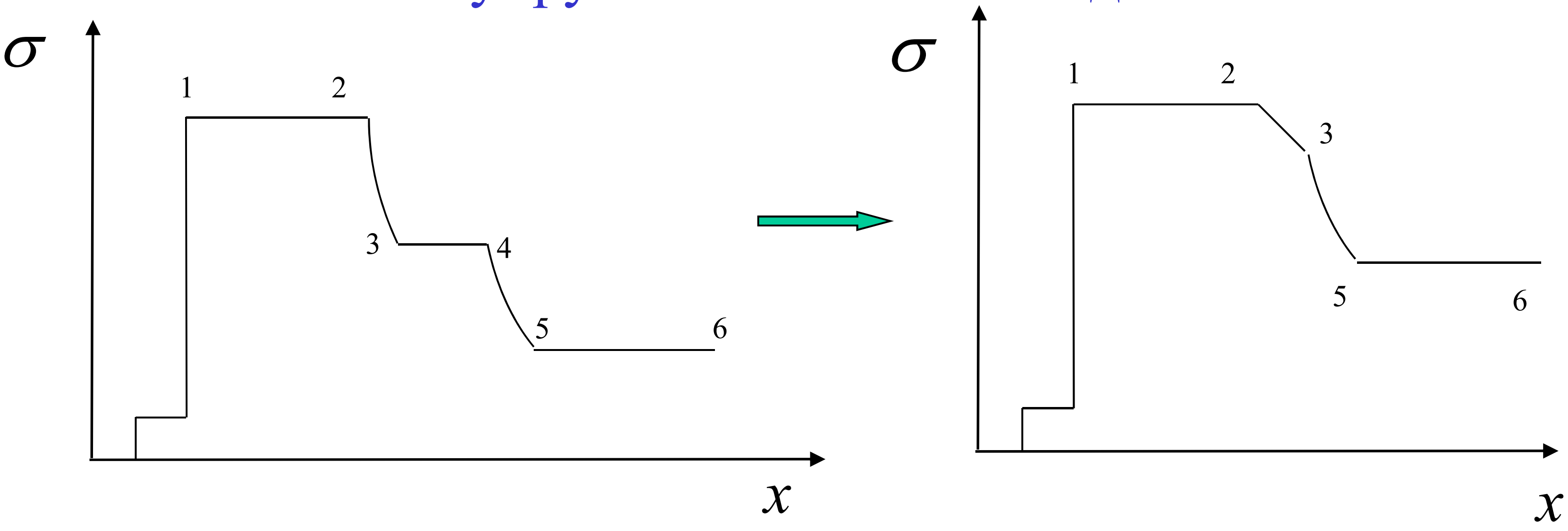
РОССИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЯДЕРНЫЙ ЦЕНТР -
ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ИМЕНИ АКАДЕМИКА Е.И.ЗАБАБАХИНА

О волне разрежения в упругопластическом материале

В.Н.Ногин

Забабахинские Научные Чтения
Снежинск, Россия
22 марта 2017

Профиль волны разрежения для различных упругопластических моделей



1-2, 3-4, 5-6 – постоянное течение,
2-3 – упругая волна разрежения,
4-5 – пластическая волна разрежения.

1. Идеальное УП
2. Упрочнение
3. Эффект Баушингера

Цель доклада – аналитическое описание структуры автомодельной волны разрежения произвольной амплитуды

Акустика

Lee Davison *Fundamentals of Shock Wave Propagation in Solids*

УРС $$P = (\gamma - 1)\rho E + c_{0k}^2 (\rho - \rho_{0k})$$

Определяющие уравнения

Плоское течение

$$\sigma = P(\rho, E) + S \qquad |S| \le S_0(\rho, E, \ldots) = \frac{2}{3} Y_0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial S}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dE'}{dt} = \dfrac{P}{\rho} \dfrac{d\rho}{dt} - S \dfrac{\partial U}{\partial x} \end{cases} \qquad E' = E + E_{уп}$$

Упругая область

$$\frac{dS}{dt} = -2\mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)$$

$$\rho \frac{dE_{уп}}{dt} = -S \frac{\partial U}{\partial x}$$

Пластическая область

$$S = \pm S_0$$

$$\frac{dE_{уп}}{dt} = 0$$

Определяющие уравнения

Плоское течение

Упругая область

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{\partial (P+S)}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{P}{\rho} \dfrac{d\rho}{dt} \\ \rho \dfrac{dE_{уп}}{dt} = \dfrac{S}{\rho} \dfrac{d\rho}{dt} \\ \dfrac{dS}{dt} = \mu \dfrac{4}{3\rho} \dfrac{d\rho}{dt} \end{cases}$$

Пластическая область

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -\rho \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dU}{dt} = -\dfrac{\partial \left(P \pm S_0\right)}{\partial x} \\ \rho \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{P \pm S_0}{\rho} \dfrac{d\rho}{dt} \end{cases}$$

$$P = \left(\gamma - 1\right) \rho E + c_{0k}^2 \left(\rho - \rho_{0k}\right)$$

Уравнения в автомодельном виде

Автомодельная переменная $\xi = \dfrac{x}{t}$

Упругая область

$$\begin{cases} (U-\xi)^2 \dfrac{d\rho}{d\xi} = \dfrac{d(P+S)}{d\rho}\dfrac{d\rho}{d\xi} = C_p^2 \dfrac{d\rho}{d\xi} \\ \dfrac{dP}{d\rho} = \dfrac{\gamma P + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho} = C_b^2 \text{ - объемная скорость звука} \\ \dfrac{dE_{уп}}{d\rho} = \dfrac{S}{\rho^2} \\ \dfrac{dS}{d\rho} = \mu \dfrac{4}{3\rho} \end{cases}$$

$$\xi = \frac{x}{t} = U \pm C_p \qquad U \mp \int C_p \frac{d\rho}{\rho} = const$$

$$C_p = \sqrt{C_b^2 + \frac{4\mu}{3\rho}}$$ - продольная скорость звука

Пластическая область

$$\begin{cases} (U-\xi)^2 \dfrac{d\rho}{d\xi} = \dfrac{dP}{d\rho}\dfrac{d\rho}{d\xi} = C_{пл}^2 \dfrac{d\rho}{d\xi} \\ \dfrac{dP}{d\rho} = \dfrac{\gamma P + \rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\rho} = C_{пл}^2 \neq C_b^2 \\ E_{уп} = const \end{cases}$$

$$\xi = \frac{x}{t} = U \pm C_{пл} \qquad U \mp \int C_{пл} \frac{d\rho}{\rho} = const$$

Решение для постоянного коэффициента Пуассона

Начальные условия на ударной волне: $P = P_0, S = S_0, \rho = \rho_0, U = U_0, E_{yn} = E_{yn}^0$

$$\mu = \frac{3}{2}\rho C_b^2 \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

Упругая область

$$\begin{cases}
P = \left(P_0 + \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{\gamma}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{\gamma} = \frac{\rho_0 C_{b0}^2}{\gamma}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - \frac{\rho_{0k} c_{0k}^2}{\gamma} \\
S = S_0 + \frac{2\rho_0 C_{b0}^2}{\gamma}\frac{1-2\nu}{1+\nu}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} - 1\right) \\
U = U_0 - \int_{\rho}^{\rho_0} C_p \frac{d\rho}{\rho} = U_0 + \frac{2C_{p0}}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right) \\
C_b = \sqrt{\left(\frac{\gamma P_0 + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_0}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}} = C_{b0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \text{ - объемная скорость звука} \\
C_{p0} = C_{b0}\sqrt{3\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)}
\end{cases}$$

Постоянное течение

$$\begin{cases}
P = P_1 = \frac{\rho_0 C_{b0}^2 - \rho_{0k} c_{0k}^2}{\gamma} - S_0 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \\
S = -S_0 \\
\rho = \rho_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma S_0}{\rho_0 C_{b0}^2}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
U_1 = U_0 + \frac{2C_{p0}}{\gamma - 1}\left(\left(1 - \frac{\gamma S_0}{\rho_0 C_{b0}^2}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1\right) \\
C_{b1} = \sqrt{\left(\frac{\gamma P_0 + \rho_{0k} c_{0k}^2}{\rho_0}\right)}\left(1 - \frac{\gamma S_0}{\rho_0 C_{b0}^2}\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}
\end{cases}$$

Решение для постоянного коэффициента Пуассона

Пластическая область

$$\begin{cases} P = \left(P_1 + \dfrac{\rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\gamma} \right) \left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma} - \dfrac{\rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\gamma} \\ S = -S_0 \\ E_{уп} = E_{уп}^1 \\ U = U_1 - \displaystyle\int_{\rho}^{\rho_1} C_{пл} \dfrac{d\rho}{\rho} = U_1 + \dfrac{2C_{пл1}}{\gamma - 1} \left(\left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} - 1 \right) \\ C_{пл} = \sqrt{\left(\dfrac{\gamma P_1 + \rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\rho_1} \right) \left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma - 1}} = \sqrt{\left(C_{b1}^2 - \dfrac{(\gamma - 1) S_0}{\rho_1} \right) \left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma - 1}} \\ C_{пл1} = \sqrt{\left(\dfrac{\gamma P_1 + \rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_0}{\rho_1} \right)} = \sqrt{\left(C_{b1}^2 - \dfrac{(\gamma - 1) S_0}{\rho_1} \right)} < C_{b1} \end{cases}$$

Скорость контактной границы

$$U_k = U_1 + \frac{2C_{пл1}}{\gamma - 1} \left(\left(\frac{\rho_{0k} c_{0k}^2 + S_0}{\rho_1 C_{b1}^2 - (\gamma - 1) S_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right)$$

Скорость распространения возмущений в пластической области меньше объемной скорости звука

Решение для среды с упрочнением

$$S = S_{00} + \alpha P$$

Пластическая область

$$\begin{cases} P = \left(P_1 + \dfrac{\rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_{00}}{\gamma - (\gamma - 1)\alpha} \right) \left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{\gamma - (\gamma - 1)\alpha} - \dfrac{\rho_{0k} c_{0k}^2 - (\gamma - 1) S_{00}}{\gamma - (\gamma - 1)\alpha} \\ S = -(S_{00} + \alpha P) \\ E_{уп} = E_{уп}^1 \\ U = U_1 - \displaystyle\int_{\rho}^{\rho_1} C_{пл} \frac{d\rho}{\rho} = U_1 + \frac{2C_{пл1}}{(1-\alpha)(\gamma - 1)} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\frac{(1-\alpha)(\gamma-1)}{2}} - 1 \right) \\ C_{пл} = \sqrt{\dfrac{d(P+S)}{d\rho}} = \sqrt{(1-\alpha)\left(C_{b1}^2 - \dfrac{(\gamma-1) S_{00}}{\rho_1} \right) \left(\dfrac{\rho}{\rho_1} \right)^{(1-\alpha)(\gamma-1)}} \\ C_{пл1} = \sqrt{(1-\alpha)\left(C_{b1}^2 - \dfrac{(\gamma-1) S_{00}}{\rho_1} \right)} \end{cases}$$

$$\frac{C_{пл}^2}{C_b^2} = (1-\alpha)\left(1 - \frac{(\gamma-1) S_{00}}{\rho_1 C_{b1}^2} \right) \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{-\alpha(\gamma-1)}$$

Скорость распространения возмущений на входе в пластическую область меньше объемной скорости звука

Решение для среды с деформационным упрочнением

$$S = S_{00}\left(1+\alpha Ln\frac{\rho_1}{\rho}\right)$$

Пластическая область

$$\begin{cases}
P = \left(P_1 + \dfrac{\rho_{0k}c_{0k}^2 - (\gamma-1)S_{00}\left(1-\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)}{\gamma}\right)\left(\dfrac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma} - \dfrac{\rho_{0k}c_{0k}^2 - (\gamma-1)S_{00}\left(1-\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)}{\gamma} + \dfrac{(\gamma-1)}{\gamma}\alpha S_{00}Ln\dfrac{\rho_1}{\rho} \\
S = -S_{00}\left(1+\alpha Ln\dfrac{\rho_1}{\rho}\right) \\
E_{уп} = E_{уп}^1 \\
U = U_1 - \displaystyle\int_{\rho}^{\rho_1} C_{пл}\dfrac{d\rho}{\rho} \\
C_{пл} = \sqrt{\left(\dfrac{\gamma P_1 + \rho_{0k}c_{0k}^2 - (\gamma-1)S_{00}\left(1-\dfrac{\alpha}{\gamma}\right)}{\rho_1}\right)\left(\dfrac{\rho}{\rho_1}\right)^{(\gamma-1)} + \dfrac{\alpha S_{00}}{\gamma\rho}} \\
C_{пл1} = \sqrt{\left(\dfrac{\gamma P_1 + \rho_{0k}c_{0k}^2 - (\gamma-1-\alpha)S_{00}}{\rho_1}\right)} = \sqrt{\left(C_{b1}^2 - \dfrac{(\gamma-1-\alpha)S_{00}}{\rho_1}\right)}
\end{cases}$$

Скорость распространения возмущений на входе в пластическую область больше или меньше объемной скорости звука

Учет эффекта Баушингера

$$S<0 \longrightarrow \mu_{eff}=\mu\left(1+\frac{S}{S_0}\right) \qquad S_0=const \qquad \mu=const$$

Квазиупругая область

$$\frac{S}{S_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{4\mu}{3S_0}}-1$$

Состояние текучести не достигается

$$P=\left(P_1+\frac{\rho_{0k}c_{0k}^2-(\gamma-1)S_0}{\gamma}-\frac{2(\gamma-1)S_0}{\frac{4\mu}{3S_0}-\gamma}+\frac{(\gamma-1)S_0}{\frac{8\mu}{3S_0}-\gamma}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma}-\frac{\rho_{0k}c_{0k}^2-(\gamma-1)S_0}{\gamma}$$

$$+\frac{2(\gamma-1)S_0}{\frac{4\mu}{3S_0}-\gamma}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{4\mu}{3S_0}}-\frac{(\gamma-1)S_0}{\frac{8\mu}{3S_0}-\gamma}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\frac{8\mu}{3S_0}}$$

Скорость распространения возмущений на входе в квазиупругую область равна упругой скорости звука, но производная скорости имеет разрыв.

На профилях скорости отсутствует область постоянного течения, но имеет место излом

Выводы

1. Скорость распространения возмущений в пластической области не равна объемной скорости звука.

2. На характеристиках в упругой и пластической областях сохраняются инварианты $U \pm \int C_{p,пл} \frac{d\rho}{\rho}$, где C_p и $C_{пл}$ - скорости упругой и пластической волны. Соответственно, форма адиабат разгрузки в пластической области меняется в зависимости от используемой упругопластической модели.

3. Отсутствие на экспериментально регистрируемых профилях области постоянного течения может объясняться эффектом Баушингера: квазиупругий характер разгрузки материала не позволяет достичь состояния текучести. При этом излом в регистрируемых профилях связан с изменением характера деформации (переход от упругой разгрузки к квазиупругой). В точке излома возмущения распространяются с продольной скоростью звука.