# Влияние джоулева разогрева на диффузию магнитного поля в плазму

Егужова М.Ю., Жмайло В.А.,
Новикова Е.А., Софронов В.Н.
РФЯЦ ВНИИЭФ, г Саров

# План доклада

# Диффузия магнитного поля в неподвижный плоский слой плазмы с учетом джоулева нагрева и его влияния на коэффициенты диффузии и теплопроводности

Предположения

- плазма неподвижна, имеет постоянную теплоемкость
- проводимость плазмы – кулоновская $\sigma\left(T\right) \sim T^{\alpha}, \alpha = 3/2$
- зависимость коэффициента теплопроводности от температуры - степенная $\kappa\left(T\right) \sim T^{\beta}, \beta = 5/2$
- решение зависят от одной пространственной координаты

$$\mathbf{H}\left(x,t\right) = \left(0, 0, H_z\left(x,t\right)\right), \mathbf{E}\left(x,t\right) = \left(0, E_y\left(x,t\right), 0\right)$$

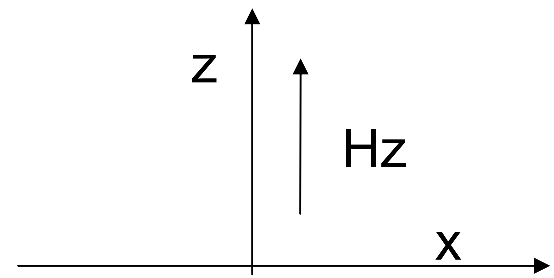
В этих предположениях задача сводится к решению уравнений

$$\frac{dH_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\nu\left(T\right)\frac{\partial H_z}{\partial x} \qquad \sigma = \sigma_0\left(\frac{T}{Ry}\right)^{3/2} \qquad \nu\left(T\right) = \nu_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/2} \qquad \nu_0 = \frac{c^2}{4\pi\sigma_0}\left(\frac{T_0}{Ry}\right)^{3/2}$$

$$\rho C_V\frac{dT}{dt} = \nu\left(T\right)\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\kappa\left(T\right)\frac{\partial T}{\partial x} \qquad \kappa = \kappa_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}$$

# Диффузионное размытие контактной границы

Начальные и граничные условия




$$H_z\left(x,t=0\right)=\begin{cases}0\,, & \text{x<0}\\ H_0, & \text{x>0}\end{cases} \qquad T\left(x,t=0\right)=T_0$$

$$H_z\left(x\to-\infty,t\right)=0 \quad H_z\left(x\to\infty,t\right)=H_0 \quad T\left(x\to\pm\infty,t\right)=T_0$$

Автомодельное решение, зависящее от переменной $\xi = x\Big/\sqrt{\nu_0 t}$

Система уравнений

$$\frac{dh}{d\xi}=\varepsilon\tau^{\alpha} \qquad \varepsilon\left(\xi\right)=\tau^{-\alpha}\frac{dh}{d\xi} \qquad h=\frac{H_z}{H_0}$$

$$\frac{d\tau}{d\xi}=w\tau^{-\beta} \quad w\left(\xi\right)=\tau^{\beta}\frac{d\tau}{d\xi} \qquad \tau=\frac{T}{T_0}$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi}=-\frac{\xi\varepsilon\tau^{\alpha}}{2} \qquad \frac{dw}{d\xi}=-\frac{\xi w\tau^{-\beta}}{2a}-\frac{b^2\psi^2\tau^{\alpha}}{a}$$

Граничные условия

$$h\Big|_{\xi\to\infty}=1 \quad h\Big|_{\xi\to-\infty}=0 \quad \tau\Big|_{\xi\to\pm\infty}=1$$

$$d\tau/d\xi\Big|_{\xi\to\pm\infty}=0 \qquad dh/d\xi\Big|_{\xi\to\pm\infty}=0$$

Решение зависит от двух безразмерных параметров

$$a=\frac{\kappa_0}{\rho C_V\nu_0} \qquad b=\frac{H_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$$

# Диффузионное размытие контактной границы

Решение для линейного варианта $\alpha = 0$ в отсутствии теплопроводности $a = 0$

$$h(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + sign(\xi) erf\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \qquad \tau(\xi) = 1 - \frac{b^2}{4\pi} Ei\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)$$

Так как $Ei(-x) = C + \ln x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i \cdot i!}$ то температура в окрестности контактной границы $\xi^2 \sim 0$ имеет логарифмический профиль

$$\tau(\xi) \sim -\frac{b^2}{4\pi} \ln \xi^2$$

При $\alpha > 0$ и $a = 0$ автомодельного решения не существует

Учет теплопроводности устраняет особенность в решении

# Диффузионное размытие контактной границы

Построение автомодельного решения в ограниченной области $(0<\xi<\xi_1)$ при учете теплопроводности

Граничные условия на внешней границе $\xi=\xi_1$ определены с учетом асимптотического поведения функций при $\xi\to\infty$

$$h(\xi_1)=\frac{1}{2}\left(1+erf\left(\frac{\xi_1}{2}\right)\right),\quad \tau(\xi_1)=1,$$

,

$$\varepsilon(\xi_1)=c_1\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{4}\right),\quad w(\xi_1)=-\left(c_2+\eta\xi_1c_1^2\right)\exp\left(-\frac{\xi_1^2}{2}\right)$$

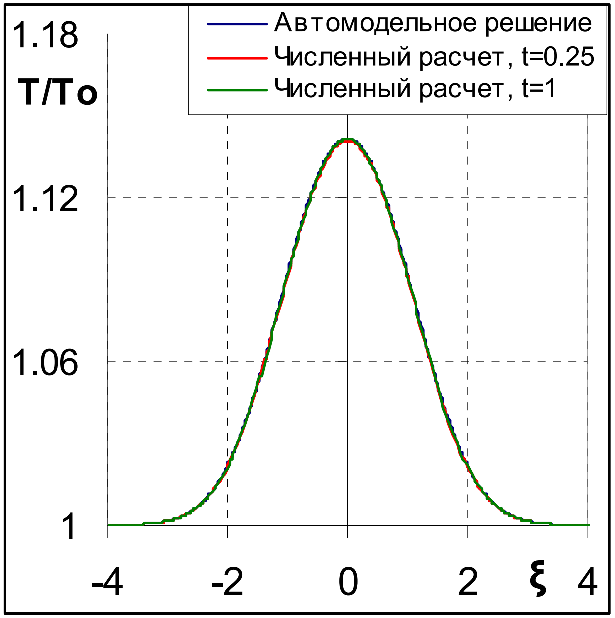
. Константы $c_1,c_2$ выбраны из условия $h(\xi=0)=0.5 \quad w(\xi=0)=0$

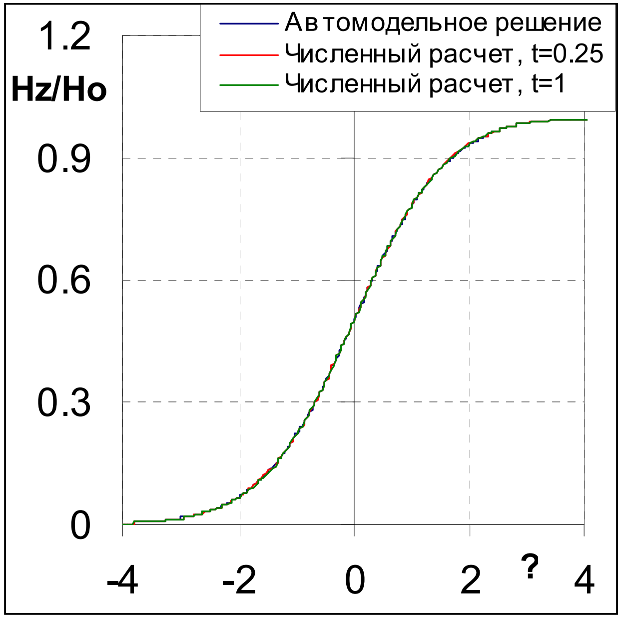
Решение в левой полуплоскости следует из условий симметрии:

$$h(-\xi)=1-h(\xi) \qquad \tau(-\xi)=\tau(\xi) \qquad \varepsilon(-\xi)=\varepsilon(\xi) \qquad w(-\xi)=-w(\xi)$$

# Диффузионное размытие контактной границы

Результаты одномерных численных расчетов демонстрируют выход на автомодельный режим. Профили, соответствующие различным моментам времени, совпадают с эталонным решением и между собой




Профили температуры и поперечной компоненты поля для безразмерных параметров $a = 0.5, \quad b = 1$

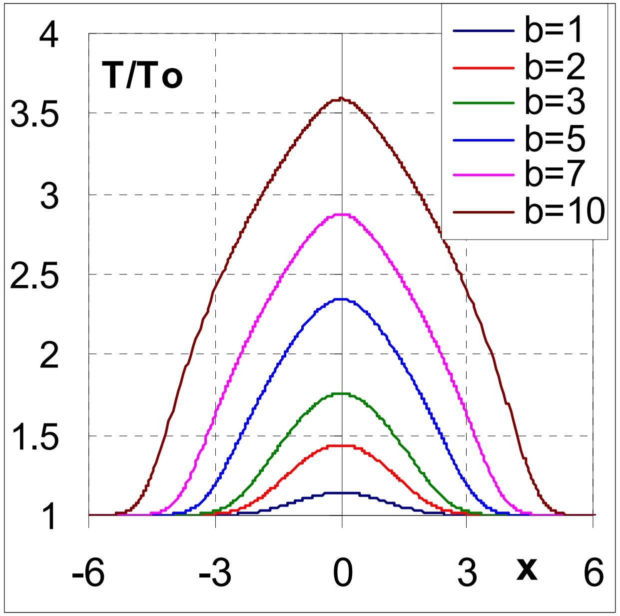
# Диффузионное размытие контактной границы

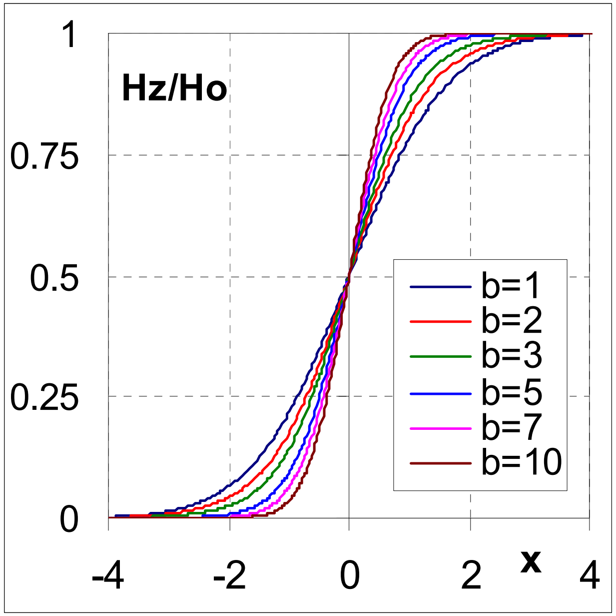
Двухпараметрическое множество решений $a = \dfrac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0}$ $b = \dfrac{H_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$

При увеличении параметра b возрастает влияние джоулевого нагрева

Рост разогрева приводит к замедлению диффузии поля

Зона размытия уменьшается, а профили поля становятся более крутыми



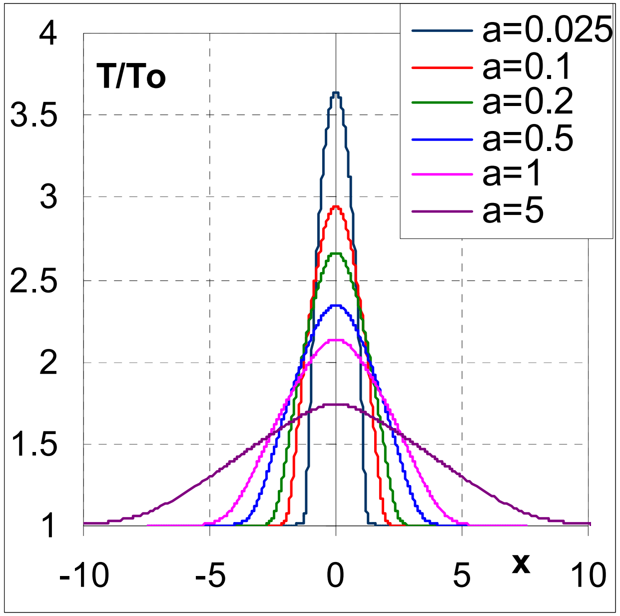



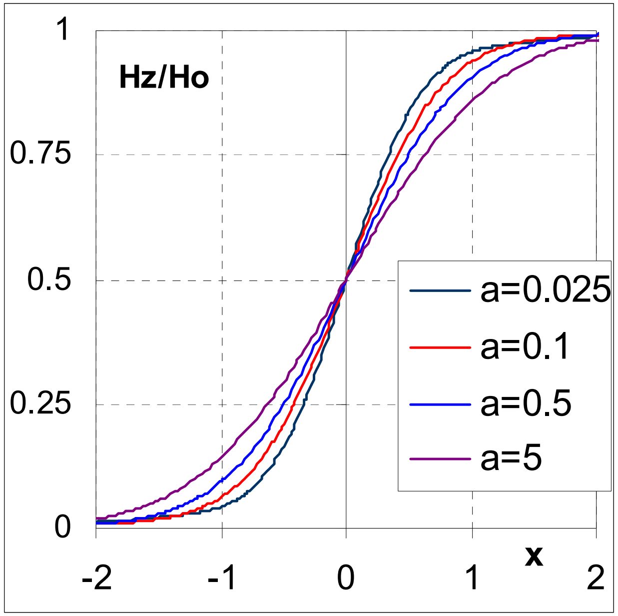

Профили температуры и поперечной компоненты поля при фиксированном значении параметра a=0.5 в момент t=1

# Диффузионное размытие контактной границы

Двухпараметрическое множество решений $a = \dfrac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0}$ $b = \dfrac{H_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$

При увеличении параметра a возрастает роль теплопроводности
Зона размытия поля стабилизируется
Тепловая волна обгоняет фронт диффузионной волны.

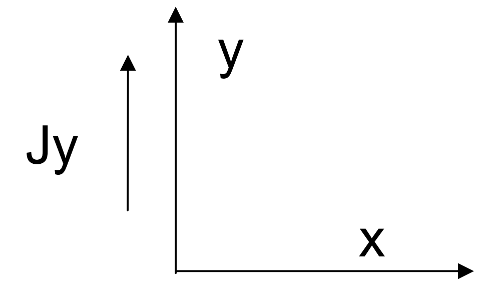



Профили температуры и поперечной компоненты поля при фиксированном значении параметра b в момент t=1

# Поле поверхностного тока

## Начальные и граничные условия




$$H_z\left(x,t=0\right)=0 \qquad T\left(x,t=0\right)=T_0$$

$$J_y\left(x=0,t\right)=\frac{\partial H_z}{\partial x}\left(x=0,t\right)=\frac{J_0}{\sqrt{t}} \qquad T\left(x\to\infty,t\right)=T_0 \quad H_z\left(x\to\infty,t\right)=0$$

Полная энергия системы увеличивается пропорционально $\sqrt{t}$

$$\Delta E=E\left(t\right)-E\left(0\right)=2\left(\nu\left(T\right)H_z\right)\Big|_{x=0} J_0\sqrt{t} \qquad E\left(t\right)=\int_0^{\infty}\left(\frac{H_z^2}{2\rho}+C_V T\right)\rho dx$$

Автомодельное решение

$$h\left(\xi\right)=H_z\Big/\sqrt{\rho C_V T_0} \qquad \tau\left(\xi\right)=T/T_0 \qquad \xi=x\Big/\sqrt{\nu_0 t}$$

зависит от двух безразмерных параметров

$$a=\frac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0} \qquad b=\frac{J_0\nu_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$$

# Поле поверхностного тока

Решение для линейного варианта $\alpha = 0$ в отсутствии теплопроводности $a = 0$

$$h(\xi) = b\sqrt{\pi}\left(erf\left(\frac{\xi}{2}\right) - 1\right) \qquad \tau(\xi) = 1 - b^2 Ei\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)$$

Вблизи границы $\xi^2 \sim 0$ профиль температуры – логарифмический

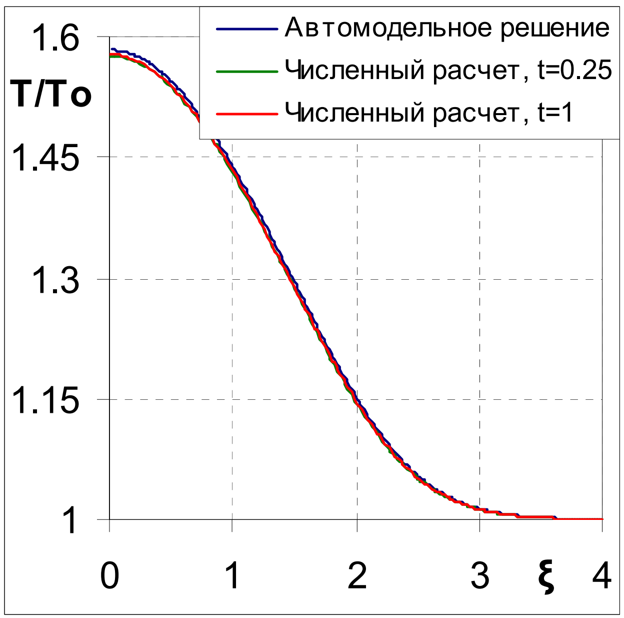
$$\tau(\xi) \sim -b^2 \ln \xi^2$$

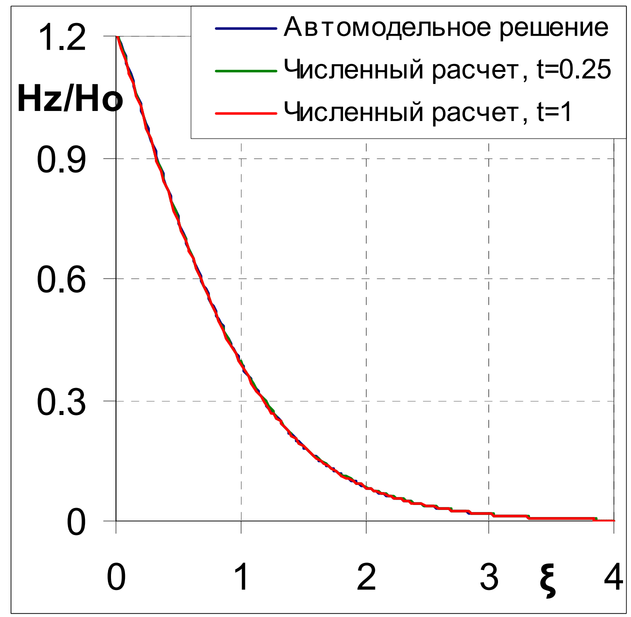
При $\alpha > 0$ и $a = 0$ автомодельного решения не существует

Учет теплопроводности устраняет особенность в решении

# Поле поверхностного тока

Результаты одномерных численных расчетов демонстрируют выход на автомодельный режим. Профили, соответствующие различным моментам времени, совпадают с эталонным решением и между собой




Профили температуры и поперечной компоненты поля для безразмерных параметров $a = 0.5, \quad b = 1$

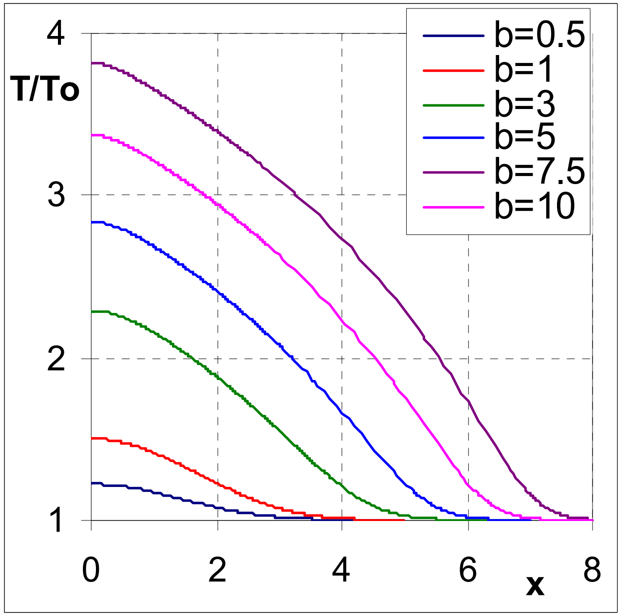
# Поле поверхностного тока

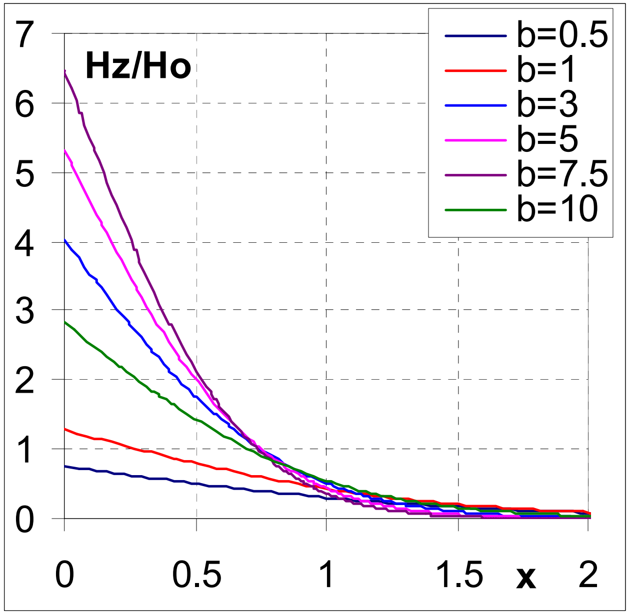
Двухпараметрическое множество решений $\quad a = \dfrac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0} \quad b = \dfrac{J_0 \nu_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$

При увеличении параметра b возрастает влияние джоулевого нагрева

Рост разогрева приводит к замедлению диффузии поля

Профили магнитного и элнетрического полей становятся более крутыми

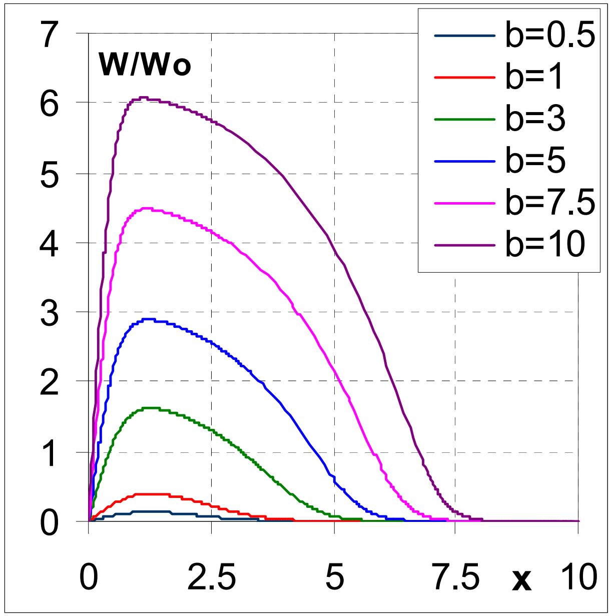


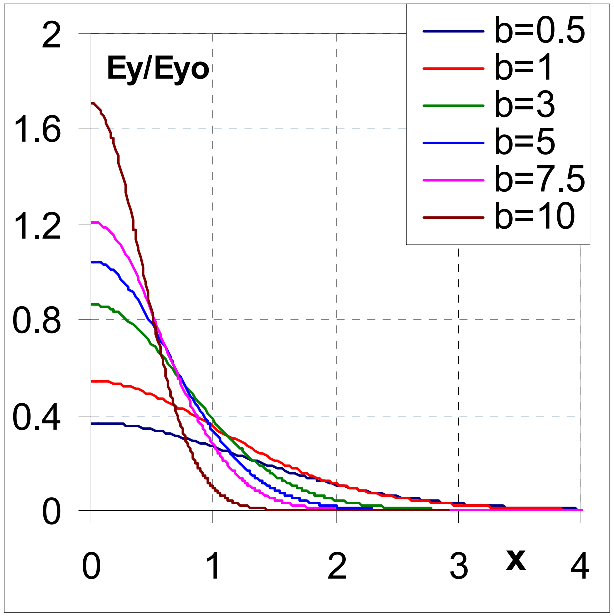




Профили температуры и поперечной компоненты поля при фиксированном значении параметра a=1 в момент t=1

# Поле поверхностного тока

Двухпараметрическое множество решений $a = \dfrac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0}$ $b = \dfrac{J_0 \nu_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$



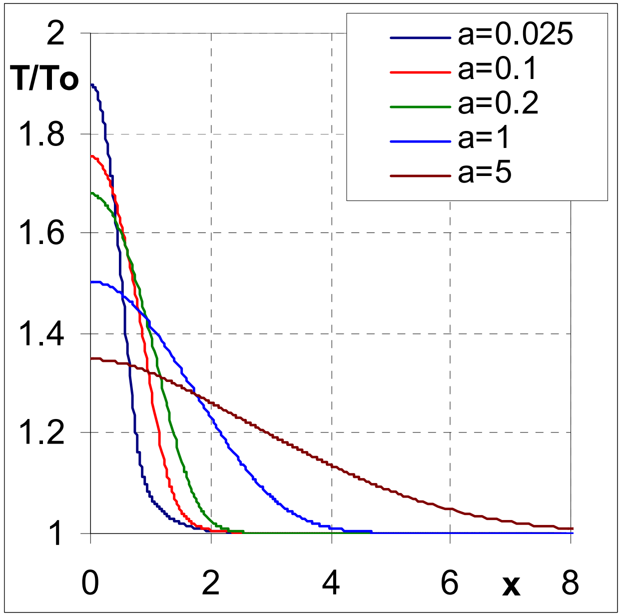



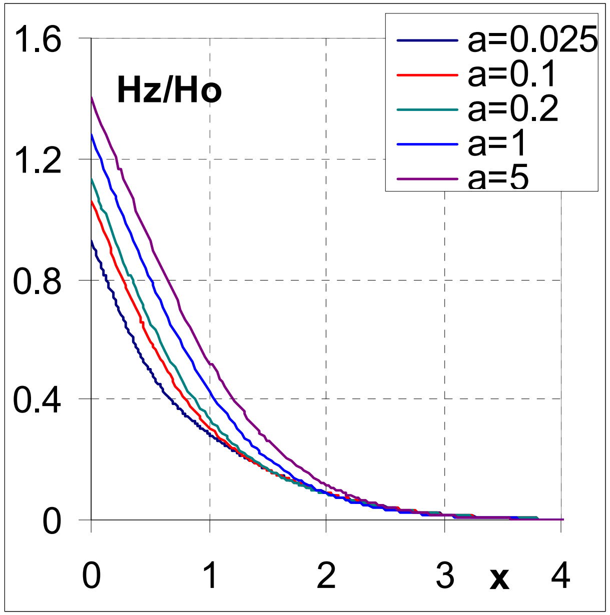

Профили теплового $W = -\kappa(T)\partial T/\partial x, W_0 = \kappa_0 T_0 \Big/ \sqrt{\nu_0 t}$ и магнитного $E_y = -\nu(T)\partial H_z/\partial x$, $E_{y0} = \sqrt{\nu_0 \rho C_V T_0 / t}$ потоков при фиксированном значении параметра a=1 в момент t=1

# Поле поверхностного тока

Двухпараметрическое множество решений $a = \dfrac{\kappa_0}{\rho C_V \nu_0}$ $b = \dfrac{J_0 \nu_0}{\sqrt{\rho C_V T_0}}$

Параметр a ответственен за вклад теплопроводности
При его увеличении ширина зоны проникновения поля стабилизируется, что связано с замедлением диффузии.



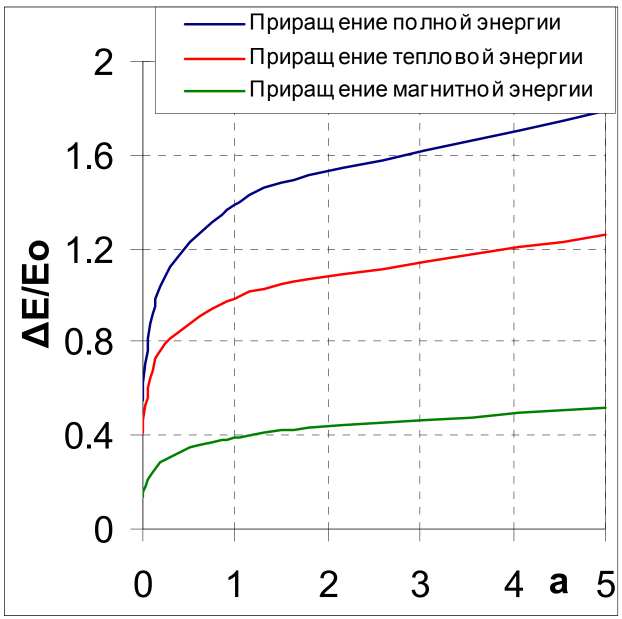



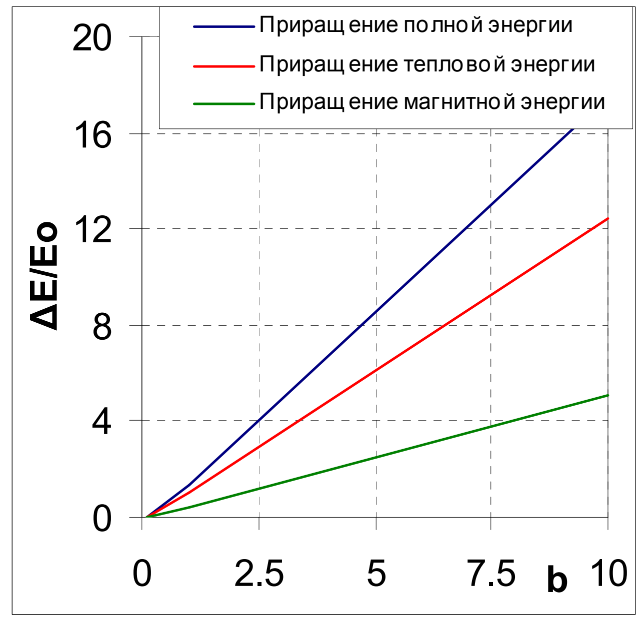

Профили температуры и поперечной компоненты поля при фиксированном значении параметра b=5 в момент t=1

# Поле поверхностного тока

Распределение приращения полной энергии между тепловой и магнитной составляющих

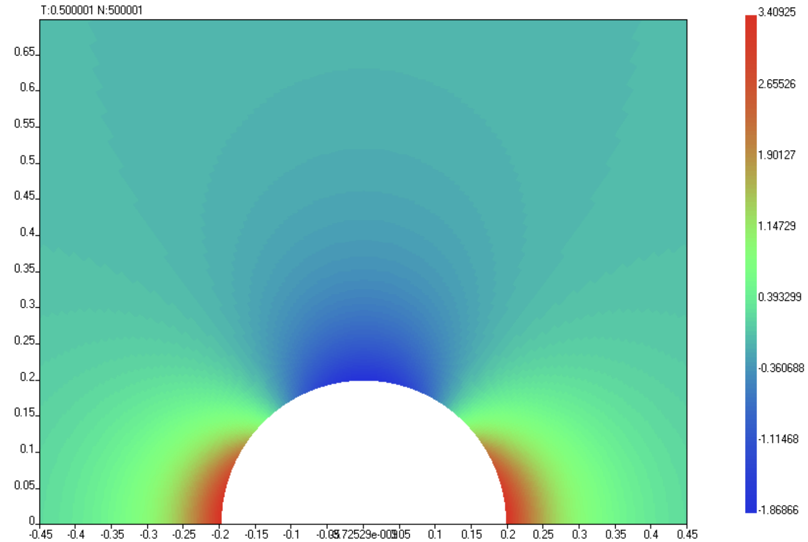
При увеличении параметров a и b происходит рост полной энергии и ее составляющих (тепловой и магнитной)
Доля тепловой энергии составляет ~70%.



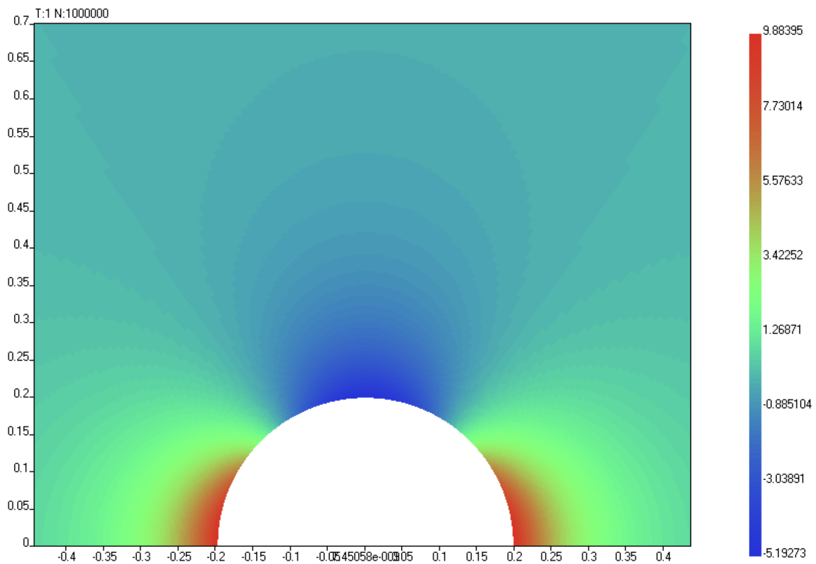




Зависимость приращения полной, тепловой и магнитной энергий от параметров a и b.

# Магнитное поле (компонента $H_z$) без учета разогрева ( $\nu = 0$ )

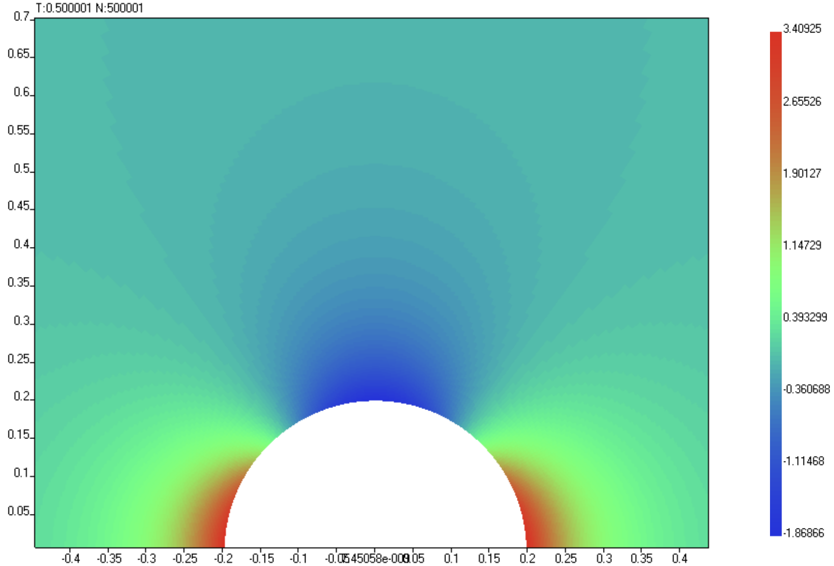



t=0.5

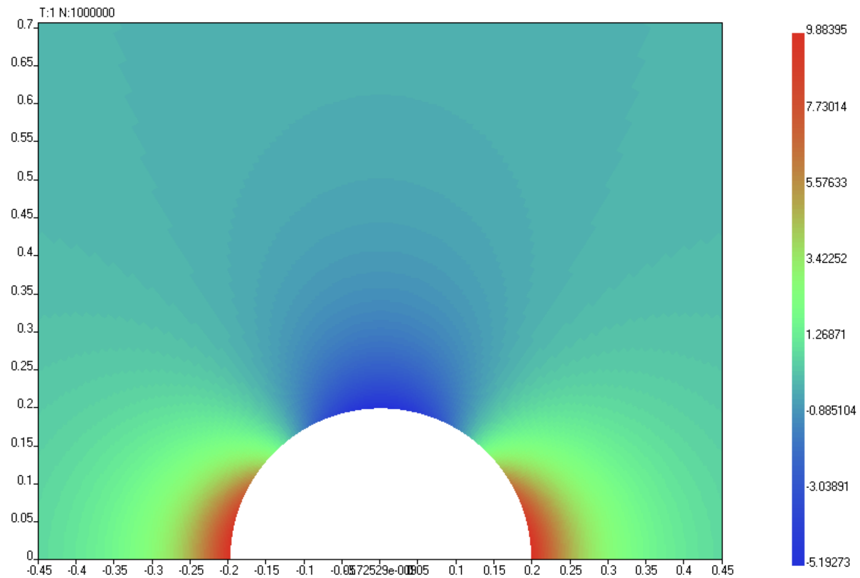



t=1

# Магнитное поле (компонента $H_z$) с учетом «умеренного» разогрева ( $\nu = 5$ )

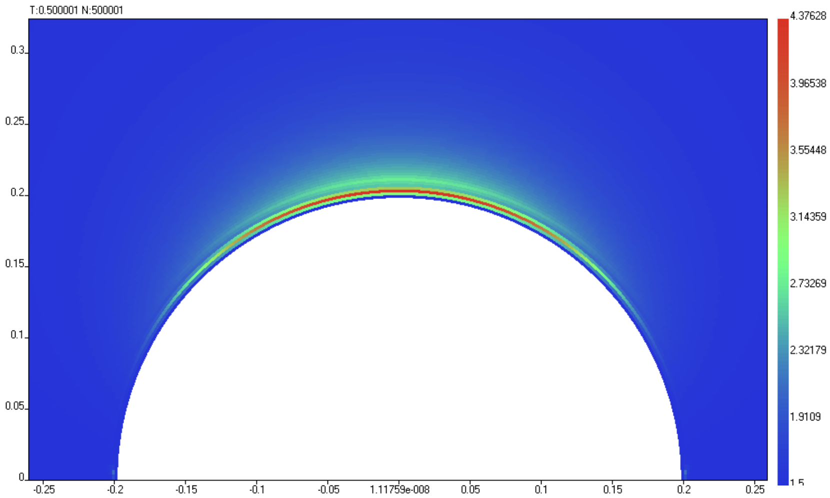



t=0.5

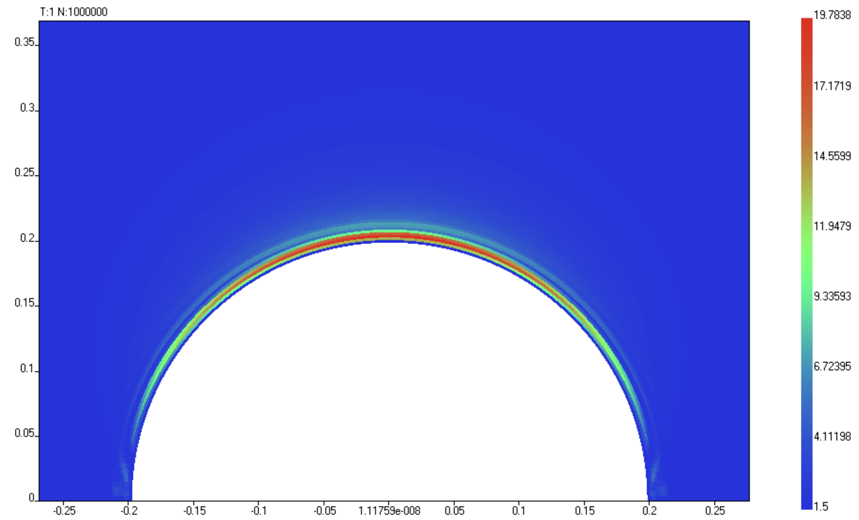



t=1

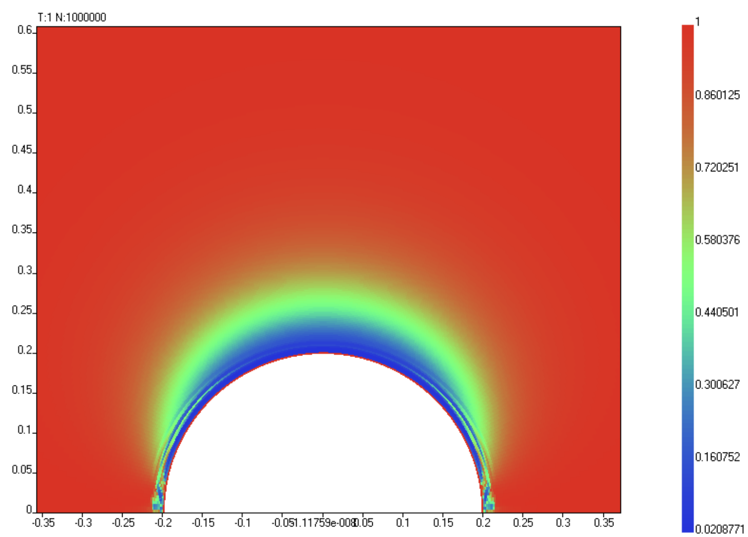
# Энергия плазмы ( $\nu = 5$ )




t=0.5

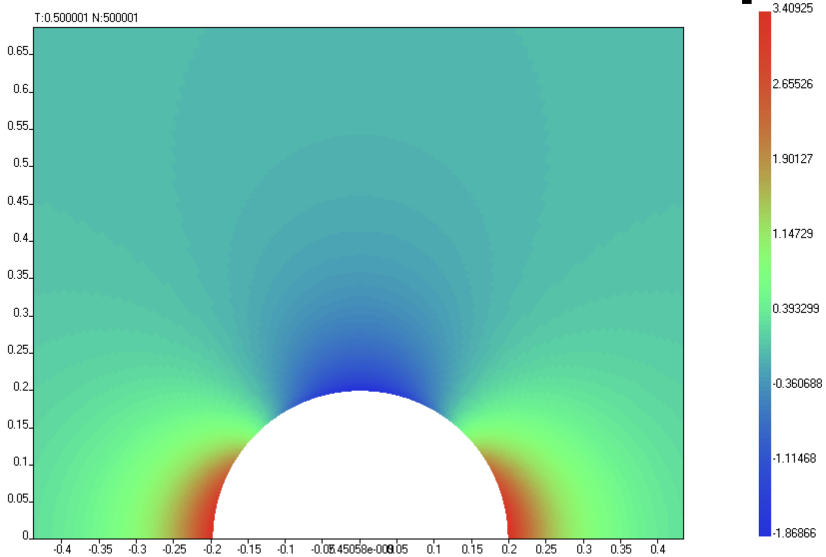



t=1

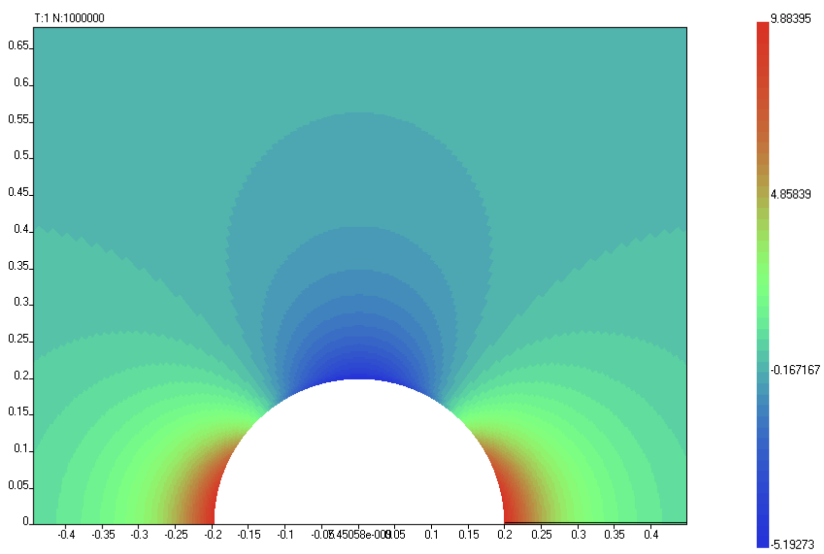



Коэффициент диффузии на момент времени t=1

# Магнитное поле (компонента $H_z$ ) с учетом «сильного» разогрева ($\nu = 50$)

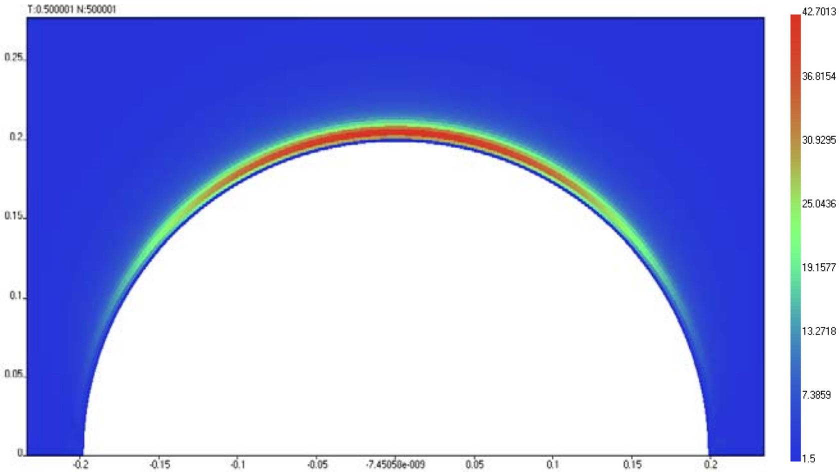



t=0.5

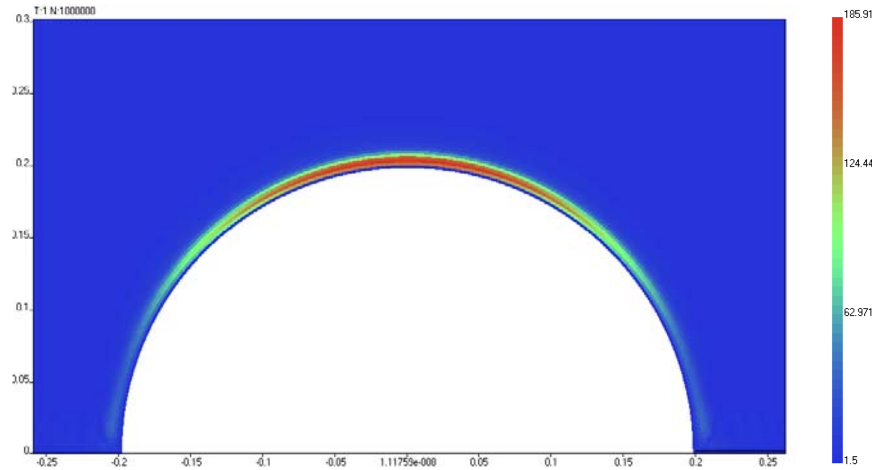



t=1

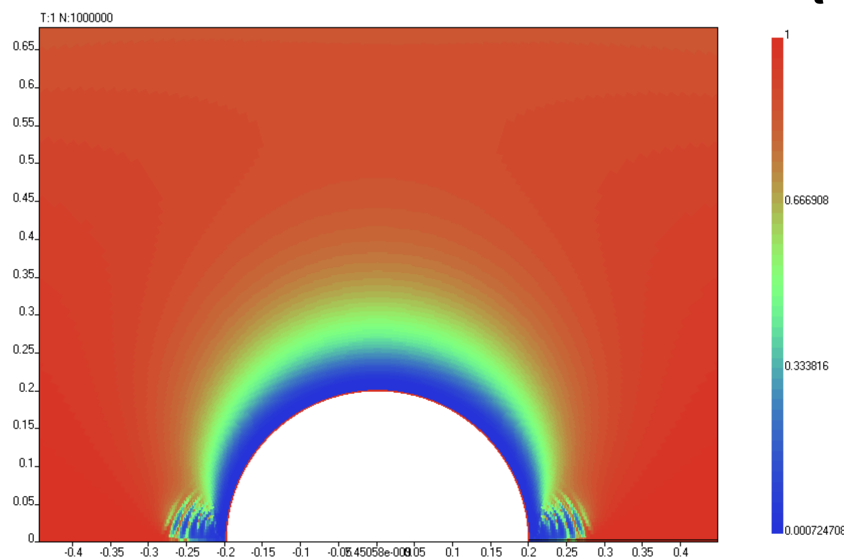
# Энергия плазмы ( $\nu = 50$ )




t=0.5

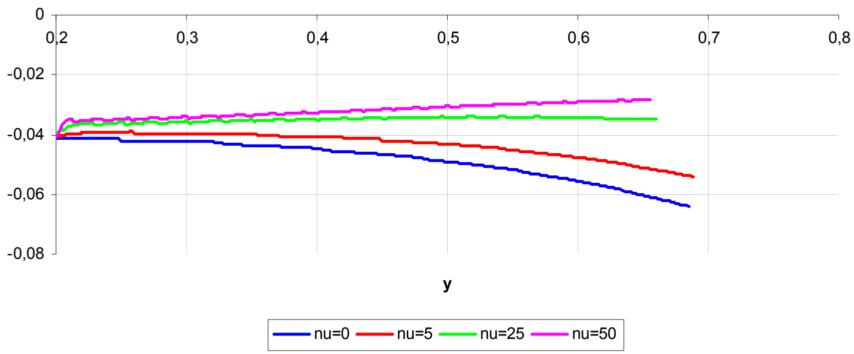



t=1

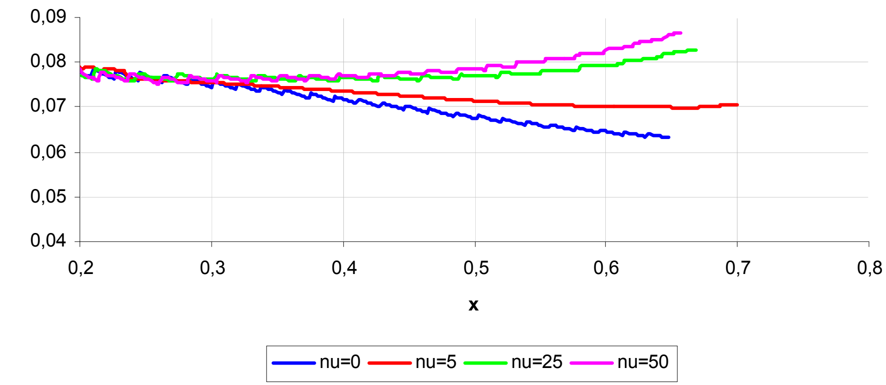



Коэффициент диффузии на момент времени t=1

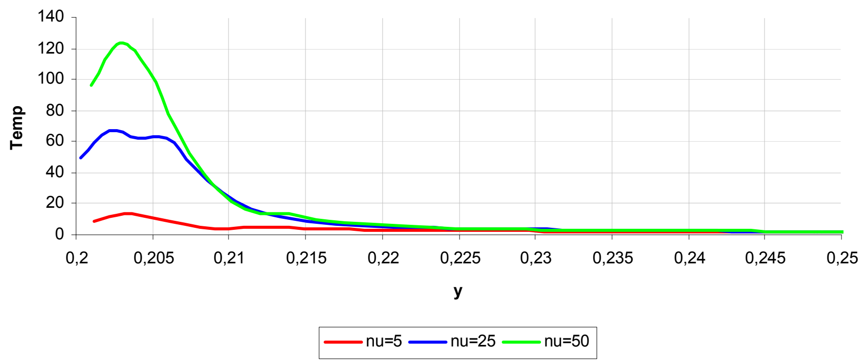
# Результаты расчетов



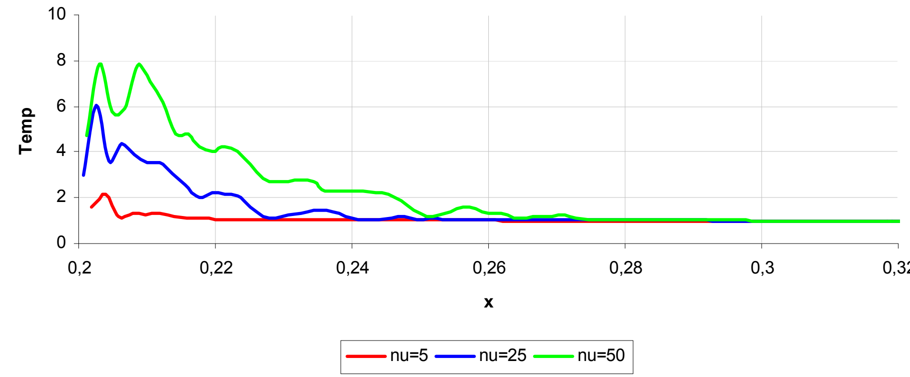

Профили магнитного поля (функция $H_z \cdot r^3$) в экваториальной плоскости диполя при t=1




Профили магнитного поля (функция $H_z \cdot r^3$) вдоль оси симметрии при t=1

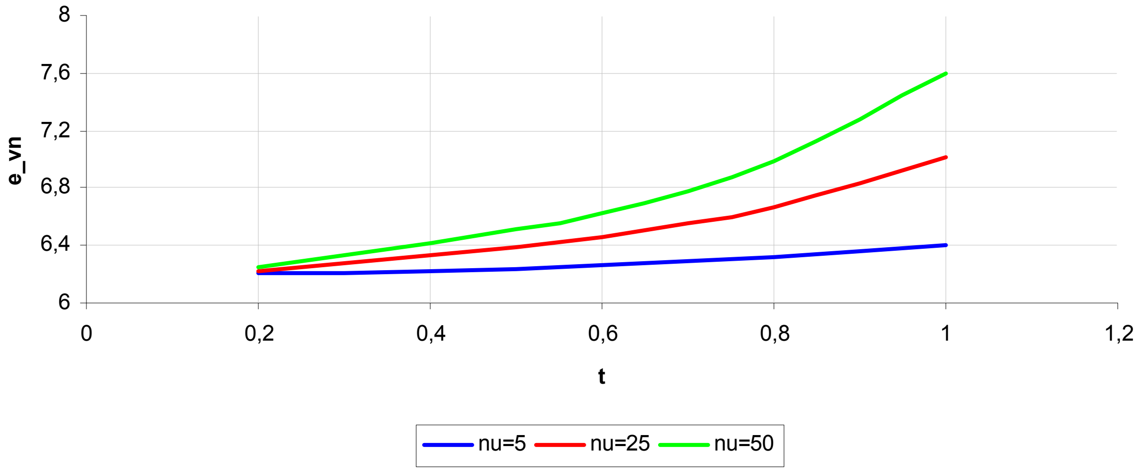



Профили температуры плазмы в экваториальной плоскости диполя при t=1

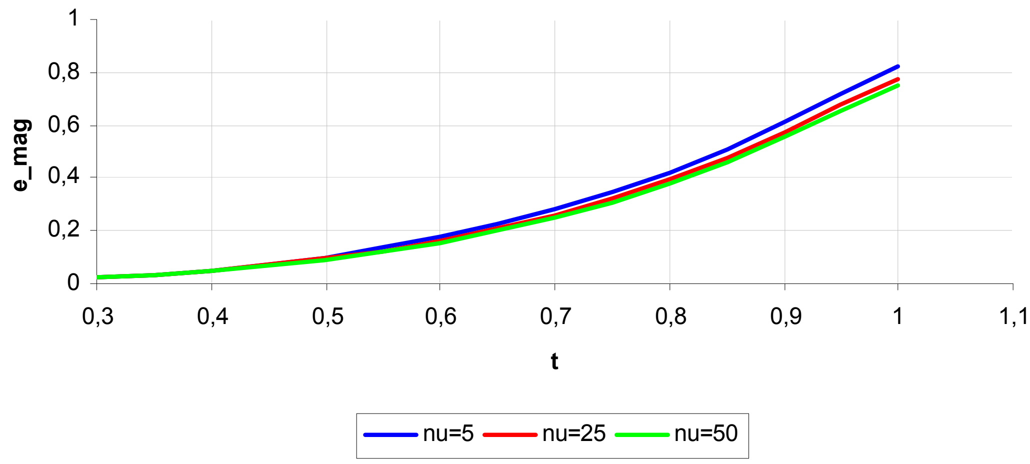



Профили температуры плазмы вдоль оси симметрии при t=1

# Результаты расчетов




Профили внутренней энергии плазмы в зависимости от времени для разных значений $\nu$




Профили энергии магнитного поля плазмы в зависимости от времени для разных значений $\nu$

# Заключение

- Показано, что в одномерной задаче в профилях поля на границе может возникать разрыв, а температура обращаться в бесконечность. Показано, что учёт теплопроводности (сколь угодно малой) может устранить некоторые особенности решения.

- Оказывается, что в двумерной задаче влияние разогрева наиболее существенно вблизи экватора. Оно проявляется в замедлении диффузии и укручнении профилей поля.

$$j_\varphi(r) = \begin{cases} j_0 \dfrac{r}{r_0}, r < r_0 \\ 0, r > r_0 \end{cases}$$

$$a(r,s) = \frac{r}{4\sqrt{\pi}} \int_0^s m_z(s') \frac{d\Delta s}{(\Delta s)^{5/2}} e^{\left(-r^2/4\Delta s\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{r^2} \int_\xi^\infty \xi'^2 e^{-\xi'^2} m_z\left[s - \left(\frac{r}{2\xi'}\right)^2\right] d\xi'$$

$$m_z(s) = \mu(s) T(s)$$

$$\mu(s) = \frac{\pi^2}{r_0} \int_0^{r_0(s)} r'^4 dr' \cdot \frac{j_0}{c} = \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot \pi r_0 \cdot \frac{j_0}{c} \cdot \frac{3}{20}$$