

# Institute of Theoretical and Mathematical Physics



*Russian Federal Nuclear Center -*

**VNIIEF**

**Об аппроксимационной вязкости разностных  
схем и расчеты течений вязкой жидкости**

**On Approximation Viscosity of Difference Scheme and  
Computations of the Flows of Viscous Liquid**

**Янилкин Ю.В., Топорова О.О., Стадник А.Л.**

# План презентации

- ◆ В работе представлены исходные уравнения для моделирования вязких газодинамических течений и этапы их аппроксимации в коде ЭГАК.
- ◆ Приведена теоретическая оценка аппроксимационной (схемной) вязкости разностной схемы методики.
- ◆ Представлены результаты расчетов по исследованию влияния схемной вязкости сравнительно с молекулярной вязкостью.

# Исходные уравнения

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \int_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T} dV,$$

$$\frac{dM_\xi}{dt} + \int_{S_\xi} \rho_\xi (\mathbf{u}_\xi - \mathbf{u}^*) dS = 0,$$

$$\frac{dE_\xi}{dt} + \int_{S_\xi} \rho_\xi \mathbf{e}_\xi (\mathbf{u}_\xi - \mathbf{u}^*) dS = \int_{V_\xi} \operatorname{Sp}(\mathbf{T}_\xi \mathbf{D}_\xi) dV,$$

$$\mathbf{P}_\xi = \mathbf{P}_\xi(\rho_\xi, \mathbf{e}_\xi),$$

$$K_x = \int_V \rho u_x dV \quad K_y = \int_V \rho u_y dV \quad K_z = \int_V \rho u_z dV \quad M = \int_V \rho dV \quad E = \int_V \rho e dV$$

Аппроксимация этих уравнений производится в два этапа, на первом решаются уравнения в лагранжевых переменных, на втором - уравнение адвекции.

Аппроксимационную (схемную) вязкость разностной схемы можно определить из первого дифференциального приближения уравнения движения, раскладывая разностные уравнения в ряд Тейлора.

Мы хотим сравнить схемную вязкость с молекулярной, поэтому предполагается, что при аппроксимации остаточные члены от членов с молекулярной вязкостью малы.

# Аппроксимация на лагранжевом этапе

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (1)$$

$\mathbf{u}(u_x, u_y)$  – скорость (определена в узлах сетки)  
 $\mathbf{T}$  – тензор вязких напряжений  
 $\mathbf{S}$  – девиатор тензора вязких напряжений  
 $P$  - давление

$$T_{ij} = S_{ij} + \delta_{ij}p$$

В уравнении (1)  $p \rightarrow g = p + q$ ,  $q$  – искусственная вязкость для УВ.

$$\mathbf{r}^{n+1/2} = \mathbf{r}^n + \tau \cdot \mathbf{u}^n, \quad \mathbf{V}^{n+1/2} = \mathbf{V}(\mathbf{r}^{n+1/2}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^n = \frac{(\mathbf{V}^{n+1/2} - \mathbf{V}^n)}{\tau \cdot \mathbf{V}^n}$$

$$p^n = P(\rho^n, \mathbf{e}^n), \quad p^{n+1/2} = p^n - \frac{\chi \cdot \rho^n \cdot (c^n)^2 \cdot \tau \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}^n}{\tau \cdot \mathbf{V}^n}, \quad g^{n+1/2} = p^{n+1/2} + \underline{q}^n$$

$$M_{i,j} = 0.25 \cdot \sum_{\xi} (M_{\xi, i-1/2, j-1/2} + M_{\xi, i-1/2, j+1/2} + M_{\xi, i+1/2, j-1/2} + M_{\xi, i+1/2, j+1/2})$$

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{u}_{i,j}^n - \frac{\tau}{M_{i,j}} \cdot (\nabla g^{n+1/2} + \nabla \cdot \mathbf{S}^n)_{i,j} \quad \tau = \Delta t \text{ – временной шаг}$$

Для лагранжева этапа схемная вязкость определяется остаточными членами от подчеркнутых членов уравнений, то есть от искусственной вязкости и предвычисленного давления.

# Схемная вязкость на лагранжевом этапе

Спрогнозированное давление  $P$  вычисляется по формуле

$$p^{n+1/2} = p^n - \tau \chi (c^n)^2 \rho^n (\nabla \cdot \mathbf{u}^n), \text{ где } \chi = 0.6. \quad (2)$$

Второй член в этом выражении после подстановки в уравнение движения дает остаточный член вязкостного вида, (назовем ее **нестационарной вязкостью**) в котором коэффициент вязкости имеет вид

$$\nu_{nst} = 0.6c^2\tau \quad \rightarrow \quad \eta_{nst} = 0.6\rho c^2\tau \quad (3)$$

Рассмотрим искусственную вязкость для УВ.

$$\begin{cases} q^n = C_1 \cdot \rho^n (h^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n)^2 + C_0 \cdot \rho^n \cdot c \cdot h^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n & \text{если } \nabla \cdot \mathbf{u}^n < 0 \\ q^n = 0 & \nabla \cdot \mathbf{u}^n \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$C_1=1, C_0=0.2$$

**Квадратичный член** искусственной вязкости  $\mu_{sw1}$  может быть оценен из того, что УВ размазывается на 4-5 ячеек.

**Линейная вязкость** может быть оценена в первом приближении по формуле

$$\mu_{sw2} \approx C_0 \rho c h \quad (5)$$

# Схемная вязкость на эйлеровом этапе

Схемную вязкость на эйлеровом этапе получим, разложив разностное уравнение движения в ряд Тейлора.

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + \text{div}(\rho u_x \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( Ah \rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Ah \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( Ah \rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2),$$

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + \text{div}(\rho u_y \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( Ah \rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Ah \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( Ah \rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2),$$

$$\frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + \text{div}(\rho u_z \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( Ah \rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Ah \rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( Ah \rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \theta(h^2, \tau^2).$$

$\sigma_{ik} = Ah \rho \langle u \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} u_i$  - эта формула аналогична выражению для компонент тензора вязких напряжений, входящих в уравнения Навье-Стокса.

При этом роль коэффициента вязкости здесь играет **коэффициент стационарной схемной вязкости:**

$$\mu_{st} = Ah \rho \langle u \rangle \quad (6)$$

где  $A$  зависит от способа вычисления потока импульса, на ударной волне и в окрестности контактных границ  $A = 1/2$ , в остальных случаях  $A = 1/4$ .

# Схемная вязкость

Таким образом, аппроксимационная вязкость методики в общем случае состоит из четырех частей:

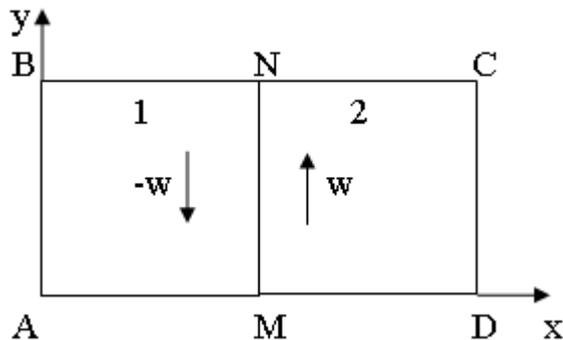
искусственной (квадратичной  $\mu_{sw1}$  и линейной  $\mu_{sw2} \approx C_0 \rho c h$ ),

схемной (стационарной  $\mu_{st} = Ah\rho \langle u \rangle$  и нестационарной  $\eta_{nst} = 0.6 \rho c^2 \tau$  ).

При оценке схемных вязкостей в расчете далее используется предположение о том, что каждая из рассматриваемых вязкостей влияют на течение аддитивно.

# Задача 1. Первая задача Стокса

## Расчеты с нулевой схемной вязкостью



$$AB=1, AM=3, MD=3$$

На границах BC и AD - условие периодичности

Параметры веществ:  $\rho_1=\rho_2=1$ ;  $\gamma_1=\gamma_2=5/3$ ;

$$P_1=P_2=0.6; u_x=0, u_y=\pm w \quad w=0.5.$$

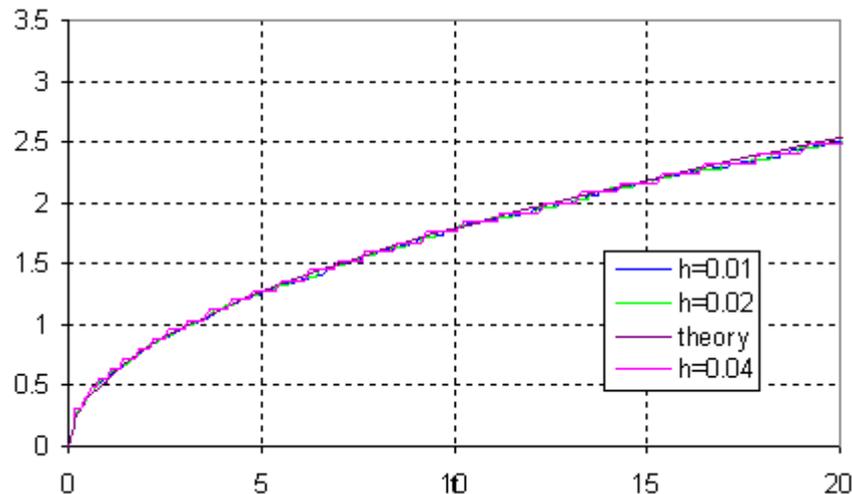
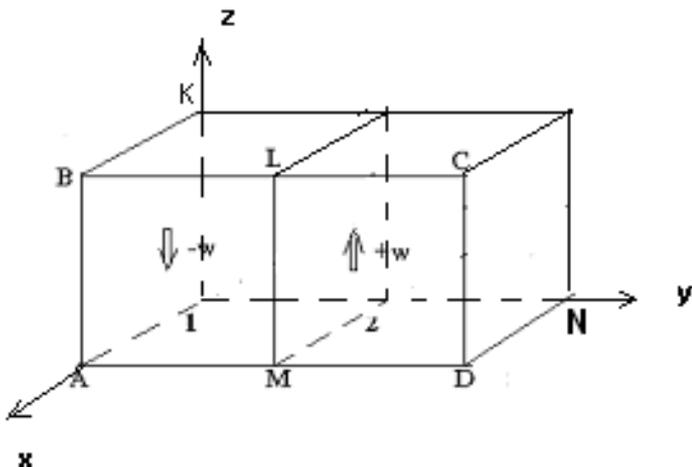
$$1) \eta_{phys} = 0$$

$$\mu_{st} = Ah\rho \langle u_x \rangle$$

$$2) \eta_{phys} = 0.005$$

Зависимость ширины зоны размазывания скачка скорости от времени выражается формулой Шлихтинга:

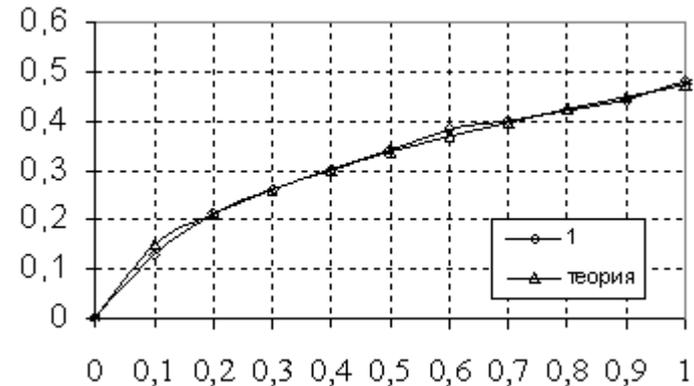
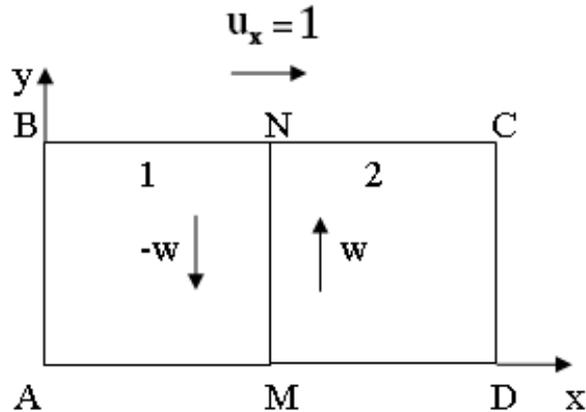
$$\Delta \approx 8\sqrt{\eta t} \quad (7)$$



# Первая задача Стокса

## Расчетная оценка схемной вязкости

Расчетная зависимость ширины зоны размазывания скорости от времени



Воспользовавшись формулой Шлихтинга:

$$\Delta_{comp} \approx 8\sqrt{\mu_{comp} t}$$

коэффициент схемной вязкости

$$\mu_{comp} \approx \left( \frac{\Delta_{comp}}{8\sqrt{t}} \right)^2 \quad (8)$$

t	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
	0.0035	0.0035	0.0036	0.0037	0.0035	0.0035

Теоретическая оценка по формуле  $\mu_{st} = Ah\rho \langle u \rangle$  дает  $\mu_{st} = 0.0025$

# Первая задача Стокса

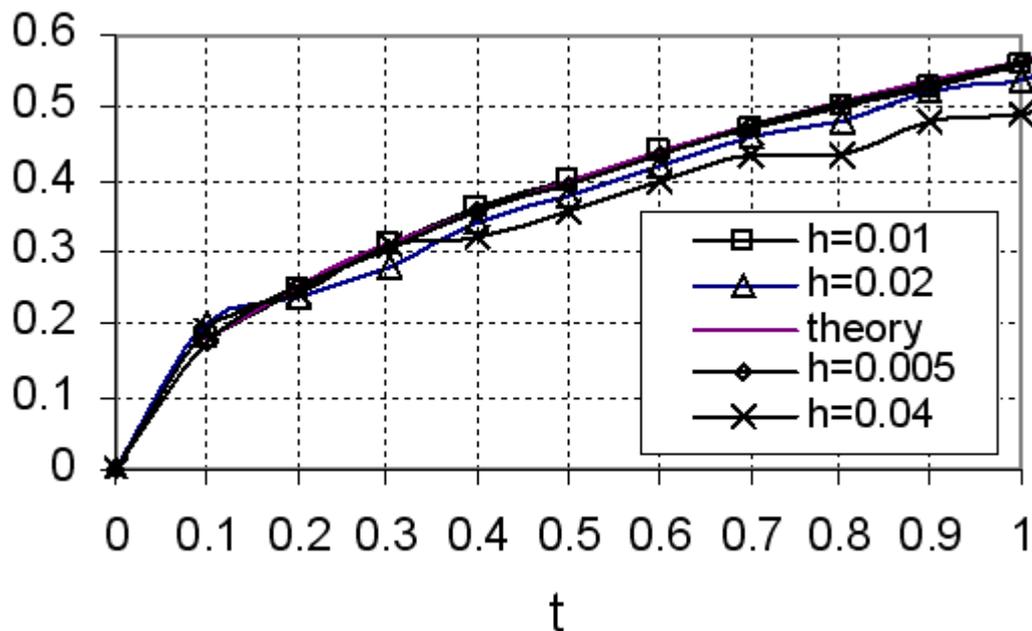
## Оценка влияния схемной вязкости

Коэффициенты схемной вязкости для расчетов на разных сетках

$h$	0.005	0.01	0.02	0.04
$\mu_{st}$	0.00125	0.0025	0.005	0.01

Коэффициент молекулярной вязкости

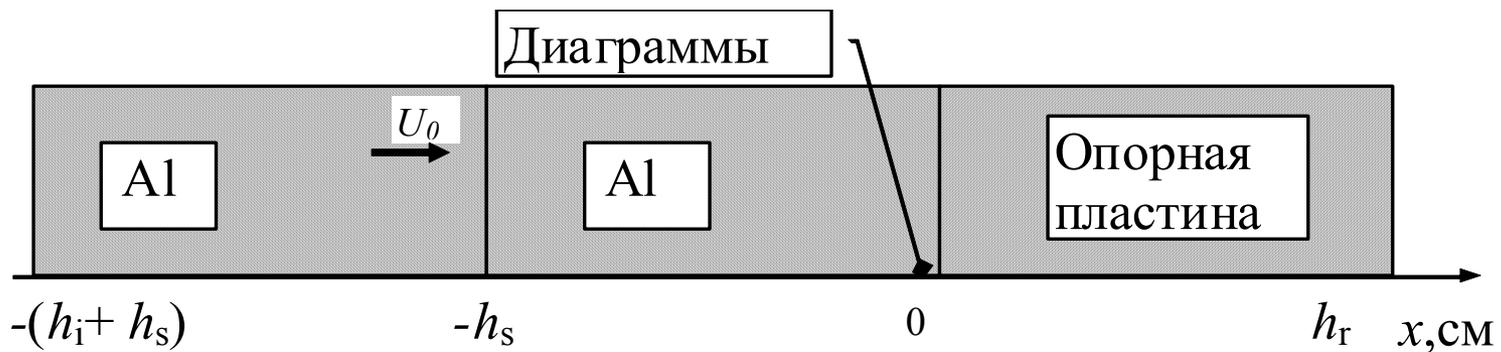
$$\eta = 0.005$$



## 2. Задача о размытии фронта ударной волны

### Постановка задачи

Эксперимент: Johnson J.N., Barker L.M., 1969.



- скорость удара:  $U_0 = 0.4808$  км/с;
- неподвижная сетка с  $h = 0.002, 0.001, 0.0005$ ;
- коэффициент молекулярной вязкости  $\eta = 0.01$ ;
- $h_i = h_s = h_r = 1.223$  см.

В опытах и расчетах снимались  $U(t)$  КГ «Al – опорная пластина».

По этим зависимостям, как в опытах, так и в расчетах можно вычислить времена размытия УВ. Эта величина и является основным исследуемым параметром.

# Задача о размытии фронта ударной волны

## Технология численного исследования

В расчетах на размытие УВ кроме молекулярной вязкости влияют все четыре дополнительные вязкости:

- стационарная схемная вязкость,
- квадратичная искусственная вязкость, введенная для моделирования УВ,
- линейная искусственная вязкость, работающая на фронте и за фронтом УВ.
- линейная нестационарная вязкость в предвычисленном давлении.

В предположении суперпозиции влияние некоторых из этих вязкостей можно оценить из расчетов.

- Квадратичная вязкость размазывает УВ на  $\sim 4$  ячейки, что позволяет вычислить временной интервал размазывания для любой сетки при известной скорости УВ ( $\Delta t \sim h$ ).
- Линейную вязкость можно оценить, включив ее в расчет и сравнивая результат с расчетом без нее на одной и той же сетке.
- Аналогично для молекулярной вязкости.

Таким образом, имея оценки для указанных вязкостей, мы можем из общей вязкости разностной схемы вычленивать и схемную вязкость. В соответствии с этим, задачу можно исследовать сериями расчетов.

# Задача о размытии фронта ударной волны

## Постановка расчетов

Номер расчета	Число ячеек	Величина шага времени $\tau$	Линейная вязкость	Физическая вязкость $\eta = 0.01$
1	n	0.00012	есть	есть
2	2n	0.00006	-	есть
3	4n	0.00003	-	есть
4	n	0.00012	есть	-
5	n	0.00012	есть	есть
6	2n	0.00006	есть	-
7	2n	0.00006	есть	есть
8	2n	0.00006	-	-
9	n	0.00006	есть	-

Данные, необходимые для оценок схемной вязкости: скорость звука  $c \approx 5.5$ , массовая скорость  $u \approx 0.25$ , скорость УВ  $D \approx 5.75$ , величина счетного шага  $\tau$  приведена в таблице.

# Задача о размытии фронта ударной волны

## Влияние молекулярной вязкости

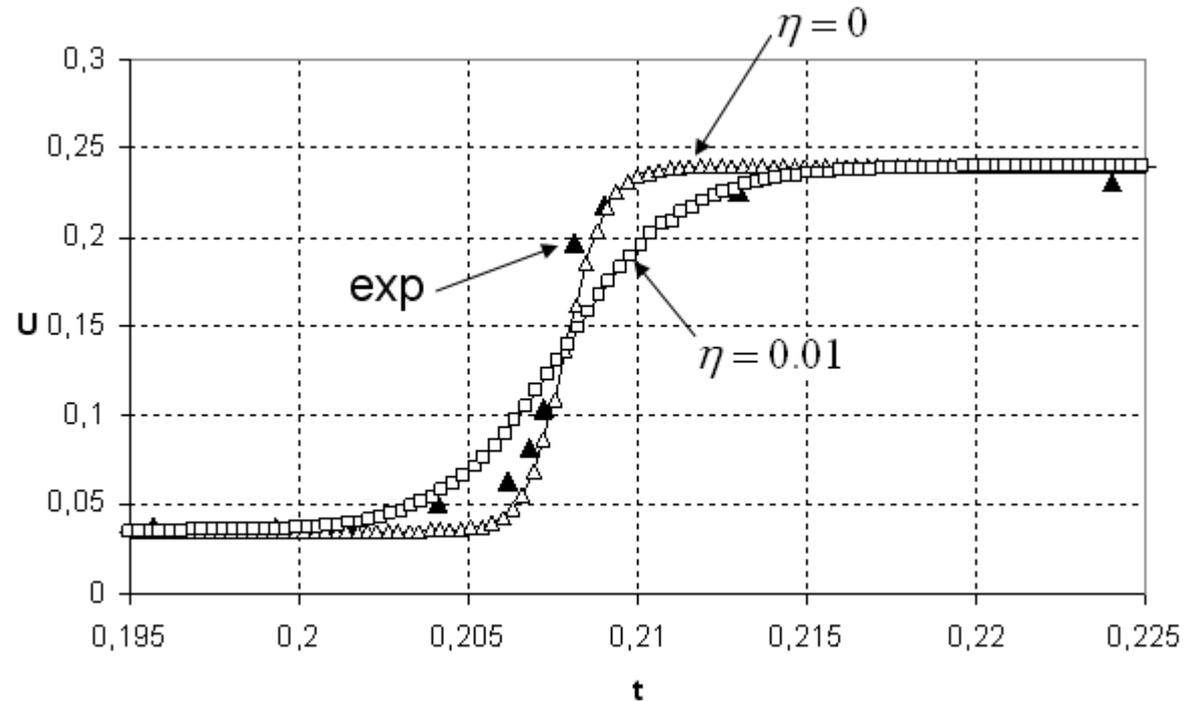
Действие молекулярной вязкости можно оценить, сравнивая расчеты с молекулярной вязкостью и без нее.

Интервал размазывания скорости

$\eta = 0$	$\Delta t \sim 0.0059$
$\eta = 0.01$	$\Delta t \sim 0.0159$

$$\Delta t \sim 0.01 = (0.0159 - 0.0059)$$

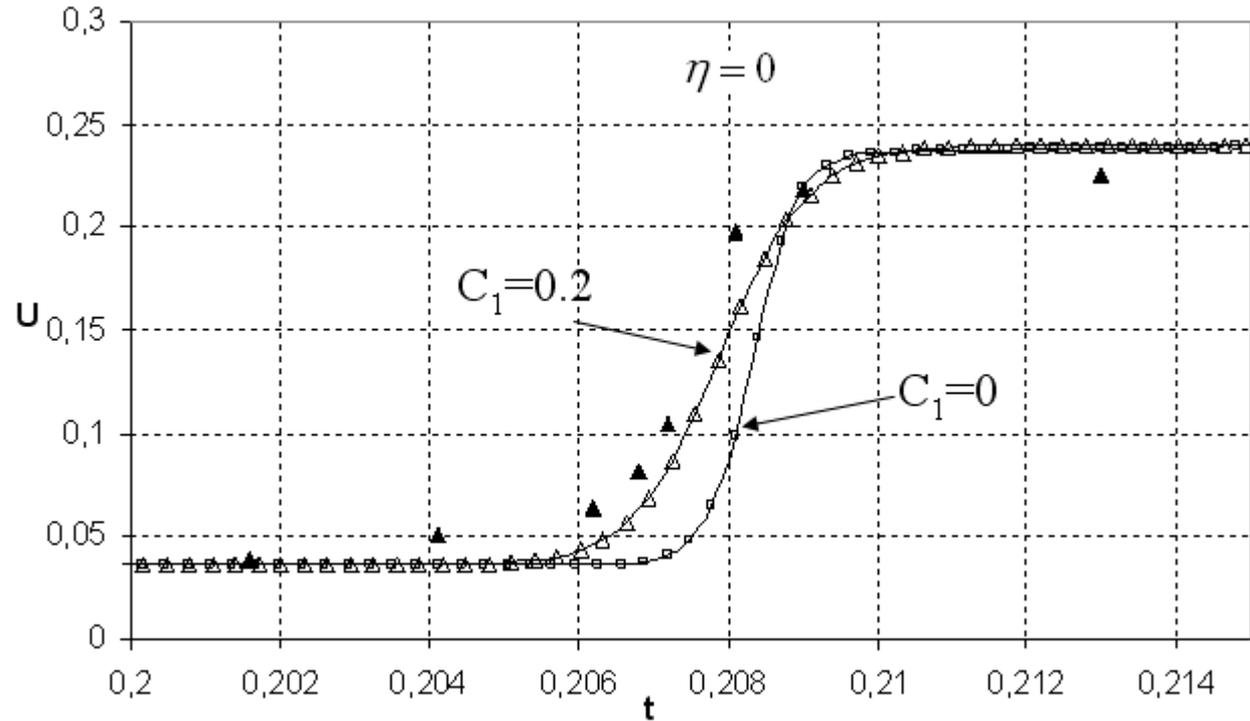
$$\Delta t_{\text{exp}} = 0.01$$



**Молекулярная вязкость в расчетах учитывается корректно**

# Задача о размытии фронта ударной волны

## Влияние линейной вязкости



$$\Delta t \sim 0.0029 = (0.0059 - 0.0030)$$

Результаты расчетов без молекулярной вязкости на сетке  $2n$  с линейной вязкостью и без нее в сравнении с экспериментальными данными.

# Задача о размытии фронта ударной волны

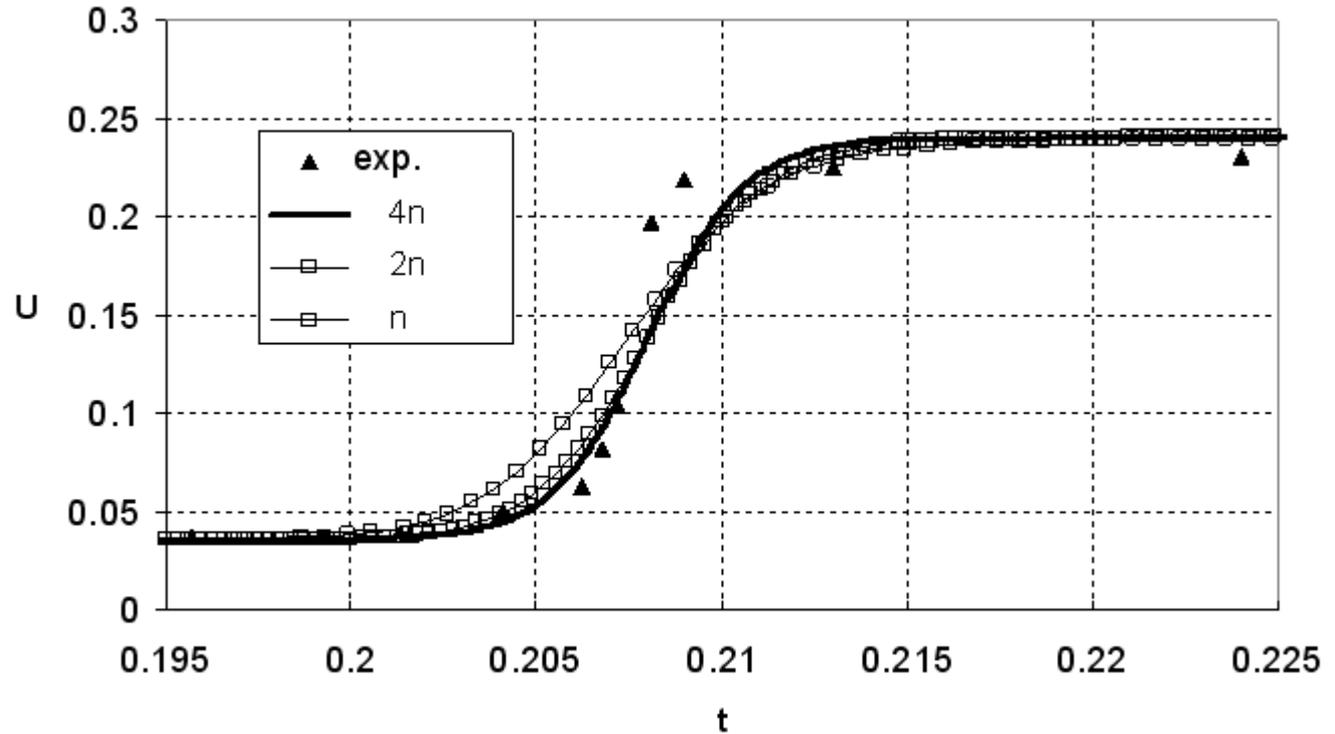
## Расчеты на сходимость без линейной вязкости

Вязкости:

1) Молекулярная

2) Схемная

3) Квадратичная



Видно, что в расчетах **имеется сходимость** к эксперименту с уменьшением размеров ячеек, то есть с уменьшением квадратичной и схемной вязкостей.

# Задача о размытии фронта ударной волны

## Сводная таблица

расчет	$\Delta t_{\text{расчет}}$	$\Delta t_{\text{сумма}}$	$\Delta t_{\text{ф}}$	$\Delta t_{\text{кв}}$	$\Delta t_{\text{лин}}$	$\Delta t_{\text{нс}}$	$\Delta t_{\text{с}}$
1 (n)	0.0166	0.0180	0.01	0.0014	0	0.0058	0.00068
2 (2n)	0.0130	0.0140	0.01	0.0007	0	0.0029	0.00034
3 (4n)	0.0114	0.0120	0.01	0.00035	0	0.00145	0.00017
4 (n)	0.0105	0.0118	0	0.0014	0.0039	0.0058	0.00068
5 (n)	0.0205	0.0218	0.01	0.0014	0.0039	0.0058	0.00068
6 (2n)	0.0059	0.0068	0	0.0007	0.0029	0.0029	0.00034
7 (2n)	0.0159	0.0168	0.01	0.0007	0.0029	0.0029	0.00034
8 (2n)	0.0030	0.0039	0	0.0007	0	0.0029	0.00034
9 (n)	0.0076	0.0089	0	0.0014	0.0039	0.0029	0.00068
Эксперимент	0.01	-	-	-	-	-	-

$\Delta t_{\text{расчет}}$  – расчетное значение,  $\Delta t_{\text{сумма}}$  – суммарное значение за счет всех вязкостей,  $\Delta t_{\text{ф}}$  - за счет физической вязкости,  $\Delta t_{\text{кв}}$ - за счет квадратичной вязкости,  $\Delta t_{\text{лин}}$  - за счет линейной вязкости,  $\Delta t_{\text{нс}}$  - за счет нестационарной вязкости,  $\Delta t_{\text{с}}$  - за счет стационарной вязкости

# Заключение

Приведена теоретическая оценка аппроксимационной вязкости на основе рассмотрения первого дифференциального приближения разностной схемы.

Проведены расчеты, которые показали корректность использования теоретической оценки схемной вязкости в расчетах конкретных задач.

Это позволяет определять критические размеры ячеек, больше которых не имеет смысла использовать при проведении расчетов течений вязкой жидкости, так как в этом случае влияние схемной вязкости будет сравнимо с эффектами физической вязкости.