = \begin{cases} p \left[1 - \frac{\gamma + 1}{2} M^{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}} \right], & (U - U_s, n) > 0 \\ p \left[1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)}{4} M^2 + \sqrt{\gamma^2 M^2 + \frac{\gamma^2 (\gamma + 1)^2}{16} M^4} \right], & (U - U_s, n) < 0, \end{cases}$$

Модификация численного метода

- Ячейки:** - **внешние (жидкостные)** – лежат полностью **снаружи** Γ
- **внутренние (твердые)** – лежат полностью **внутри**
- **пересекаемые**

Для **пересекаемых** ячеек насчитывается сумма ndS по всем элементам геометрии

Дискретизация системы уравнений для пересекаемых ячеек (метод разделения по физическим процессам):

1. Сначала выполняется обычное решение однородной системы, решение записывается в \mathbf{Q}^* , причем поток изнутри Γ не берется, заменяется $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$ ячейки

$$\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1} = \mathbf{Q}_{lvl,i,j}^* - \frac{\Delta t S_f}{\omega_f V_{lvl,i,j}} \mathbf{F}_w(\mathbf{Q}_{lvl,i,j}^{n+1})$$

– добавка на основе компенсационного потока

2-е уравнение – неявное!

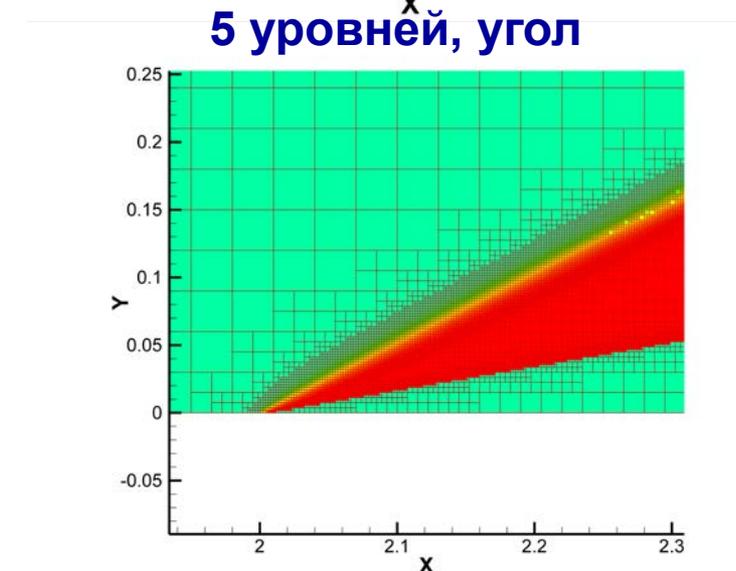
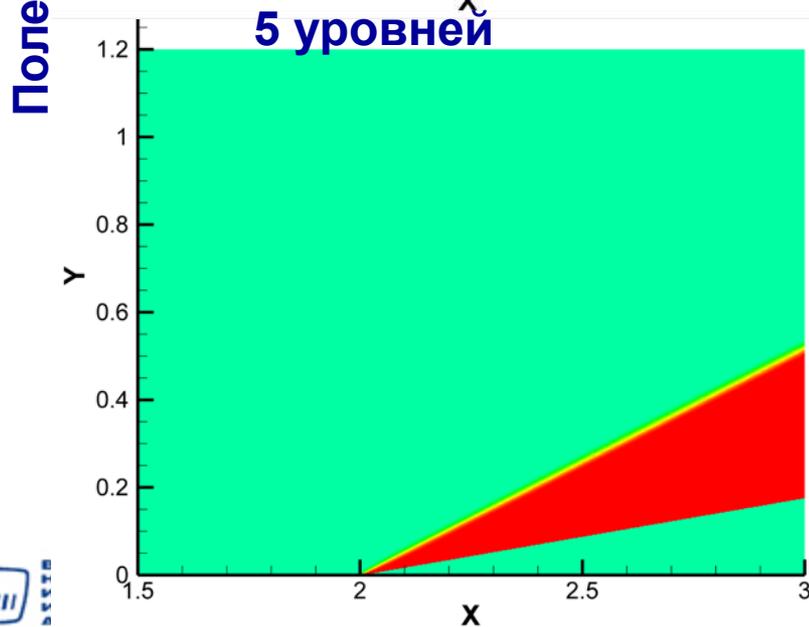
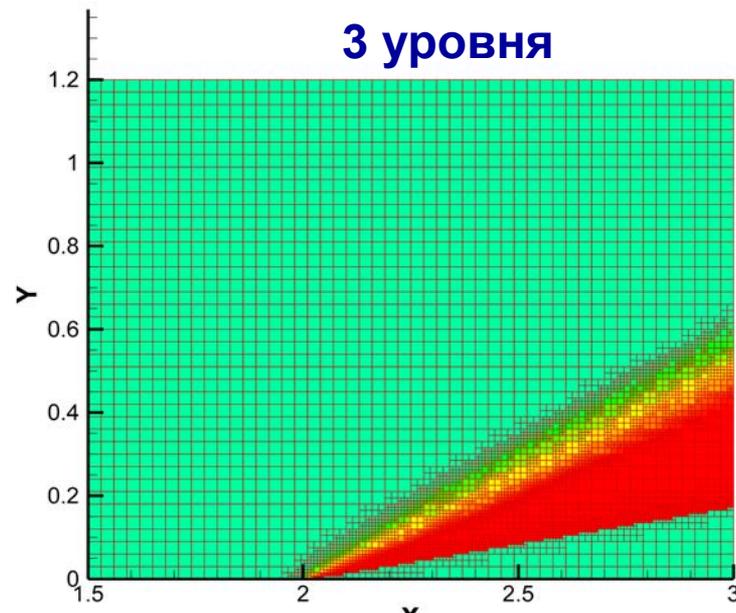
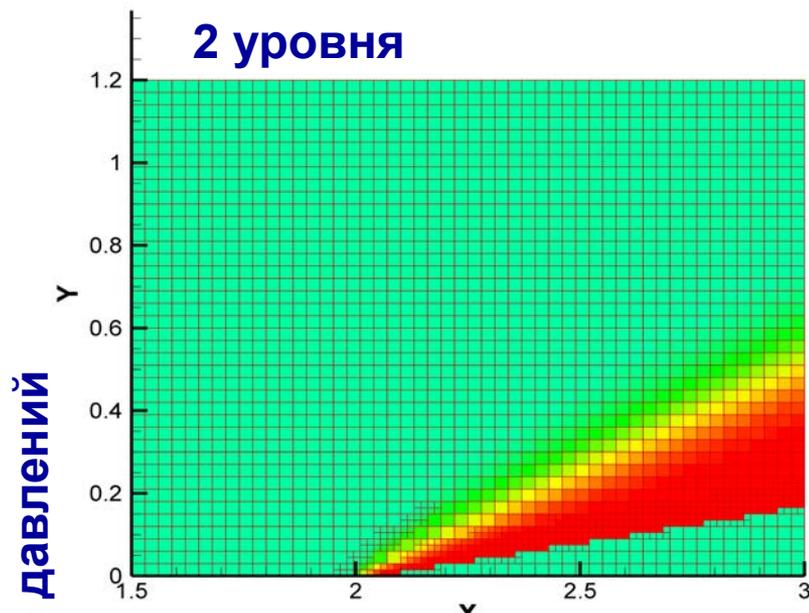
Разрешается методом Ньютона с аналитическим выражением якобиана

$$\mathbf{Q}^{s+1} = \mathbf{Q}^s + (\mathbf{Q}^s - \mathbf{Q}^* - \frac{\Delta t S_f}{\omega_f V_{lvl,i,j}} \mathbf{F}_w^s) (\frac{\Delta t S_f}{\omega_f V_{lvl,i,j}} \mathbf{A}_w^s - \mathbf{I})^{-1},$$

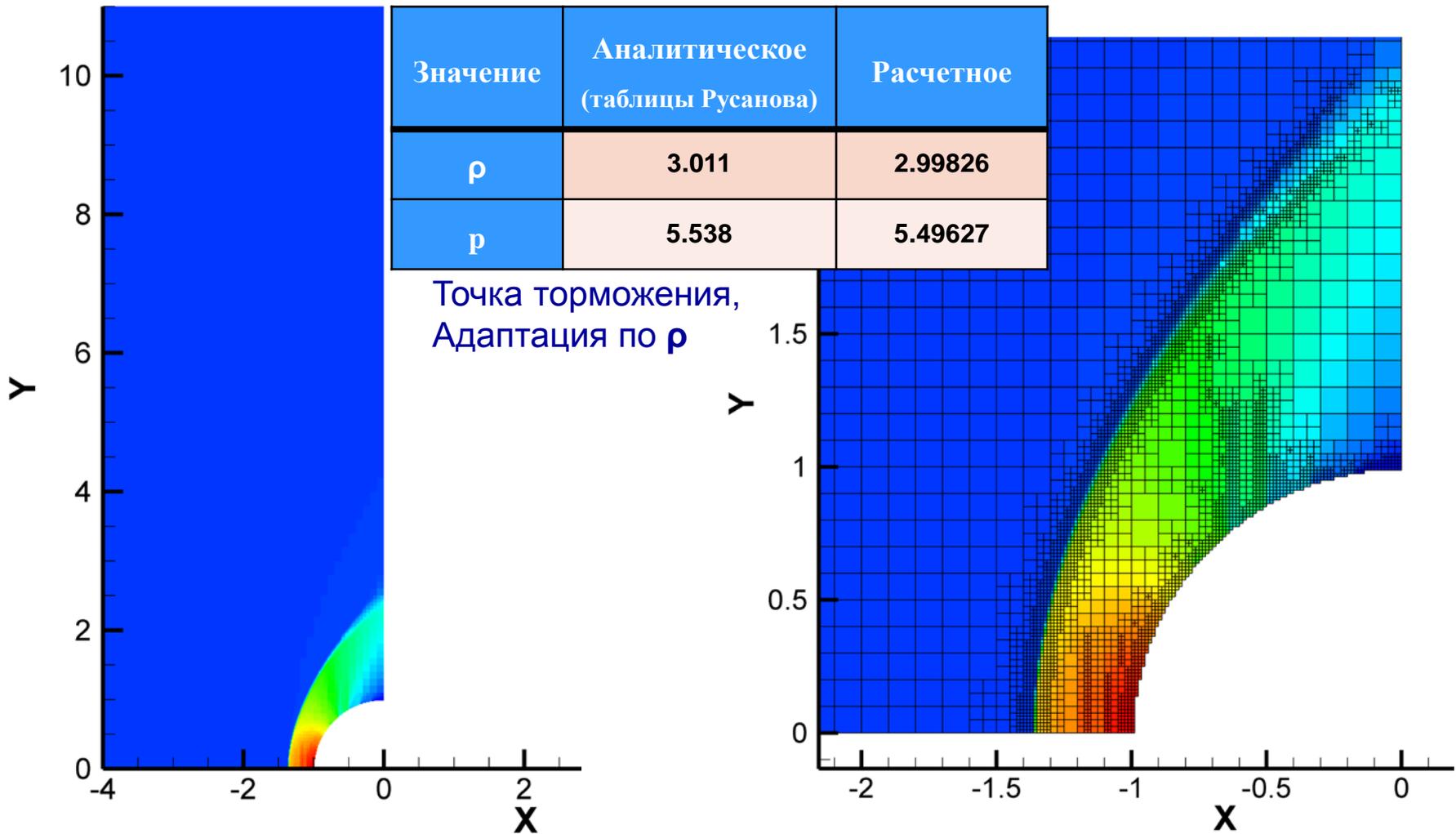
$$\mathbf{A}_w = \frac{\partial \mathbf{F}_w(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}}, \mathbf{Q}^0 = \mathbf{Q}^*$$

Значения во **внутренних ячейках** не считаются для стационарной Γ , гладко продолжаются для подвижной (стандартная схема с границей из пересекаемых).

Набегание потока на клин ($M=3$, $\alpha = 10^\circ$)



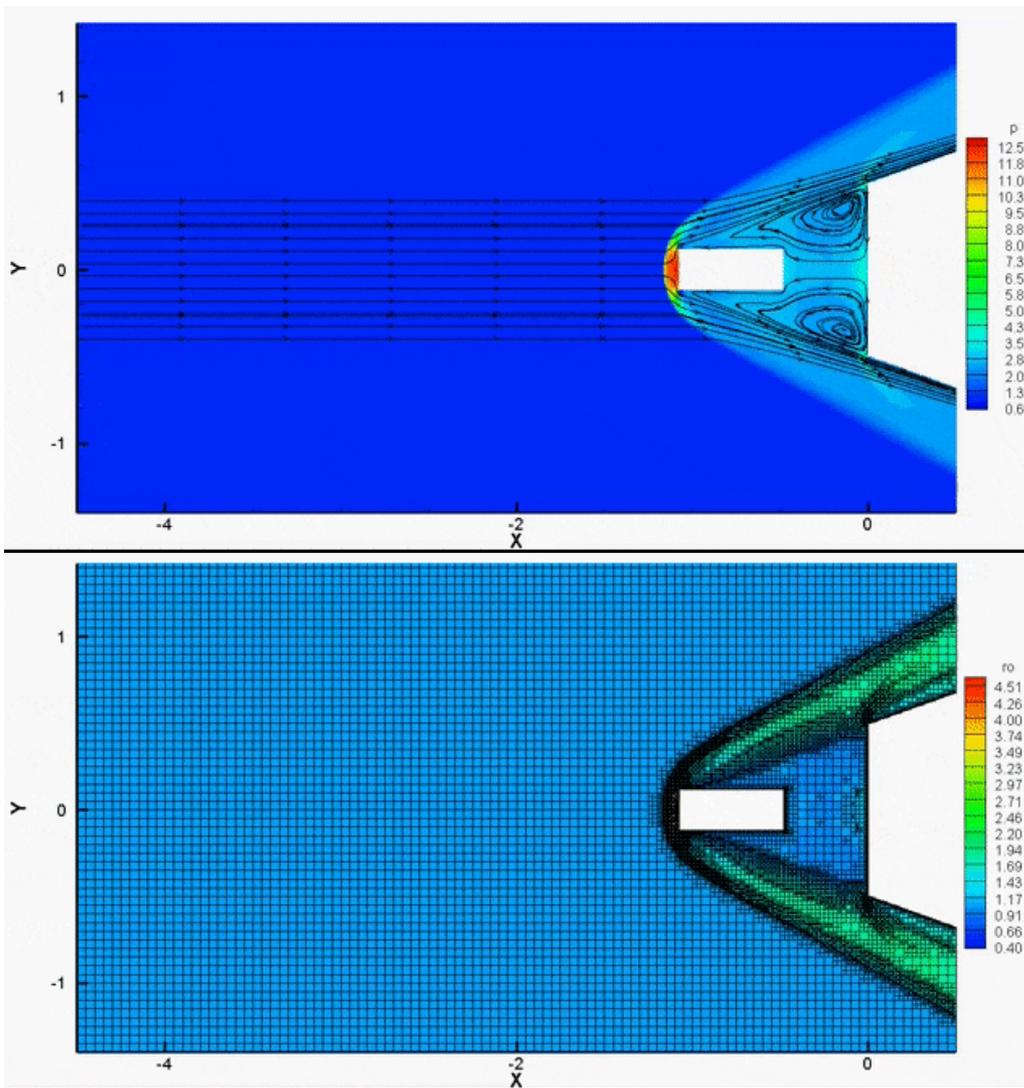
Обтекание сферы ($M=2$)



Базовая сетка 40x110,
4 уровня адаптации, давление

Сетка около тела

Обтекание разделяющихся тел



M=3,
цилиндрическая
симметрия

Расчет многоматериальных течений

$$Q = (\rho, \rho U_x, \rho U_y, \rho E, \rho \beta_0, \dots, \rho \beta_{s-1})^T$$

$$F_k = (\rho U_k, \rho U_k U_x + p \delta_k, \rho U_k U_y + p \delta_k, \rho U_k H, \rho U_k \beta_0, \dots, \rho U_k \beta_{s-1})^T, \quad k = x, y$$

CRP_BASED_FLUX (поток по составной задаче Римана - СЗР):

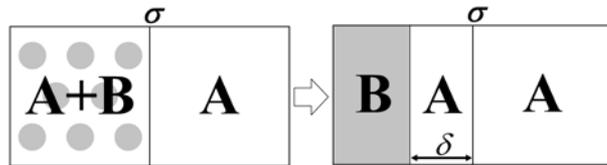
Диспетчер:



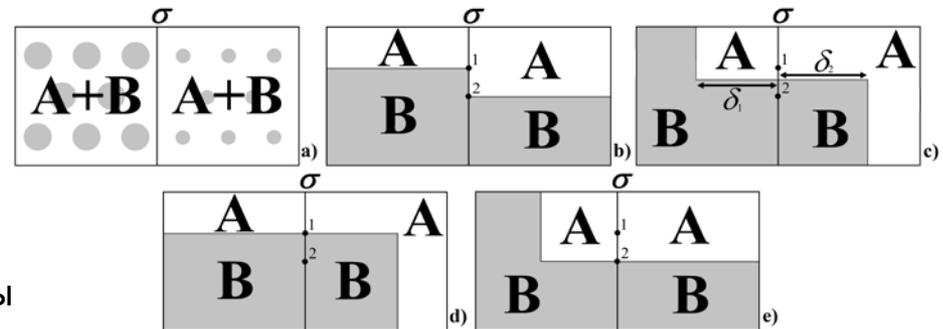
FLI/FLI_RUS



CRP_BASED_FLUX



Шаблон восстановления контактной границы



Шаблоны восстановления контактной границы для двух соседних смешанных ячеек

Адаптация к контактной границе:

Правило: ячейки, имеющие в своем окружении (сама ячейка + прямые соседи) смешанную, максимального уровня. Огрубление засчет вейвлет-анализа

Задача «тройной точки»

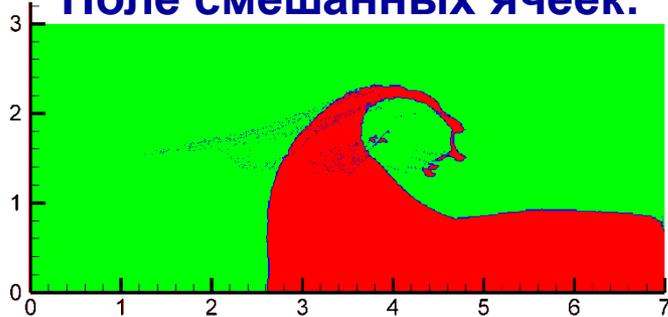
Постановка:



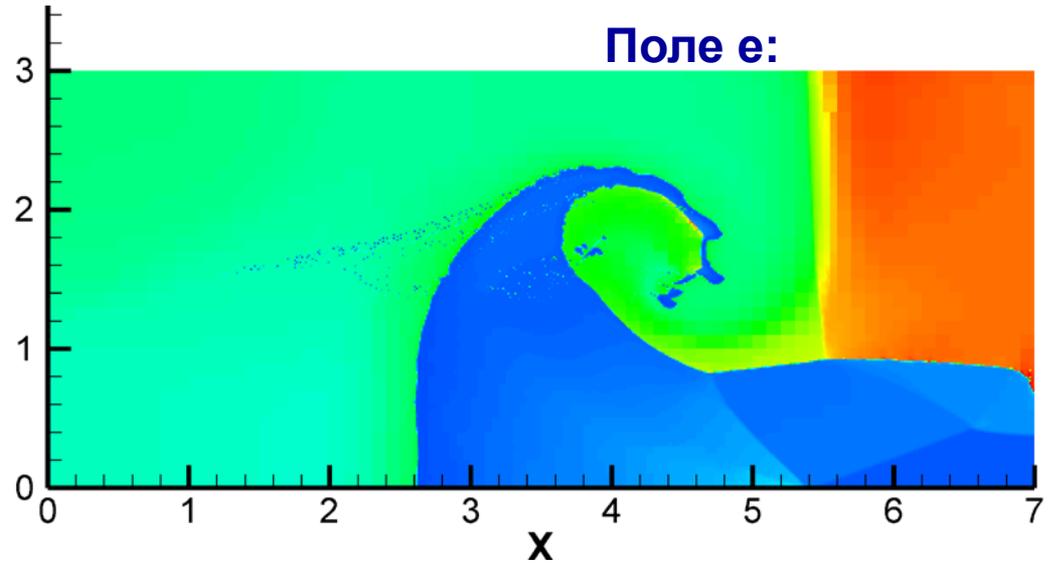
Базовая сетка 30x70,
4 уровня адаптации,
вейвлет-анализ по ρ/ρ_0

t=5

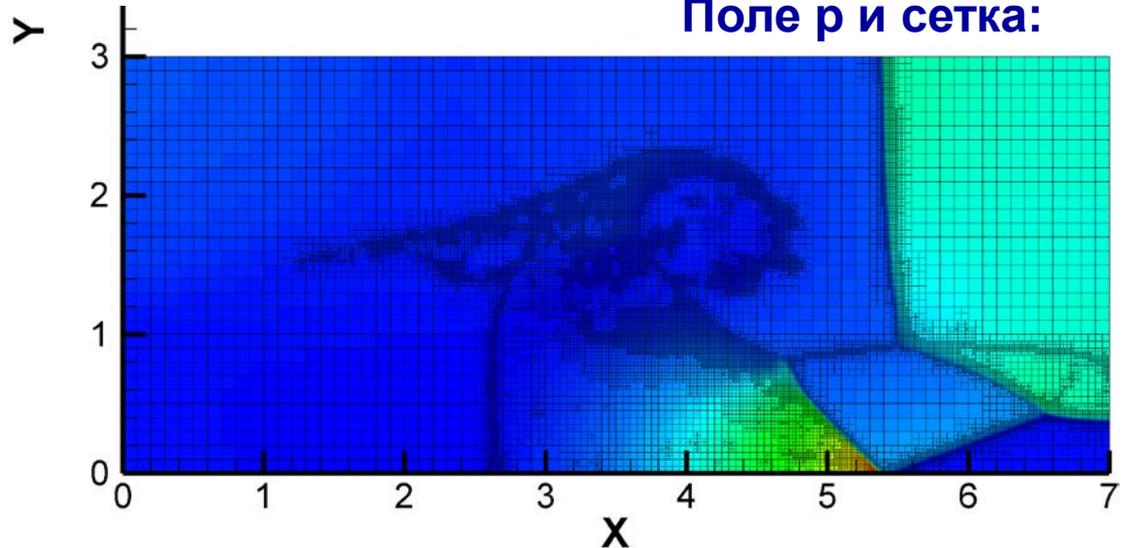
Поле смешанных ячеек:



Поле e:



Поле rho и сетка:



Схлопывание пузырька в воде

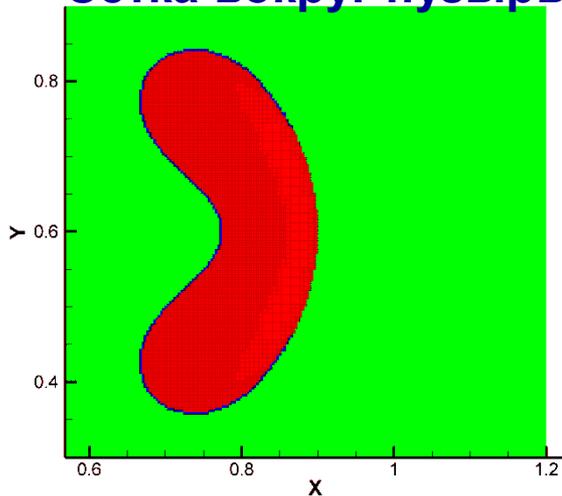
Постановка:

$$(\rho, U_x, p) =$$

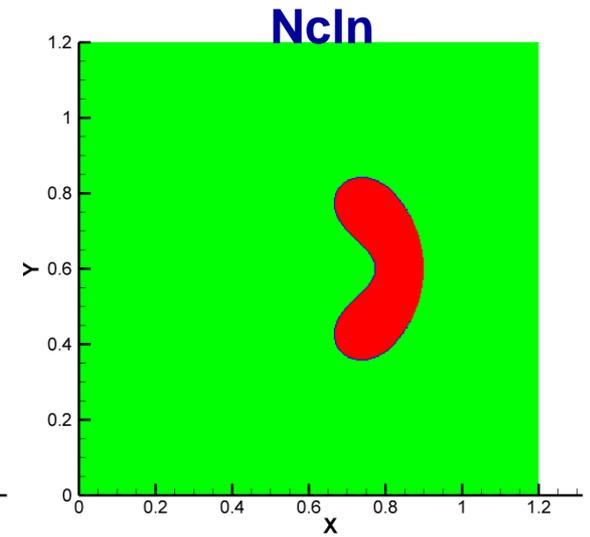
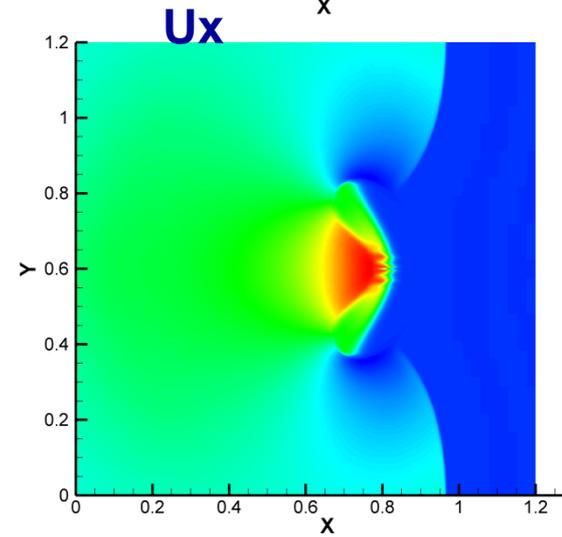
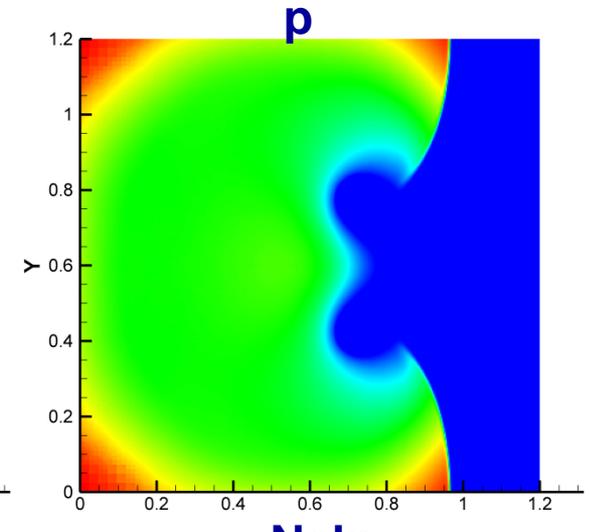
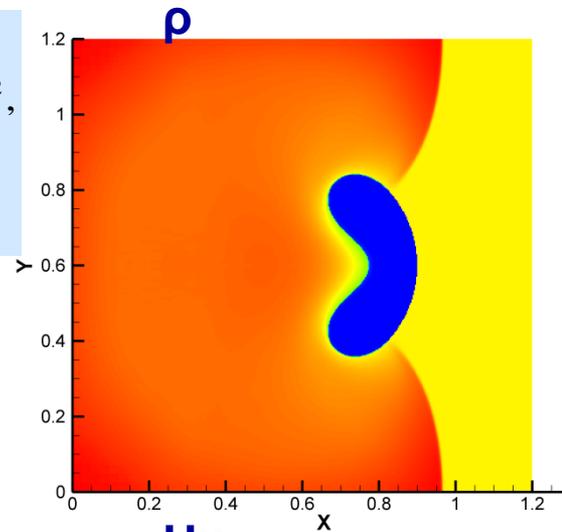
$$= \begin{cases} (0.001, 0, 1), & (x - 0.6)^2 + (y - 0.6)^2 < 0.3^2, \\ (1.3235, 6.18, 1.9 \cdot 10^4), & x < 0.06, \\ (1, 0, 1), & \text{иначе} \end{cases}$$

Базовая сетка 50x50,
4 уровня адаптации,
пузырек воздуха (идеальный газ) в воде (двучленное УРС)

Сетка вокруг пузырька:



Решение (t=3.25 мкс)



Выводы

1. Разработан алгоритм динамической адаптации декартовых сеток на деревьях.
2. Метод конечных объемов переписан для ЛАД-сеток (поток по Русанову и Годунову)
3. Разработана двумерная подсеточная WENO-реконструкция для ячеек ЛАД-сеток.
4. Предложен глобальный критерий адаптации сетки к сеточному решению на основе вейвлет-разложения по В-сплайнам и вейвлетам Добеши. Критерий апробирован на многоуровневых расчетах задачи Седова.
5. Рассмотрена адаптация к геометрии.
6. Внедрен метод свободной границы.
7. Добавлена возможность счета задач с цилиндрической симметрией.
8. Внедрена методика «ТИС-М» для расчета многоматериальных течений на основе составной задачи Римана.

Планы на будущее

1. Параллельная версия для вычислительных систем с общей памятью (CUDA)
2. Свободное движение (интегрирование по поверхности тела)
3. Расширение физической модели (уравнения Навье-Стокса, модели турбулентности)

Электронная почта: parovoz1991@yandex.ru