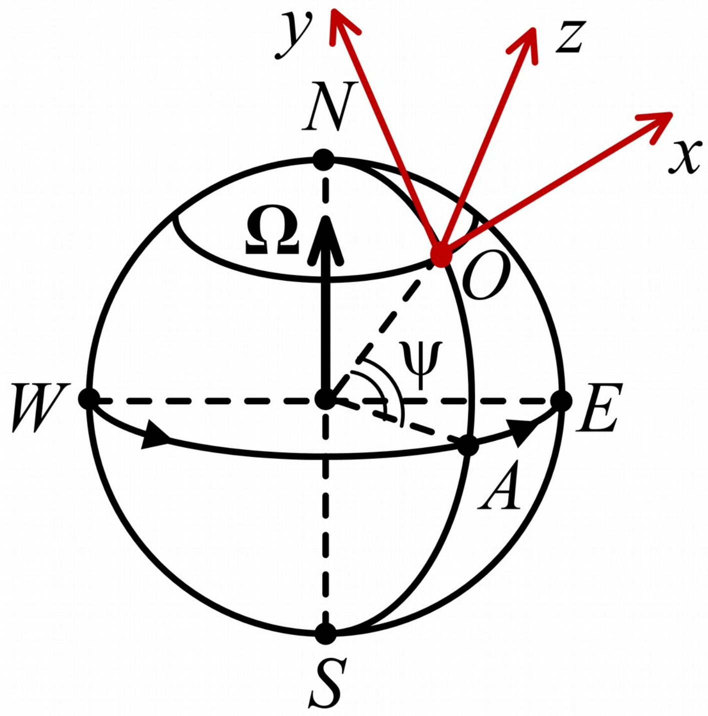
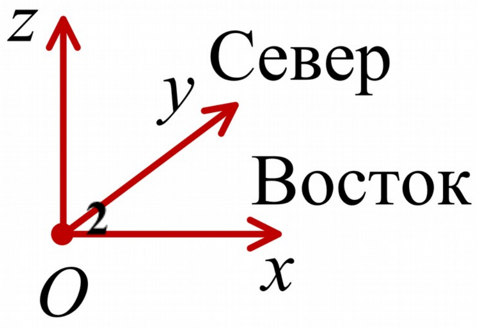
Международная конференция «XIII Забабахинские научные чтения» (ЗНЧ-2017)

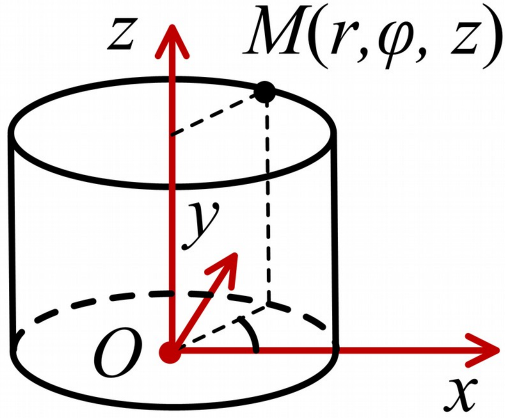
С.П. Баутин, С.Л. Дерябин, А.В. Мезенцев

Уральский государственный университет путей сообщения

Математическое моделирование стационарных конических течений, примыкающих к области покоя

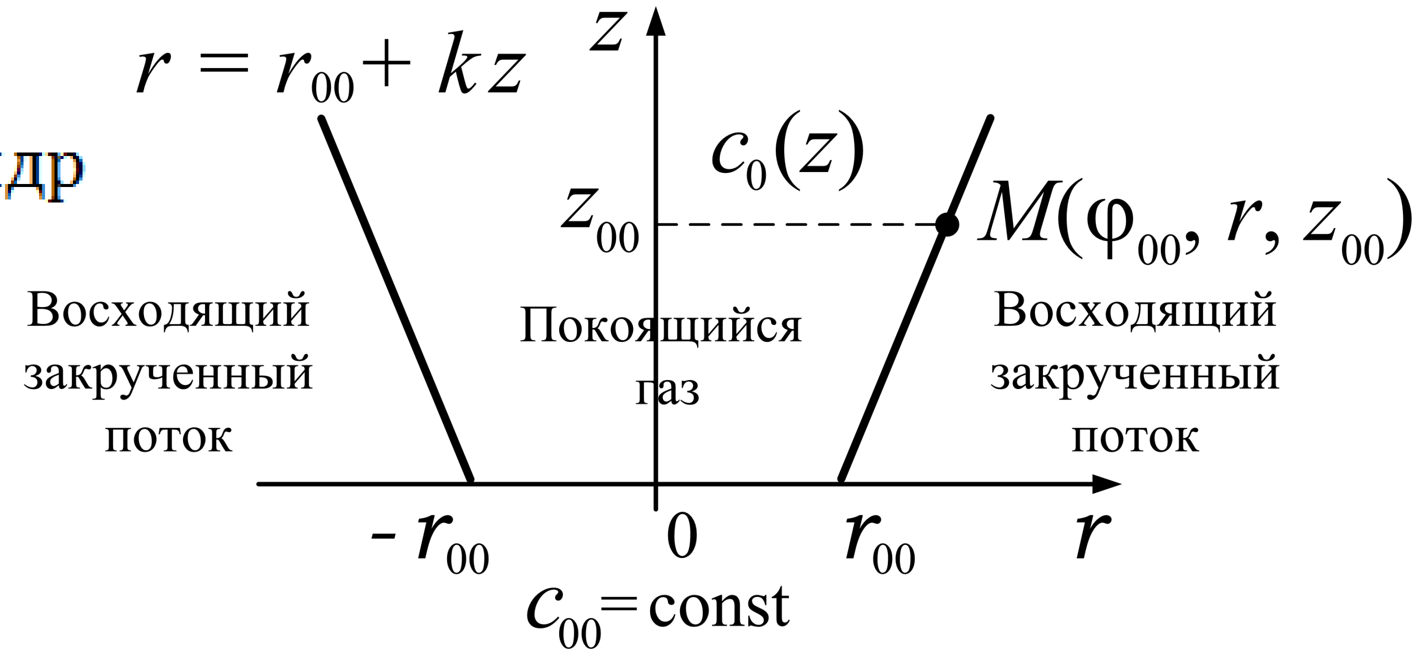

y
z
x
N
Ω
O
ψ
W
E
A
S


z
Север
y
Восток
2
O
x


z
M(r,φ, z)
y
O
x

$k \geq 0$

$k = 0$ цилиндр



[1] Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

[2] Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.

[3] Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 215 с.

Постановка задачи

$$
\begin{cases}
uc_r + \dfrac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \dfrac{(\gamma-1)}{2}c\left(u_r + \dfrac{u}{r} + \dfrac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0,\\[2ex]
uu_r + \dfrac{v}{r}u_\varphi - \dfrac{v^2}{r} + wu_z + \dfrac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw\cos\varphi,\\[2ex]
uv_r + \dfrac{uv}{r} + \dfrac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \dfrac{2}{(\gamma-1)}\dfrac{1}{r}cc_\varphi = -au + bw\sin\varphi,\\[2ex]
uw_r + \dfrac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \dfrac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu\cos\varphi - bv\sin\varphi - g.
\end{cases}
\tag{1}
$$

$a = 2\Omega\sin\psi$, $b = 2\Omega\cos\psi$, Ω – модуль угловой скорости вращения Земли, ψ – широта точки $(r = 0,\, z = 0)$ на поверхности Земли, $g = \mathrm{const} > > 0$ – ускорение свободного падения. $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа;

Будем искать конические характеристики этой системы в виде

$$r = r_0(z) \equiv r_{00} + kz, \qquad r_{00},\ k - \mathrm{const}; r_{00} > 0.$$

В системе (1) введем новую независимую переменную $\eta = r - r_0(z)$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ &\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi'}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'} - k\frac{\partial}{\partial \eta}. \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} (u-kw)c_\eta + \dfrac{v}{\eta + r_0}c_\varphi + wc_z + \dfrac{(\gamma-1)}{2}c(u_\eta - kw_\eta + \dfrac{u+v_\varphi}{\eta+r_0} + \\ +w_z) = 0, \\ (u-kw)u_\eta + \dfrac{v}{\eta+r_0}u_\varphi - \dfrac{v^2}{\eta+r_0} + wu_z + \dfrac{2}{(\gamma-1)}cc_\eta = \\ = av - bw\cos\varphi, \\ (u-kw)v_\eta + \dfrac{uv}{\eta+r_0} + \dfrac{v}{\eta+r_0}v_\varphi + wv_z + \dfrac{2}{(\gamma-1)}\dfrac{1}{\eta+r_0}cc_\varphi = \\ = -au + bw\sin\varphi, \\ (u-kw)(w_\eta + ku_\eta) + \dfrac{v}{\eta+r_0}(w_\varphi + ku_\varphi) + w(w_z + ku_z) + \\ + \dfrac{2}{(\gamma-1)}cc_z = \dfrac{kv^2}{\eta+r_0} + b(u-kw)\cos\varphi + (ka - b\sin\varphi)v - g. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} u-kw & \frac{(\gamma-1)}{2}c & 0 & -\frac{(\gamma-1)k}{2}c \\ \frac{2}{(\gamma-1)}c & u-kw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-kw & 0 \\ -\frac{2k}{(\gamma-1)}c & 0 & 0 & u-kw \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(u-kw)^2[(u-kw)^2 - c^2(1+k^2)] = 0.}$$

1. При соотношении между параметрами газа

$$u = kw$$

получаем, что поверхность $\eta = 0$ есть характеристика кратности 2;

Считая известной функцию $c_0 = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma - 1)z}$ поставим следующие начальные условия на $\eta = 0$:

$$\begin{cases} c|_{\eta=0} = c_0(z) = \sqrt{c_{00}^2 - g(\gamma - 1)z}; \\ \boxed{u|_{\eta=0} = kw_0(\varphi, z)}; \\ v|_{\eta=0} = v_0(\varphi, z); \\ w|_{\eta=0} = w_0(\varphi, z). \end{cases} \qquad (3)$$

Определим значения v_0, w_0 из условий разрешимости характеристической задачи Коши (2), (3) . Для этого в системе (2). положим $\eta = 0$ и при обозначениях

$$c_r|_{\eta=0} = c_1; \quad u_r|_{\eta=0} = u_1; \quad w_r|_{\eta=0} = w_1,$$

получим следующие четыре соотношения:

$$
\begin{cases}
w_0 c_{0z} + \dfrac{(\gamma-1)}{2} c_0 \left(u_1 - k w_1 + \dfrac{1}{r_0}(v_{0\varphi} + k w_0) + w_{0z} \right) = 0, \\[2ex]
\dfrac{2}{(\gamma-1)} c_0 c_1 = -\dfrac{k v_0 w_{0\varphi}}{r_0} - k w_0 w_{0z} + a v_0 - b\cos\varphi w_0 + \dfrac{1}{r_0(z)} v_0^2, \\[2ex]
\dfrac{1}{r_0(z)} v_0 v_{0\varphi} + w_0 v_{0z} = (-ak + b\sin\varphi) w_0 - \dfrac{k v_0 w_0}{r_0(z)}, \\[2ex]
\dfrac{1}{r_0(z)} v_0 (w_{0\varphi} + k u_{0\varphi}) + w_0 (w_{0z} + k u_{0z}) = k\dfrac{v_0^2}{r_0(z)} + (ak - b\sin\varphi) v_0.
\end{cases}
$$

Последние два равенства, входящие в систему   являются необходимыми условиями разрешимости характеристической задачи Коши и из них следует, что функции v_0 и w_0, нельзя брать произвольными.

$$\boxed{u_{0\varphi} = k w_{0\varphi}, \quad u_{0z} = k w_{0z}}$$

$$
\boxed{
\begin{cases}
v_{0\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} v_{0z} = (-ka + b\sin\varphi)\dfrac{r_0 w_0}{v_0} - k w_0, \\[2ex]
w_{0\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} w_{0z} = \frac{1}{k^2+1}(ka - b\sin\varphi) r_0 + \frac{k}{k^2+1} v_0.
\end{cases}
}
\qquad (4)
$$

Пусть для задачи (2), (3) заданы два дополнительных условия

$$\begin{cases} v(\eta,\varphi,z)|_{z=z_{00}} = v^0(\eta,\varphi); \\ w(\eta,\varphi,z)|_{z=z_{00}} = w^0(\eta,\varphi); \end{cases} \quad (5)$$

с аналитическими в окрестности точки $(\eta = 0, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00})$ функциями $v^0(\eta, z)$, $w^0(\eta, z)$, которые удовлетворяют условиями согласования

$$\begin{cases} v^0(\eta,z)|_{\eta=0} = v_0(\varphi,z)|_{z=z_{00}} = v_{00}(\varphi); \\ w^0(\eta,z)|_{\eta=0} = w_0(\varphi,z)|_{z=z_{00}} = w_{00}(\varphi). \end{cases}$$

Для задачи (2), (3), (5) справедлива следующая теорема

Теорема. *Задача* (2), (3), (5) *имеет в некоторой окрестности точки* $(\eta = 0, \varphi = \varphi_{00}, z = z_{00})$ *единственное аналитическое решение.*

[9] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

Построение аналитического решения задачи (2), (3), (5)

С помощью введения параметра τ, система из двух уравнений с частными производными (4) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\tau} = 1; \qquad \dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{r_0(z)w_0}{v_0}; \\[2ex] \dfrac{dv_0}{d\tau} = (-ak + b\sin\varphi)\dfrac{r_0(z)w_0}{v_0} - kw_0; \\[2ex] \dfrac{dw_0}{d\tau} = \dfrac{r_0(z)}{1+k^2}(ak - b\sin\varphi) + \dfrac{k}{1+k^2}v_0. \end{cases}}$$

$$\boxed{r_0(z) = r_{00} + kz,}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi|_{\tau=0} &= \varphi_{00}, \\ z|_{\tau=0} &= z_{00}, \\ v_0|_{\tau=0} &= v_{00}(\varphi_{00}), \\ w_0|_{\tau=0} &= w_{00}(\varphi_{00}). \end{aligned}}$$

Умножая второе уравнение системы на $\frac{1}{k^2+1}v_0$, а третье уравнение на w_0 и складывая их, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\varphi}\left(v_0^2 + (k^2+1)w_0^2\right) = 0,$$

которое имеет общее решение, удовлетворяющее следующему равенству:

$$v_0^2 + (k^2+1)w_0^2 = C^2 \qquad (6)$$

Следовательно на контактной поверхности $r = r_{00} + kz$ вдоль бихарактеристики системы имеет место

Закон сохранения. *Если уменьшается (увеличивается) модуль вертикальной составляющей вектора скорости газа, то увеличивается (уменьшается) модуль окружной составляющей вектора скорости газа в соответствии с формулой* (6) .

$$\boxed{v_0^2 + (k^2 + 1)w_0^2 = C^2}$$

Решение задачи (2), (3) будем строить в виде ряда по степеням η.

$$\mathbf{f}(\eta, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_\mathbf{k}(\varphi, z)\frac{\eta^k}{k!}, \qquad \mathbf{f} = \{c, u, v, w\}. \qquad (7)$$

$$
\begin{cases}
u_{n+1} = kw_{n+1} - w_{nz} - \dfrac{v_{n\varphi} + kw_n}{r_0} - \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_n c_{0z} + F_{1n}(\varphi, z); \\[2ex]
\dfrac{2c_0}{(\gamma-1)} c_{n+1} = -\dfrac{kv_0 w_{n\varphi}}{r_0} - kw_0 w_{nz} + (a - \dfrac{kw_{0\varphi} - 2v_0}{r_0}) v_n - \\[2ex]
-(b\cos\varphi - kn(\frac{1}{r_0}(v_{0\varphi} + kw_0) + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z})) w_n + F_{2n}(\varphi, z); \\[2ex]
v_{n\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} v_{nz} = n\dfrac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) v_n - \\[2ex]
-\dfrac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \dfrac{kv_0}{r_0}) w_n + F_{3n}(\varphi, z); \\[2ex]
w_{n\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} w_{nz} = (-\dfrac{w_{0\varphi}}{v_0} + \frac{1}{1+k^2}(ka - b\sin\varphi)\dfrac{r_0}{v_0} + \frac{2k}{1+k^2}) v_n + \\[2ex]
+\dfrac{r_0}{v_0}[(n-1)w_{0z} + \dfrac{n}{r_0}(v_{0\varphi} + kw_0) + \dfrac{2n}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}] w_n + F_{4n}(\varphi, z).
\end{cases}
\tag{10}
$$

Здесь $F_{in}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$ – функции, известным образом зависящие от ранее найденных коэффициентов ряда (7)

Вводя в третьем и четвертом уравнении системы (10) характеристический параметр τ, получим

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n}{d\tau} - n\dfrac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0}w_0c_{0z})v_n + \dfrac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ak \quad - \\ -b\sin(\tau+\varphi_{00}) + \dfrac{k\,v_0}{r_0})w_n = F_{31}(\tau+\varphi_{00}, z_0(\tau+\varphi_{00})); \\ \dfrac{dw_n}{d\tau} + (\dfrac{w_{0\varphi}}{v_0} - \dfrac{1}{1+k^2}(ak \quad - b\sin(\tau+\varphi_{00}))\dfrac{r_0}{v_0} - \dfrac{2\,k}{1+k^2})v_n - \\ -\dfrac{r_0}{v_0}[(n-1)w_{0z} + \dfrac{n}{r_0}(v_{0\varphi} + \ k\ w_0) + \dfrac{2n}{(\gamma-1)c_0}w_0c_{0z}]w_n = \\ = F_{4n}(\tau+\varphi_{00}, z_0(\tau+\varphi_{00})). \end{cases} \tag{11}$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \qquad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}.$$

Начальные условия для систем (11) получаются из условий (5), если функции $v^0(r,\varphi)$, $w^0(r,\varphi)$ разложить в ряд по степеням $r - r_{00}$.

$$\mathbf{f^0}(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f^0}_n(\varphi)\frac{\eta^n}{n!}, \qquad \mathbf{f^0} = \{v^0, w^0\}.$$

В параметрической форме начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = \varphi_{00}, \qquad z(0) = z_{00}, \\ &v_n(0) = v_\eta^{0(n)}(0,\varphi_{00}), \qquad w_n(0) = w_\eta^{0(n)}(0,\varphi_{00}). \end{aligned}$$

Численное моделирование течения газа на вертикальной контактной повехности

$k = 0$ цилиндр

Для построения конкретных течений газа на контактной поверхности $r = r_{00}$ и в ее окрестности были выбраны следующие безразмерные величины:

$$\gamma = 1.4, \;\; b = 0.001379, \;\; r_{00} = 1, \;\; z_{00} = 0.00027, \;\; c_{00} = 1, \;\; v_{00} = 0.159, \;\; w_{00} = 0.0024.$$

При введении безразмерных переменных в качестве масштабов скорости и расстояния взяты соответственно $\frac{1}{3}10^3$ м/с и 3650 м, тогда использованные входные данные соответствуют тропическомуциклону средней интенсивности, находящемуся на широте $\psi = \frac{\pi}{6}$ [3]. В восходящем закрученном потоке с приведенными значениями входных констант частица газа, сделав полный оборот по поверхности цилиндрической контактной поверхности с размерным значением ее радиуса $r_{00} = 3650$ м, поднялась на высоту в 3462 м.

$$\varphi = \tau + \varphi_{00}, \qquad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_{00} w_0}{v_0}.$$

$$w_0(\varphi) = b r_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - b r_{00} \cos(\varphi_{00}),$$

$$v_0(\varphi) = \sqrt{C^2 - (b r_{00} \cos(\varphi) + w_{00} - b r_{00} \cos(\varphi_{00}))^2}.$$

$$C = \sqrt{v_{00}^2 + w_{00}^2}$$

На Рис. 1 приведены бихарактеристики $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$, при численном построении которых с шагом $\Delta\tau = 0.001$ выбирались точки (φ_k, z_k): фиксировалось φ_{00}, вычислялось $\varphi_k = \tau_k + \varphi_{00}$ и $z_k = z_0(\tau_k, \varphi_{00})$.

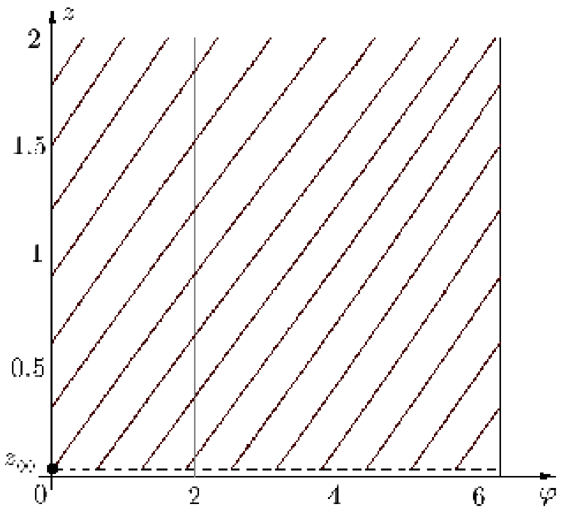


Рис. 1

Таким образом была построена неравномерная сетка для переменных φ, z. В узлах этой сетки и вычислялись значения функций $v_0(\varphi, z)$, $w_0(\varphi, z)$. В результате были численно построены интегральные поверхности для параметров газа на контактном разрыве. На рис. 2, 3 приведены интегральные поверхности для функций $v_0(\varphi, z)$, $w_0(\varphi, z)$.

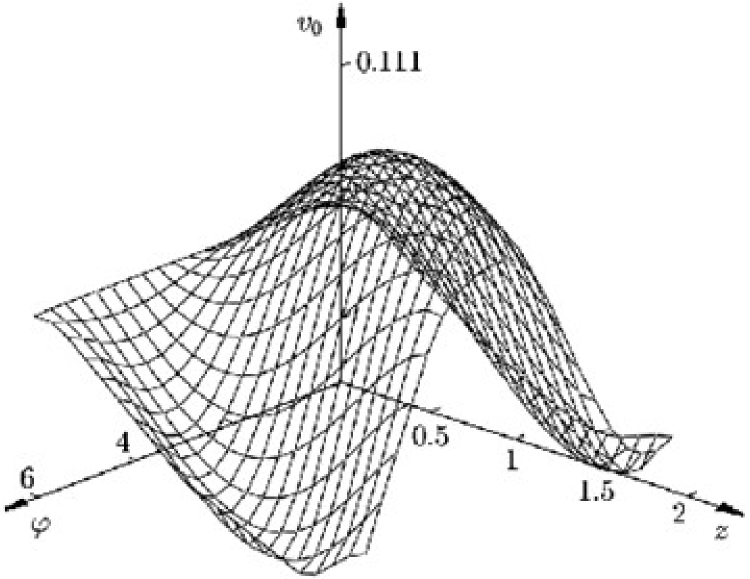


Рис.2

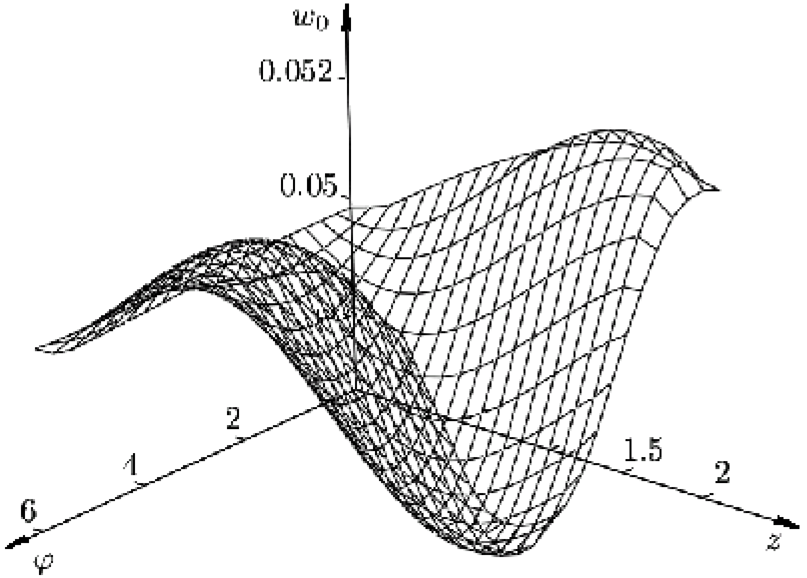


Рис. 3

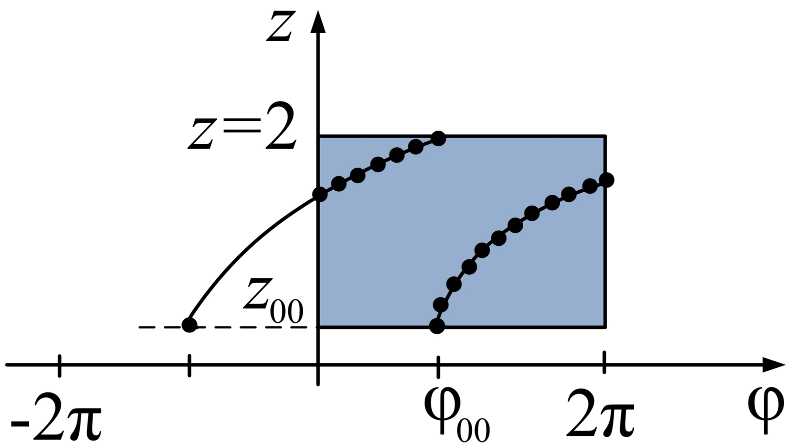


Рис. 4

На рис. 5, 6 приведены интегральные поверхности для выводящих с контактной поверхности производных $c_1(\varphi, z)$, $u_1(\varphi, z)$, также численно построенные в узлах упомянутой сетки.

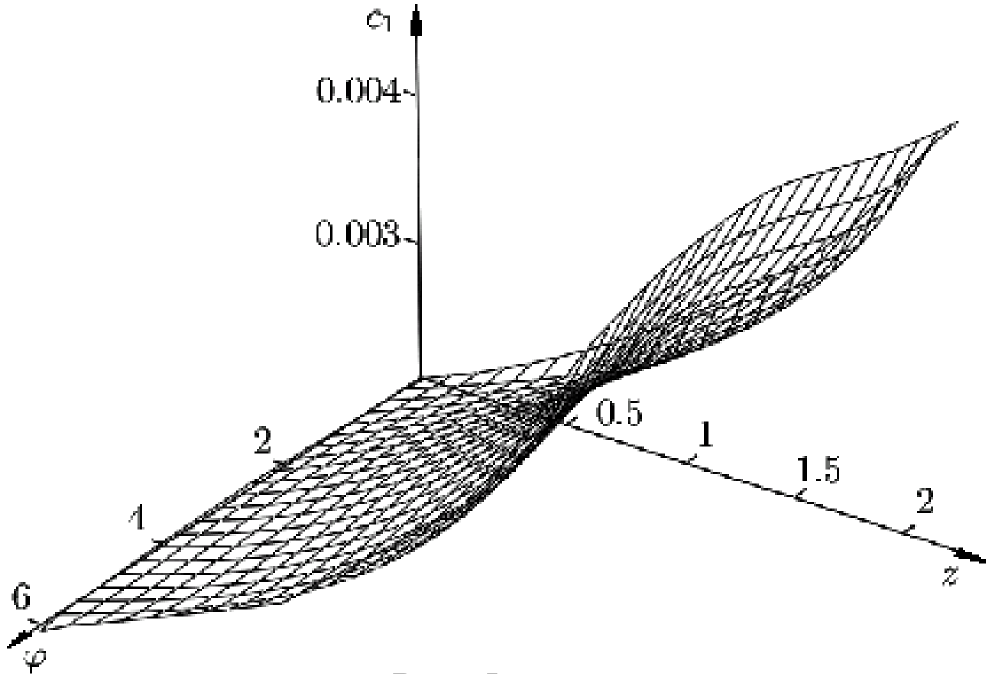


Рис. 5

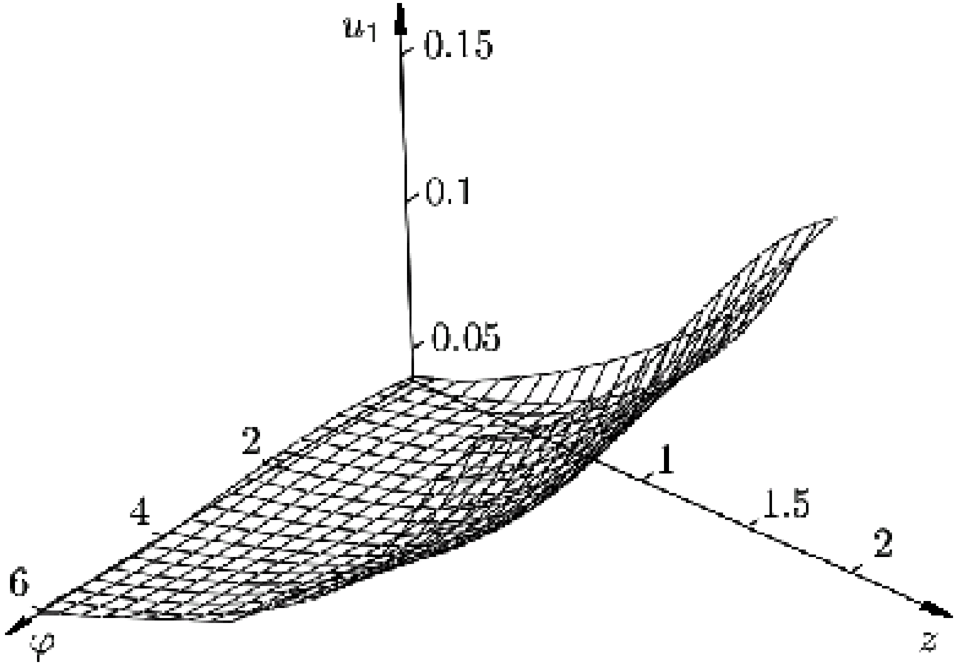


Рис. 6

Список литературы

[1] **Баутин С.П.** Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

[2] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Москва: Мир, 1964. 830 с.

[3] **Баутин С.П., Обухов А.Г.** Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.

Спасибо за внимание!

Нулевые коэффициенты ряда (7) определились как функции двух параметров τ и φ_{00}. Чтобы получить эти коэффициенты как функции переменных z и φ, то есть из бихаратеристик построить интегральные поверхности, необходимо параметры τ и φ_{00} выразить через переменные z и φ.

Якобиан преобразования (18) вычисляется по следующим формулам

$$J = \begin{vmatrix} \varphi_\tau & \varphi_{\varphi_{00}} \\ z_{0\tau} & z_{0\varphi_{00}} \end{vmatrix} = z_{0\varphi_{00}} - z_{0\tau}$$

Вычислим $z_{0\varphi_{00}}$

$$z_{0\varphi_{00}} = r_{00} \int_0^\tau \left(\frac{w_0}{v_0}\right)'_{\varphi_{00}} d\tau.$$

Поскольку $J|_{\tau=0} \neq 0$, то в окрестности точки $(z = z_{00},\ \varphi = \varphi_{00})$ единственным образом определяются функции

$$\tau = \varphi - f(\varphi, z), \qquad \varphi_{00} = f(\varphi, z).$$

Для вычисления производных сначала продифференцируем соотношение $z = z_0(\tau, \varphi_{00})$ по φ и z, имеем

$$0 = z_{0\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + z_{0\varphi_{00}}\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial\varphi} = z_{0\tau}(1 - f_\varphi) + z_{0\varphi_{00}} f_\varphi = z_{0\tau} + J f_\varphi,$$

$$1 = z_{0\tau}\frac{\partial\tau}{\partial z} + z_{0\varphi_{00}}\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial z} = z_{0\tau}(-f_z) + z_{0\varphi_{00}} f_z = J f_z.$$

Из этих соотношений получаем

$$f_\varphi = -\frac{z_{0\tau}}{J} = -\frac{r_{00}w_0}{v_0}\frac{1}{J}, \qquad f_z = \frac{1}{J}.$$

Тогда производные по φ и z будут вычисляются по следующим формулам

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\varphi_{00}}\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial\tau} + f_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_{00}} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial\varphi_{00}}\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial z} = f_z\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_{00}} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right). \tag{8}$$

$$
\begin{cases}
u_2 = kw_2 - w_{1z} - \dfrac{v_{1\varphi} + kw_1}{r_0(z)} - \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_1 c_{0z} + F_{11}(\varphi, z); \\[2ex]
\dfrac{2c_0}{(\gamma-1)} c_2 = -\dfrac{kv_0 w_{1\varphi}}{r_0(z)} - kw_0 w_{1z} + (a - \dfrac{kw_{0\varphi} - 2v_0}{r_0(z)}) v_1 - \\[2ex]
-(b\cos\varphi - k(\dfrac{1}{r_0(z)}(v_{0\varphi} + kw_0) + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z})) w_1 + F_{21}(\varphi, z); \\[2ex]
\dfrac{v_0}{r_0(z)} v_{1\varphi} + w_0 v_{1z} - (w_{0z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) v_1 + \\[2ex]
+(v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \dfrac{kv_0}{r_0(z)}) w_1 = F_{31}(\varphi, z); \\[2ex]
(1+k^2)(\dfrac{v_0}{r_0(z)} w_{1\varphi} + w_0 w_{1z}) + (\dfrac{w_{0\varphi}}{r_0(z)} - ak + b\sin\varphi - \dfrac{2kv_0}{r_0(z)}) v_1 - \\[2ex]
-(1+k^2)(\dfrac{v_{0\varphi} + kw_0}{r_0(z)} + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) w_1 = F_{41}(\varphi, z).
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv_1}{d\tau} - \dfrac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \dfrac{2c_{0z}}{(\gamma-1)c_0}w_0)v_1 + \\
+\dfrac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ar_{0z} - b\sin(\tau+\varphi_{00}) + \dfrac{r_{0z}v_0}{r_0})w_1 = \\
= \dfrac{r_0}{v_0}F_{31}(\tau+\varphi_{00}, z_0(\tau+\varphi_{00})); \\
\dfrac{dw_1}{d\tau} + \left(\dfrac{w_{0\varphi}}{v_0} - \dfrac{2r_{0z}}{(1+r_{0z}^2)} + \dfrac{1}{(1+r_{0z}^2)}(b\sin(\tau+\varphi_{00}) - ar_{0z})\dfrac{r_0}{v_0}\right)v_1 - \\
-(\dfrac{v_{0\varphi}+r_{0z}w_0}{v_0} + \dfrac{2c_{0z}}{(\gamma-1)c_0}\dfrac{r_0w_0}{v_0})w_1 = \\
= \dfrac{1}{(1+r_{0z}^2)}\dfrac{r_0}{v_0}F_{41}(\tau+\varphi_{00}, z_0(\tau+\varphi_{00})).
\end{cases}
$$

Соотношения на бихарактеристике сохраняются в виде

$$
\varphi = \tau + \varphi_{00}, \qquad \frac{dz}{d\tau} = \frac{r_0(z)w_0}{v_0}.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& u_2 = kw_2 - w_{1z} - \frac{v_{1\varphi} + kw_1}{r_0(z)} - \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_1 c_{0z} + F_{11}(\varphi, z); \\
& \frac{2c_0}{(\gamma-1)} c_2 = -\frac{kv_0 w_{1\varphi}}{r_0(z)} - kw_0 w_{1z} + (a - \frac{kw_{0\varphi} - 2v_0}{r_0(z)}) v_1 - \\
& -(b\cos\varphi - k(\frac{1}{r_0(z)}(v_{0\varphi} + kw_0) + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z})) w_1 + F_{21}(\varphi, z); \\
& \frac{v_0}{r_0(z)} v_{1\varphi} + w_0 v_{1z} - (w_{0z} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) v_1 + \\
& +(v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \frac{kv_0}{r_0(z)}) w_1 = F_{31}(\varphi, z); \\
& (1+k^2)(\frac{v_0}{r_0(z)} w_{1\varphi} + w_0 w_{1z}) + (\frac{w_{0\varphi}}{r_0(z)} - ak + b\sin\varphi - \frac{2kv_0}{r_0(z)}) v_1 - \\
& -(1+k^2)(\frac{v_{0\varphi} + kw_0}{r_0(z)} + \frac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) w_1 = F_{41}(\varphi, z).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{cases}
v_{1\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} v_{1z} = -\dfrac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \dfrac{2}{(\gamma-1)c_0} w_0 c_{0z}) v_1 - \\
-\dfrac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \dfrac{kv_0}{r_0}) w_1 + \dfrac{r_0}{v_0} F_{31}(\varphi, z); \\
w_{1\varphi} + \dfrac{r_0 w_0}{v_0} w_{1z} = -\left(\dfrac{w_{0\varphi}}{v_0} - \frac{2k}{(1+k^2)} + \frac{1}{(1+k^2)}(b\sin\varphi - ak)\dfrac{r_0}{v_0}\right) v_1 + \\
+((\dfrac{1}{v_0}(v_{0\varphi} + kw_0) + \dfrac{2c_{0z}}{(\gamma-1)c_0}\dfrac{r_0 w_0}{v_0}) w_1 + \frac{1}{(1+k^2)}\dfrac{r_0}{v_0} F_{41}(\varphi, z).
\end{cases}
\tag{9}
$$

После введения характеристического параметра система (9) сводятся к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{dz}{d\varphi} = \dfrac{r_0 w_0}{v_0} \\
\dfrac{dv_1}{d\varphi} = \dfrac{r_0}{v_0}(w_{0z} + \dfrac{2c_{0z}}{(\gamma-1)c_0} w_0) v_1 - \\
-\dfrac{r_0}{v_0}(v_{0z} + ak - b\sin\varphi + \dfrac{kv_0}{r_0}) w_1 + \dfrac{r_0}{v_0} F_{31} \\
\dfrac{dw_1}{d\varphi} = -\left(\dfrac{w_{0\varphi}}{v_0} - \frac{2k}{(1+k^2)} + \frac{1}{(1+k^2)}(b\sin\varphi - ak)\dfrac{r_0}{v_0}\right) v_1 + \\
+(\dfrac{v_{0\varphi} + kw_0}{v_0} + \dfrac{2c_{0z}}{(\gamma-1)c_0}\dfrac{r_0 w_0}{v_0}) w_1 + \frac{1}{(1+k^2)}\dfrac{r_0}{v_0} F_{41}
\end{cases}
$$

Постановка задачи

Будут рассматриваться стационарные изэнтропические течения политропного газа со следующими искомыми газодинамическими параметрами: $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука газа; u – радиальная составляющая вектора скорости газа; v – окружная составляющая вектора скорости газа; w – вертикальная составляющая вектора скорости газа. Здесь ρ – плотность газа, γ – показатель политропы газа и для воздуха обычно полагается $\gamma = 1.4$. Газодинамические параметры зависят от независимых переменных: r – полярного радиуса в плоскости xOy; φ – полярного угла; z – третьей пространственной координаты.