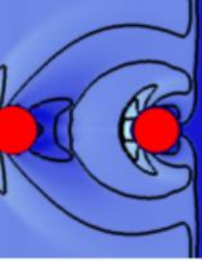


А.В. Федоров, И.А. Бедарев, А.В. Шульгин

СТРУКТУРА И УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗОВЗВЕСИ С ДВУМЯ ДАВЛЕНИЯМИ И УЧЕТОМ ОБЪЕМНОЙ ДОЛИ ЧАСТИЦ

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

ЗНЧ- 2017, г. Снежинск

АКТУАЛЬНОСТЬ

При описании многих технологических процессов в различных отраслях промышленности определяющими являются законы механики гетерогенных сред.

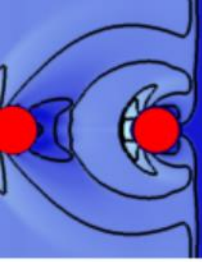
-фильтрация компонентов газовой смеси через сыпучий катализатор

с учетом/без учета химических реакций;

- течение концентрированных суспензий в каналах различных установок;

-моделирование образования газовзвесей за счет подъема мелких частиц из неустойчивых отложений под воздействием взрывных и детонационных волн.

-гетерогенная детонация реагирующих частиц в окислительной атмосфере.



Цели работы

- Развить:

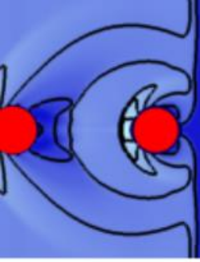
- теорию сильного разрыва в смеси газа и твердых частиц при учете немалой концентрации дискретной фазы, для неконсервативной системы уравнений составного типа,
- численный метод решения нестационарных одномерных задач типа TVD высокого порядка точности для решения задач МГС с высокой концентрацией частиц

- Что мы имеем

1.Модель смеси без учета $m_2 \frac{\partial p}{\partial x}$, гиперболический тип.

2. Модель смеси с учетом $m_2 \frac{\partial p}{\partial x}$, УРС - $p_i = p_i(\rho_i)$ гиперболический тип.

3. Модель смеси с учетом $m_2 \frac{\partial p}{\partial x}$, УРС $p_1 = p_1(\rho_1, \rho_2), p_2 = p_2(\rho_2)$ Составной тип.



ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения сохранения массы и импульса + уравнения состояния (модель Андерсона)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho_i u_i\right)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\left(\rho_1 u_1\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho_1 u_1^2 + m_1 p_1\right)}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} + f_1,$$

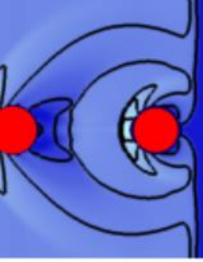
$$\frac{\partial\left(\rho_2 u_2\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho_2 u_2^2 + m_2 p_1\right)}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial x} = p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} + f_2,$$

$$p_1 = p_1\left(\rho_1, \rho_2\right),\ \ p_2 = p_2\left(\rho_2\right),\ \ m_1 + m_2 = 1.$$

$$p_1 = \frac{a_1^2 \rho_1}{1 - m_2},\ \ p_2 = a_2^2 \rho_2.$$

1 — параметры газа, 2 —частиц

Система составного типа



СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАЗ

$$f_1 = \frac{3}{8}\frac{m_2\rho_{11}}{r_p} C_D (u_1 - u_2)|u_1 - u_2|, \;\; f_2 = -f_1$$

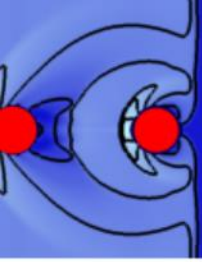
C_D — коэффициент сопротивления сферической частицы радиуса r_p.

Стоксовый режим обтекания

$$C_D = 24 / \mathrm{Re}, \;\; \mathrm{Re} = 2r_p|u_1 - u_2|\rho_{11} / \mu$$

$$f_1 = \frac{(u_1 - u_2)\rho_2}{\tau_{st}}, \;\; \tau_{st} = \frac{2}{9}\frac{\rho_{22}r_p^2}{\mu},$$

τ_{st} — Стоксово время релаксации скоростей



СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Итак исследуем влияние неконсервативного члена в уравнении сохранения импульса второй фазы и объемной концентрации в уравнении состояния газа.

$$\rho_1 u_1 = \rho_{10} u_0 \equiv C_1, \ \rho_2 u_2 = \rho_{20} u_0 \equiv C_2,$$

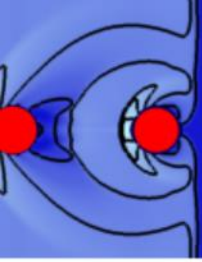
$$C_1 \dot{u}_1 + m_1 \dot{p}_1 = f_1, \ C_2 \dot{u}_2 + m_2 \dot{p}_1 + \dot{p}_2 = -f_1.$$

Символ 0 обозначает начальное равновесное состояния смеси.

Константы C_i определяются по начальному состоянию.

$$C_1 \dot{u}_1 + C_2 \dot{u}_2 + \dot{p}_1 + \dot{p}_2 = 0$$

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + p_1 + p_2 = C_3 = C_1 u_{10} + C_2 u_{20} + p_{10} + p_{20}$$



ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ДЛЯ СМЕСИ В ЦЕЛОМ

Из уравнений сохранения импульса фаз получаем

$$\Phi_1(u_1,u_2)=\frac{C_1}{u_1}\left(u_1^2-\left(u_0+\frac{a_1^2}{u_0(1-m_{20})}\right)u_1+\frac{a_1^2}{1-\dfrac{C_2}{\rho_{22}u_2}}\right)+$$

$$+\frac{C_2}{u_2}\left(u_2^2-\left(u_0+\frac{a_2^2}{u_0}\right)u_2+a_2^2\right)=0.$$

Замкнутая кривая в плоскости (u_1, u_2).

Ограничение предложенной модели:

$$m_{20}<\frac{u_2}{u_0}$$

УСЛОВИЕ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ВТОРОЙ ФАЗЫ

$$C_2\dot{u}_2 + m_2\dot{p}_1 + \dot{p}_2 = -f_1 \;\rightarrow$$

$$\frac{u_2^2 - u_{20}^2}{2} + \frac{p_1 - p_{10}}{\rho_{22}} + a_2^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_{20}} = 0,$$

$$\Phi_2(u_1, u_2) = \frac{u_2^2 - u_0^2}{2} + \frac{a_1^2 C_1}{\rho_{22}} \frac{1/u_1}{1 - \dfrac{C_2}{u_2\rho_{22}}} - \frac{a_1^2 C_1}{\rho_{22}} \frac{1/u_0}{1 - \dfrac{C_2}{u_0\rho_{22}}} + a_2^2 \ln\frac{u_0}{u_2} = 0.$$

Точки пересечения кривых $\Phi_i(u_1,\ u_2) = 0$ определяют параметры течения за фронтом замороженной УВ.

НОРМАЛЬНЫЙ ВИД СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

$$\frac{du_1}{dx}=\frac{\Delta_{u_1}}{\Delta},\quad \frac{du_2}{dx}=\frac{\Delta_{u_2}}{\Delta},$$

$$\Delta=\rho_1\rho_2u_1^2u_2^2-m_1p_{1,\rho_1}\rho_1\rho_2u_2^2-\left(m_2p_{1,\rho_2}+p_{2,\rho_2}\right)\rho_1\rho_2u_1^2+$$

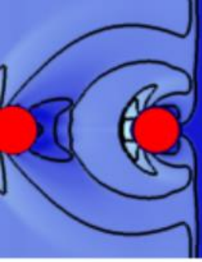
$$+m_1p_{1,\rho_1}\left(m_2p_{1,\rho_2}+p_{2,\rho_2}\right)\rho_1\rho_2-m_1m_2p_{1,\rho_2}p_{1,\rho_1}\rho_1\rho_2,$$

$$\Delta_{u_1}=-f_1u_1\rho_2\left(-u_2^2+p_{1,\rho_2}+p_{2,\rho_2}\right),\ \Delta_{u_{2,x}}=f_1\rho_1u_2\left(-u_1^2+p_{1,\rho_1}\right),$$

$$\rho_1=\frac{C_1}{u_1},\ \rho_2=\frac{C_2}{u_2},\ m_2=\frac{C_2}{\rho_{22}u_2},\ m_1=1-m_2,$$

$$C_1=m_{10}\rho_{11}u_0,\ C_2=m_{20}\rho_{22}u_0,\ m_{10}+m_{20}=1,$$

$$p_{1,\rho_1}=\frac{a_1^2}{1-\rho_2/\rho_{22}},\ p_{1,\rho_2}=\frac{a_1^2\rho_1}{\rho_{22}\left(1-\rho_2/\rho_{22}\right)^2},\ p_{2,\rho_2}=a_2^2.$$



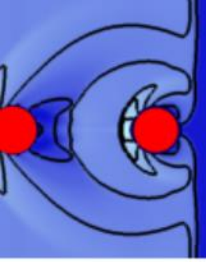
РАВНОВЕСНАЯ УВ

$$u_1 = u_2 = u$$

$$u^3 - \left(\alpha C_{12} + C_3 / C_{12}\right)u^2 + \left(a_1^2\xi_1 + a_2^2\xi_2 + \alpha C_3\right)u - \alpha a_2^2 \xi_2 C_{12} = 0,$$

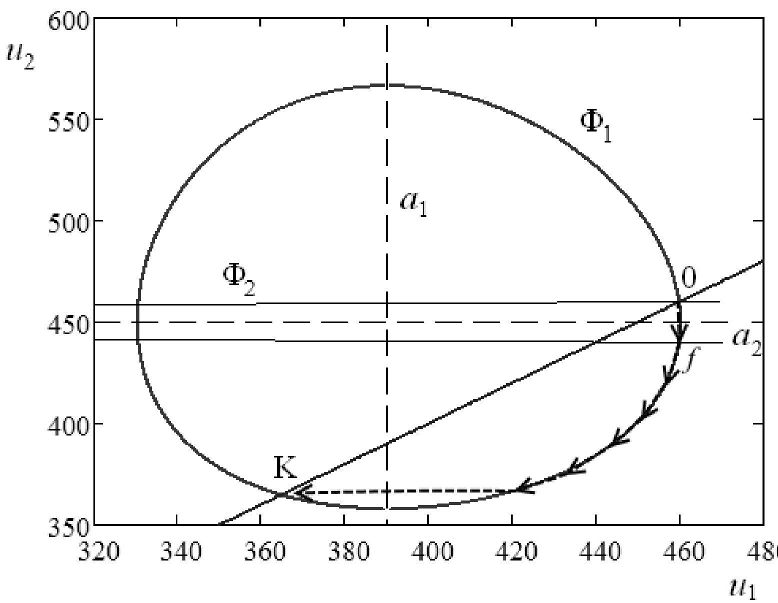
$$C_{12} = C_1 + C_2,\ C_3 = C_{12}u_0 + p_{10} + p_{20},\ \xi_i = C_i / C_{12},\ \alpha = \xi_2 / \rho_{22}$$

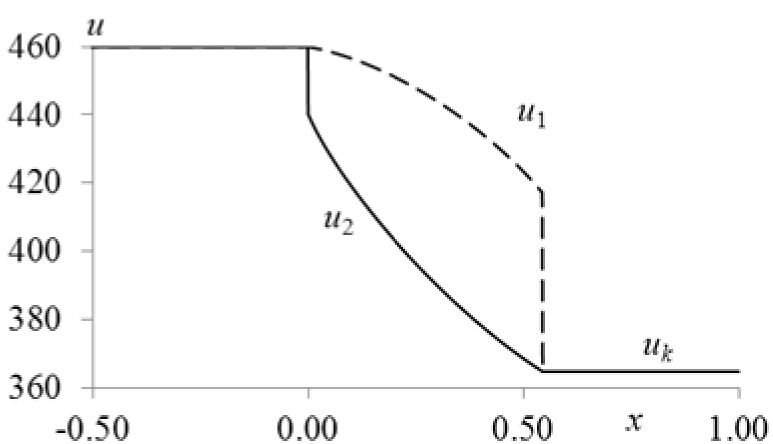
Таким образом, определяются параметры за замороженной и равновесной УВ. После этого возможно конструировать решения в рамках математической модели структуры УВ в неравновесной смеси газа и твердых частиц при учете зависимости давления в газовой фазе от средней плотности несжимаемых частиц.



РЕЗУЛЬТАТЫ

Замороженные УВ. Тест.





$$u_0 > a_2 > a_1,\ u_0 = 460,\ a_2 = 450,\ a_1 = 390$$

m_{20}	u_k, м/с	
	$p_1 = p_1(\rho_1)$	$p_1 = p_1(\rho_1, \rho_2)$
$2.0035\cdot10^{-4}$	364.7	364.8
$2.0035\cdot10^{-3}$	420.4	420.6
$2.0035\cdot10^{-2}$	437.9	438.1

В диапазоне значений концентрации m_{20} = $2.0035\cdot10^{-4}$–$2.0035\cdot10^{-2}$ результаты расчетов по модели [Бедарев И.А., Федоров А.В.. Структура и устойчивость ударной волны в газовзвеси с двумя давлениями // Вычислительные технологии, 2015] ($p_1 = p_1(\rho_1)$, $p_2 = p_2(\rho_2)$) и предложенной в настоящей работе модели ($p_1 = p_1(\rho_1, \rho_2)$, $p_2 = p_2(\rho_2)$) согласуются

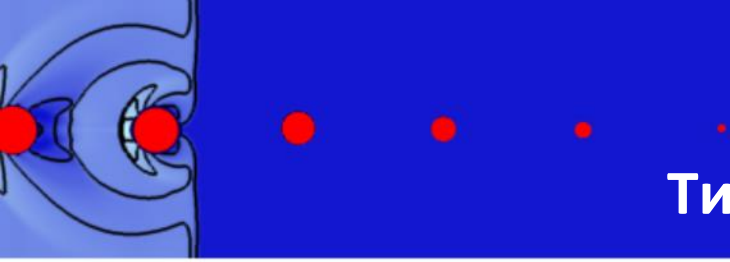
$$m_{20} = 2\cdot10^{-4}$$

ТАБЛИЦА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Тип УВ	m_2	u_0, м/с	u_k, м/с
Дисперсионно-замороженная УВ разрежения	$1 \cdot 10^{-4}$	200	447
Полностью дисперсионная	$2 \cdot 10^{-3}$	200	109.6
Дисперсионная хвостовая во 2-й фазе	$1 \cdot 10^{-2}$	200	36.5
Замороженная однофронтовая	$2 \cdot 10^{-4}$	460	194
Замороженно-звуковая	$1.9 \cdot 10^{-3}$	460	50
Замороженная двухфронтовая	$1 \cdot 10^{-2}$	460	18.6
Замороженная двухфронтовая	$1 \cdot 10^{-1}$	460	47.2

Параметры смеси:

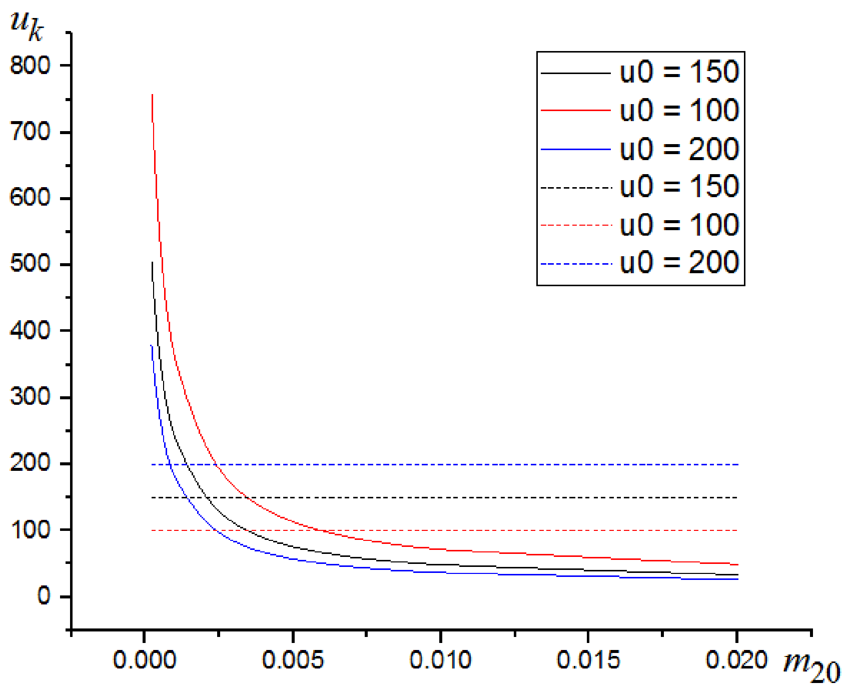
$a_1 = 330$ м/с, $a_2 = 50$ м/с, $\rho_{11} = 1.2$ кг/м^3, $\rho_{22} = 2700$ кг/м^3



РЕЗУЛЬТАТЫ

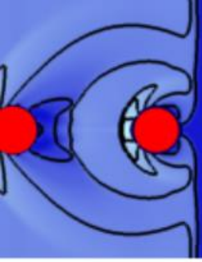
Типы Ударных волн

$$a_2 < u_0 < a_1,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 100 \div 200$$



Зависимость конечной равновесной скорости от начальной концентрации частиц.

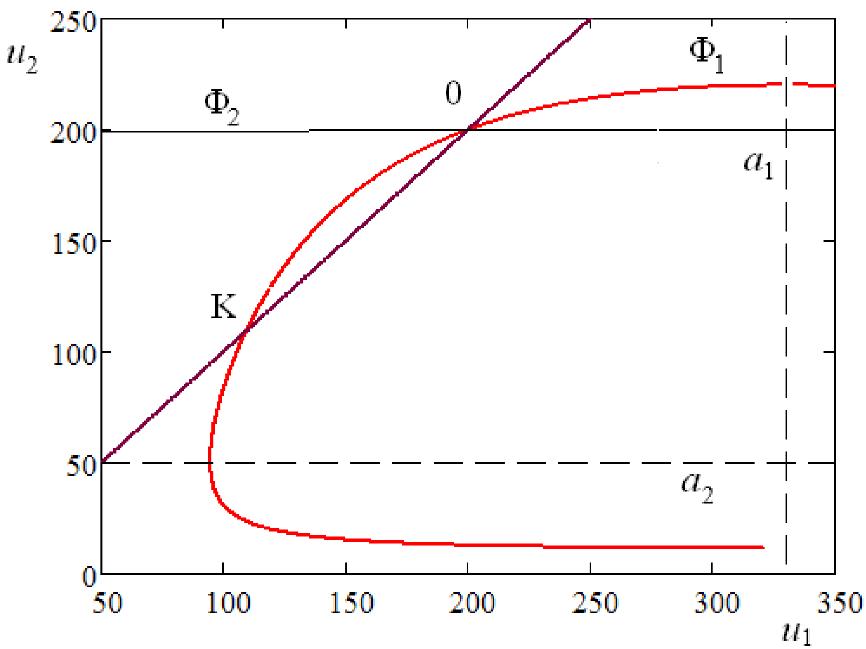
Сплошными кривыми показана зависимость $u_k = u_k(m_{20})$, пунктирными — линии $u = u_0$.

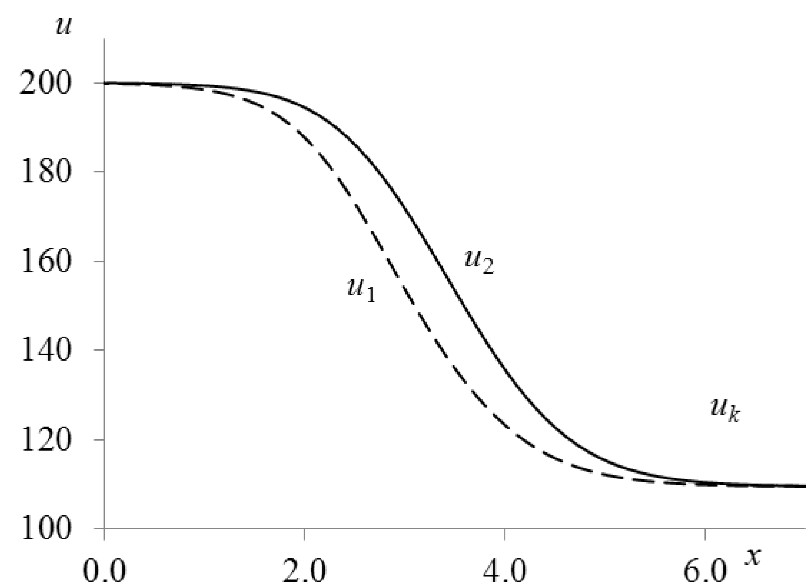


РЕЗУЛЬТАТЫ 1

Полностью дисперсионная УВ

$$a_2 < u_0 < a_1,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 200$$



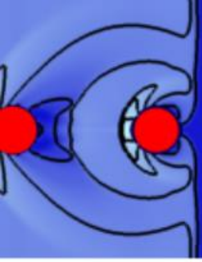


$$m_{20} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 200,\ u_k = 109.63$$

Возмущенная точка начального состояния

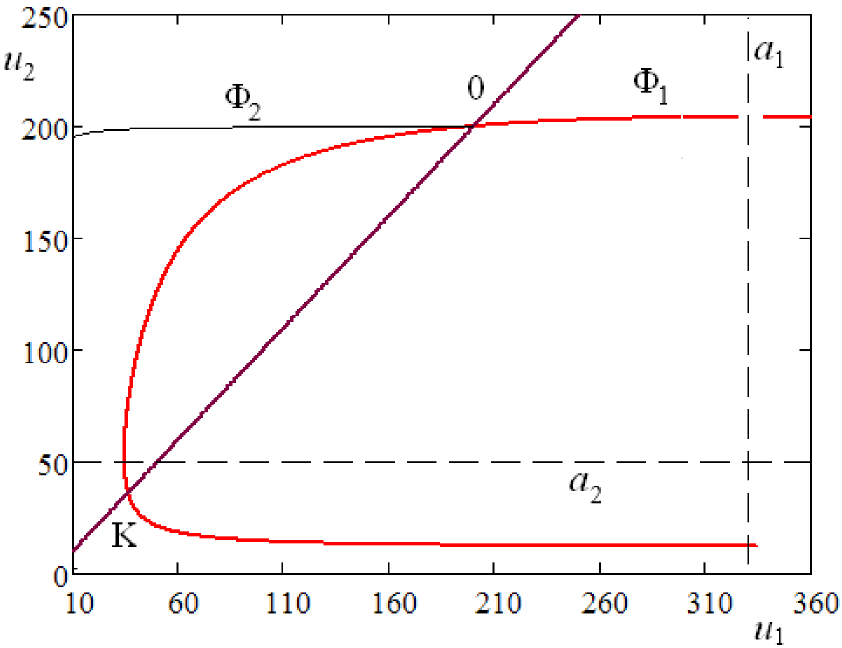
$$\overline{u}_1 = u_0 - \varepsilon,\ \Phi_1\left(u_0 - \varepsilon, \overline{u}_2\right) = 0$$

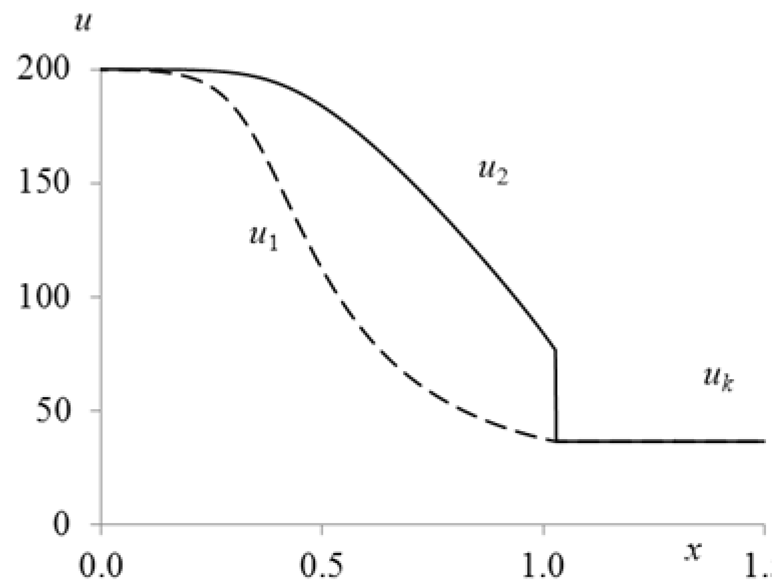


РЕЗУЛЬТАТЫ 2

Дисперсионная УВ по 1 и 2-ой фазе, Хвостовая по 2-й

$$a_2 < u_0 < a_1,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 200$$





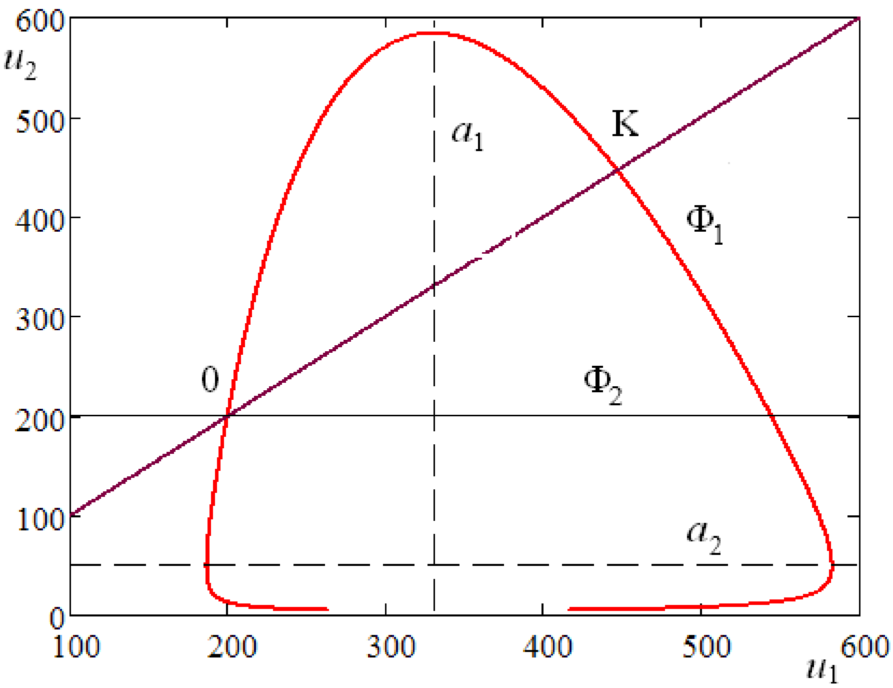
$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-2}$$

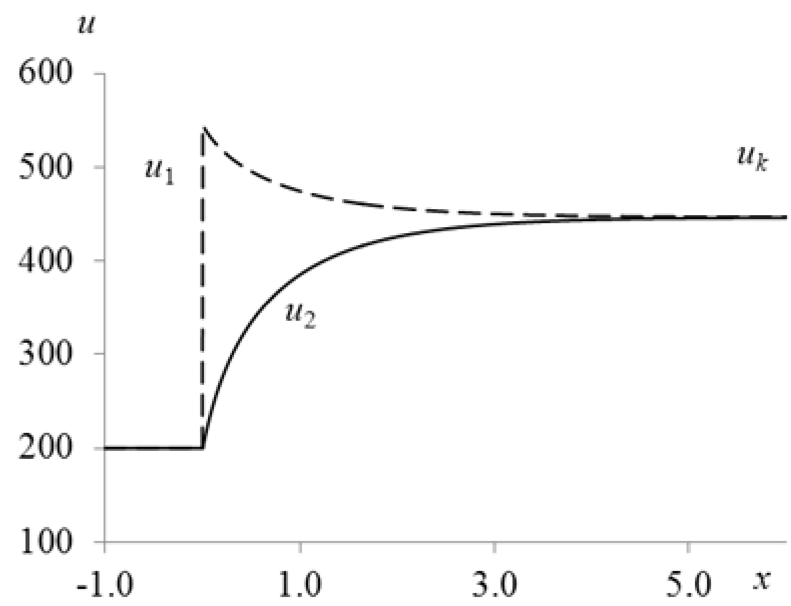
$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = 200,\ u_k = 36.5$$

РЕЗУЛЬТАТЫ 3

Дисперсионно-замороженная УВ разрежения

$$a_2 < u_0 < a_1, \ a_1 = 330, \ a_2 = 50, \ u_0 = 200$$





$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-4}$$

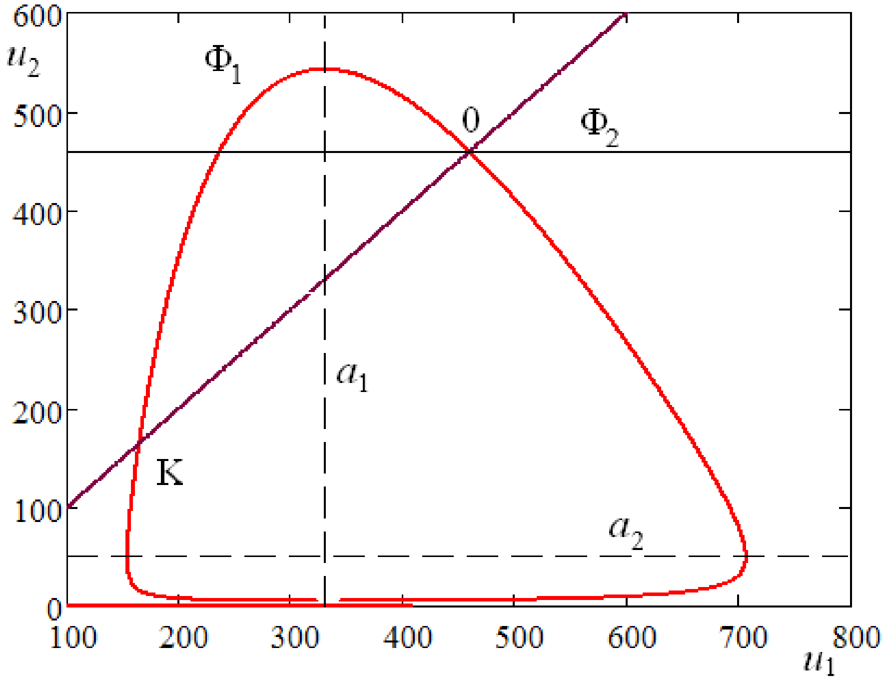
$$\bar{u}_1 = 544.5, \ \bar{u}_2 = 200, u_k = 446.8$$

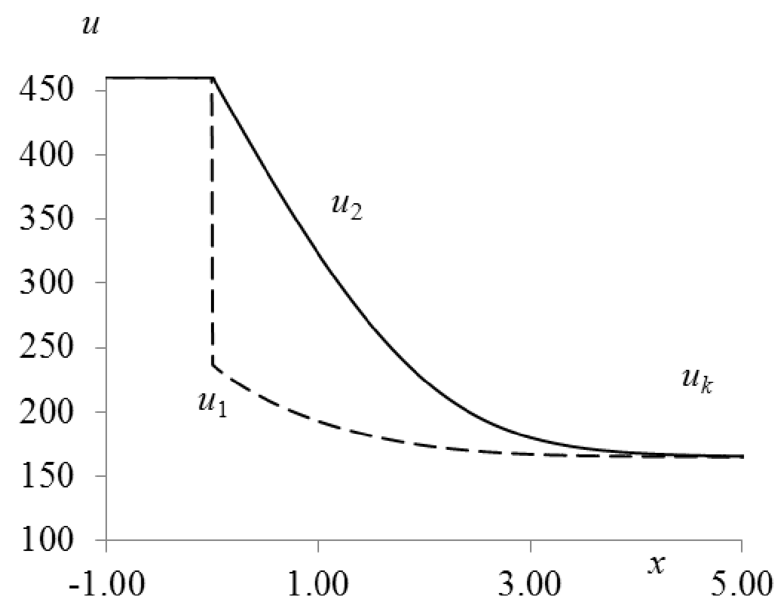
Дисперсионно-замороженная волна разрежения (неустойчивая)

РЕЗУЛЬТАТЫ 4

Замороженная однофронтовая

$$a_2 < a_1 < u_0, \ a_1 = 330, \ a_2 = 50, \ u_0 = 460$$





$$m_{20} = 2 \cdot 10^{-4}$$

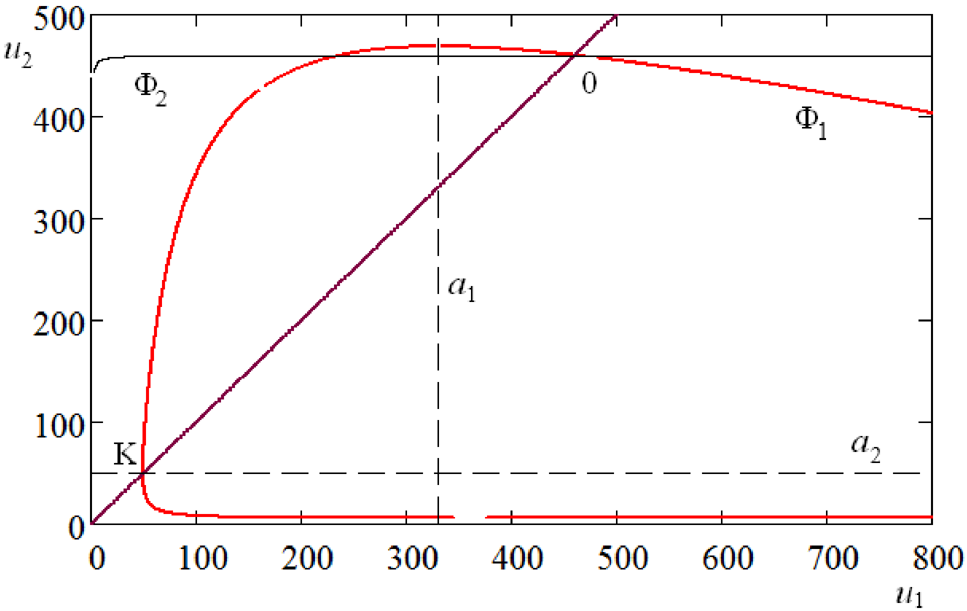
$$\bar{u}_1 = 275.5, \ \bar{u}_2 = 460, u_k = 165.1$$

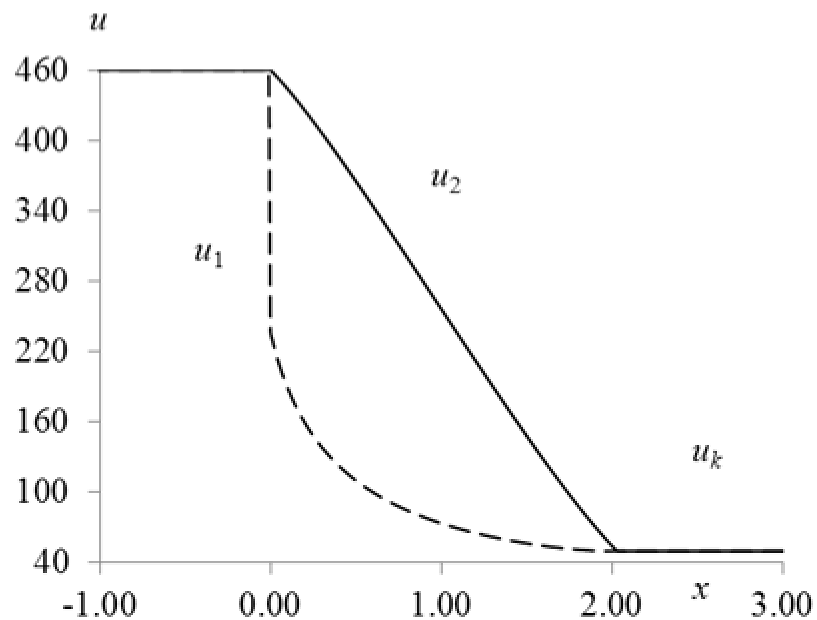
Замороженная однофронтовая (по 1-ой фазе) волна

РЕЗУЛЬТАТЫ 5

Замороженно-«звуковая»

$$a_2 < a_1 < u_0,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 460$$

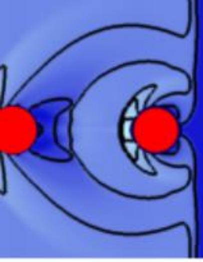




$$m_{20} = 1.9 \cdot 10^{-3}$$

$$\overline{u}_1 = 236.7,\ \overline{u}_2 = 460, u_k = 50$$

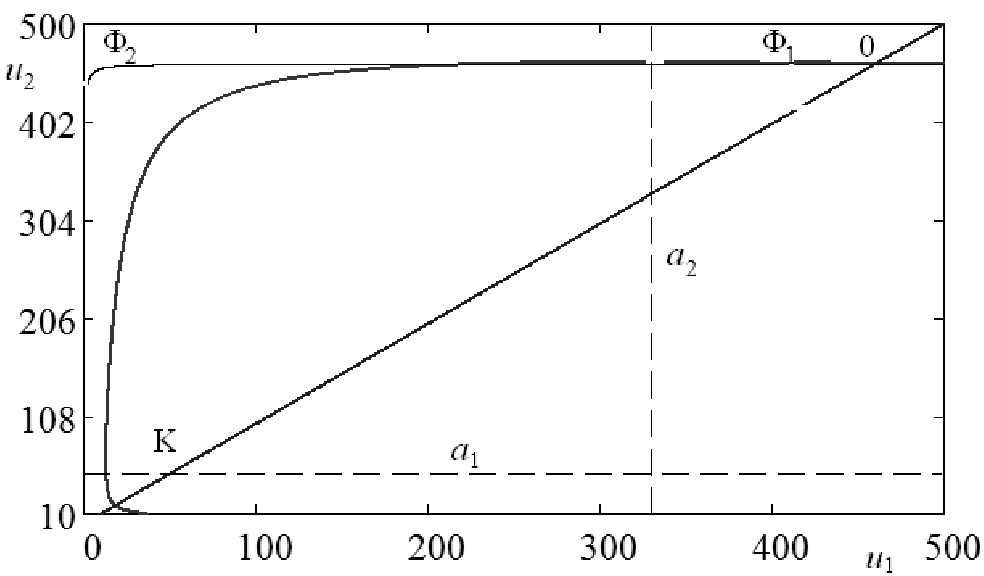
Замороженно-«звуковая» (по 2-ой фазе) волна

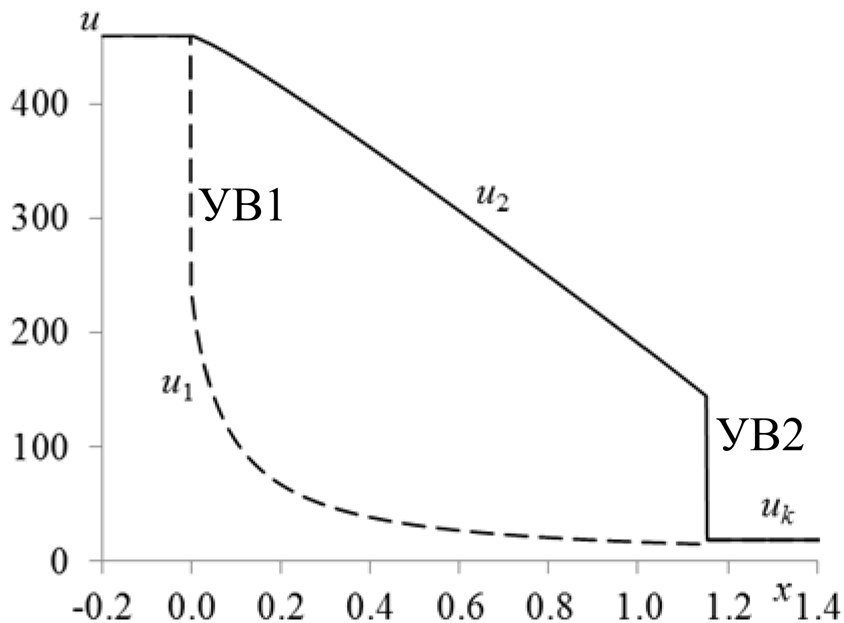


РЕЗУЛЬТАТЫ 6

Замороженная двухфронтовая

$$a_2 < a_1 < u_0,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 460$$





$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-2}$$

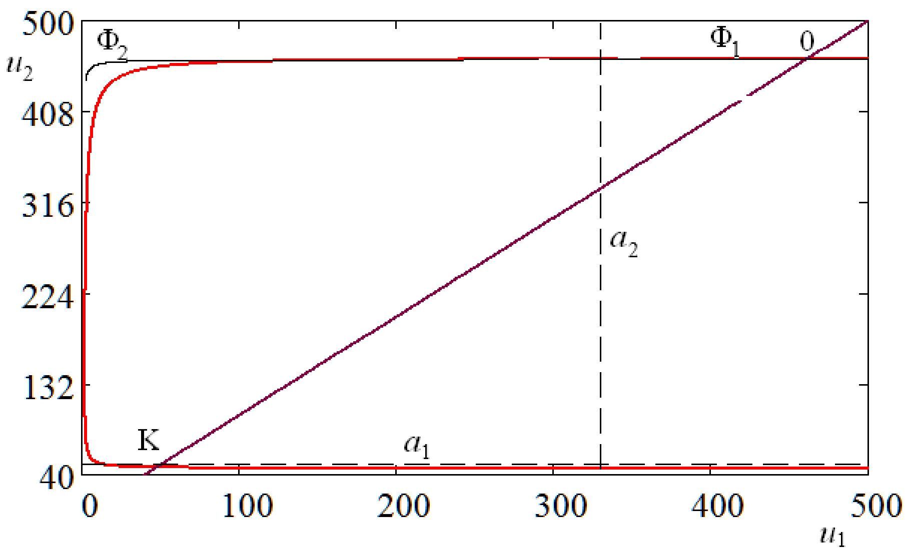
$$\bar{u}_1 = 236.7,\ \bar{u}_2 = 460,\ u_k = 18.6$$

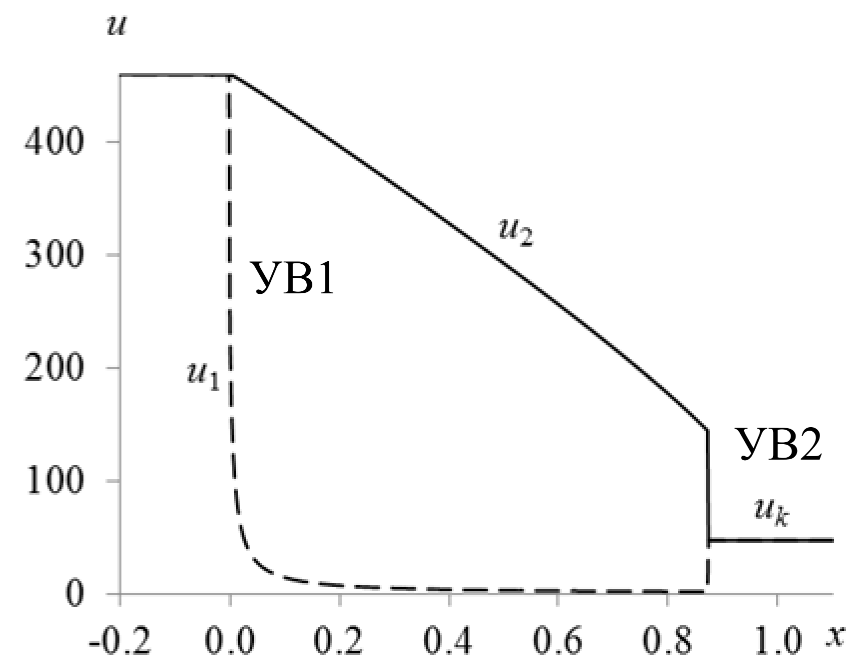
Замороженная двухфронтовая волна

РЕЗУЛЬТАТЫ 7

Замороженная двухфронтовая УВ

$$a_2 < a_1 < u_0,\ a_1 = 330,\ a_2 = 50,\ u_0 = 460$$

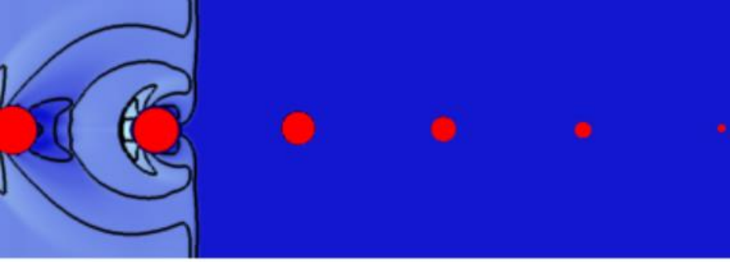




$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-1}$$

Замороженная двухфронтовая волна

$$\overline{u}_1 = 236.7,\ \overline{u}_2 = 460,\ u_k = 47.2$$



Проверка устойчивости некоторых типов УВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД
АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВУ

TVD схема основанная на методе расщепления по физическим процессам третьего порядка точности

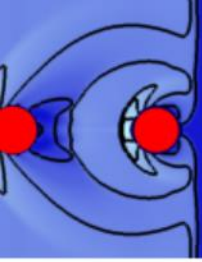
В векторной форме уравнения Эйлера имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} = f$$

Для построения устойчивой TVD-схемы необходимо расщепить вектор потоков $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = \vec{Q}^{+} + \vec{Q}^{-}$$

В соответствии с методом расщепления потоков по физическим процессам разделим вектор потоков на составляющие в зависимости от знака скорости таким образом, что давление аппроксимируется по потоку, а все остальные переменные против потока



ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД
АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВУ

Аппроксимируем производные потоков по пространственным переменным с помощью TVD-схемы:

$$\left(\frac{\partial \vec{Q}}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\vec{Q}_{i+1/2} - \vec{Q}_{i-1/2}}{\Delta x}$$

$$\vec{Q}_{i\pm1/2} = \vec{Q}^{-}_{i\pm1/2} + \vec{Q}^{+}_{i\pm1/2},$$

$$Q^{-}_{i+1/2} = Q^{-}_{i+1} - \frac{\sigma}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\delta^{+} + \left(1+\kappa\right)\delta^{-}\right]\left(Q^{-}_{i+1}\right)$$

$$Q^{+}_{i+1/2} = Q^{+}_{i} + \frac{\sigma}{4}\left[\left(1-\kappa\right)\delta^{-} + \left(1+\kappa\right)\delta^{+}\right]\left(Q^{+}_{i}\right)$$

$$\delta^{+} = \begin{array}{ll} 0, & sign\Delta^{+} sign\Delta^{-} \le 0 \\ min\left(\left|\Delta^{+}\right|, \Theta\left|\Delta^{-}\right|\right), & sign\Delta^{+} sign\Delta^{-} \ge 0 \end{array}$$

$$\delta^{-} = \begin{array}{ll} 0, & sign\Delta^{+} sign\Delta^{-} \le 0 \\ min\left(\left|\Delta^{-}\right|, \Theta\left|\Delta^{+}\right|\right), & sign\Delta^{+} sign\Delta^{-} \ge 0 \end{array}$$

$$\Delta^{+}\left(\vec{Q}_i\right) = \left(\vec{Q}_{i+1} - \vec{Q}_i\right)$$

$$\Delta^{-}\left(\vec{Q}_i\right) = \left(\vec{Q}_i - \vec{Q}_{i-1}\right)$$

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД
АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВУ

Схема типа Рунге-Кутты произвольного порядка точности

Пусть *y* — одна из неизвестных функций ρ или *u*, а $Q_y(t)$ — производные по *x* и правые части уравнений Эйлера. Используя эти обозначения, уравнения Эйлера можно представить в виде:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + Q_y(t) = 0}$$

Тогда *m*-стадийная схема имеет вид:

$$\boxed{y^{(0)} = y^{(n)}}$$

$$\boxed{y^{(1)} = y^{(0)} - \gamma_m \tau Q_y^{(0)}}$$

$$\boxed{y^{(2)} = y^{(0)} - \gamma_{m-1} \tau Q_y^{(1)}}$$

$$\boxed{y^{(m)} = y^{(0)} - \gamma_1 \tau Q_y^{(m-1)}}$$

$$\boxed{y^{(n+1)} = y^{(m)}}$$

для двухстадийной схемы ($m = 2$):

$\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$;

для трехстадийной схемы ($m = 3$):

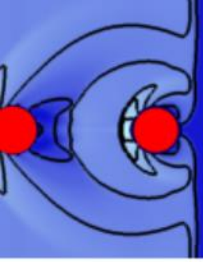
$\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_3 = 1/2$;

для четырехстадийной схемы ($m = 4$):

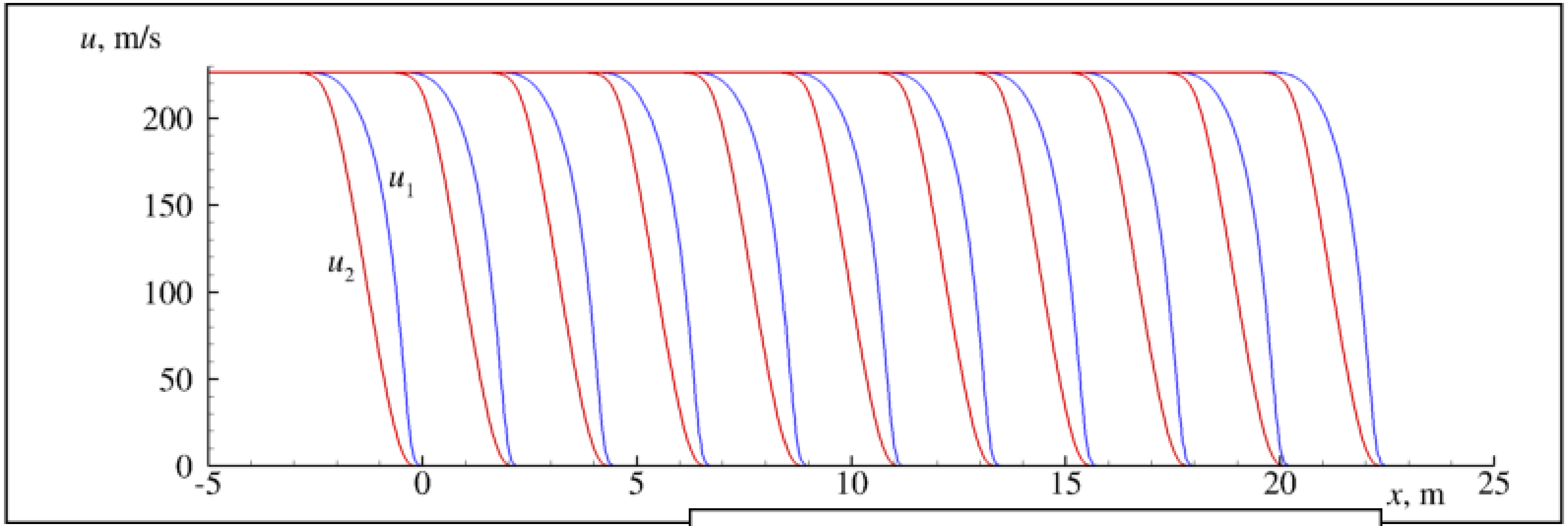
$\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 5/9$, $\gamma_3 = 4/15$, $\gamma_5 = 1/3$;

для пятистадийной схемы ($m = 5$):

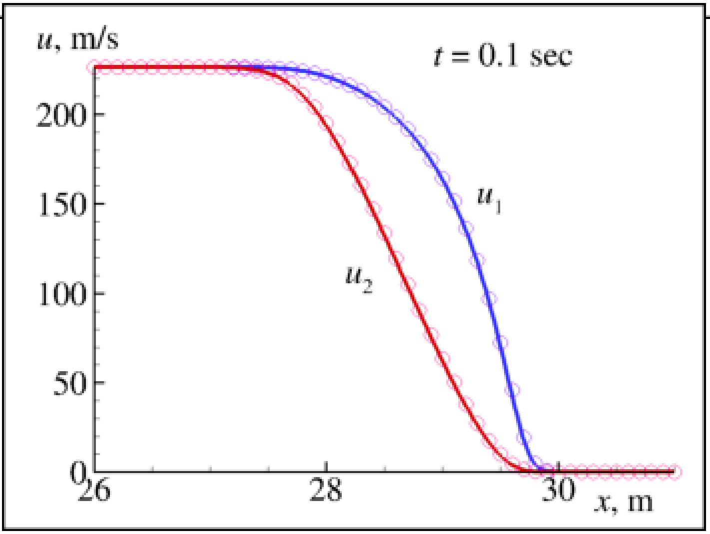
$\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_3 = 3/8$, $\gamma_4 = 1/6$, $\gamma_5 = 1/4$.



РАСПРОСТРАНЕНИЕ полностью дисперсионной УВ

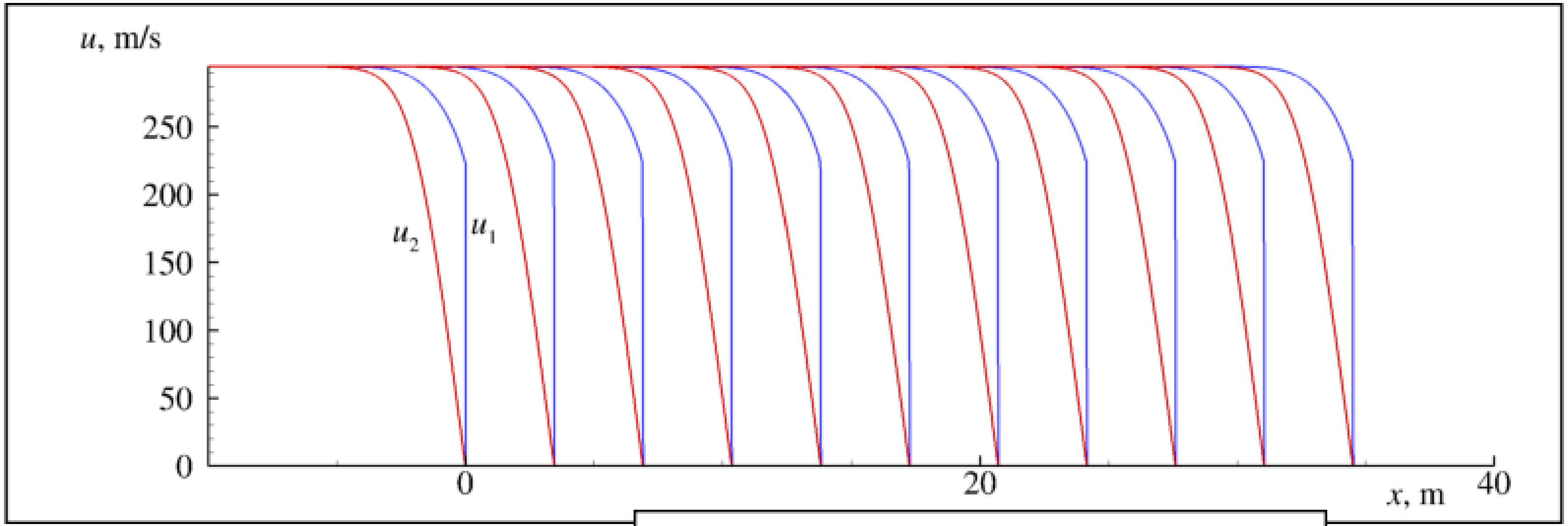


$$m_{20} = 2 \cdot 10^{-3}$$
$$u_0 = 300\, м/с$$
$$a_1 = 330\, м/с$$
$$a_2 = 50\, м/с$$



Сравнение стационарного и нестационарного решения

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
замороженной однофронтовой УВ

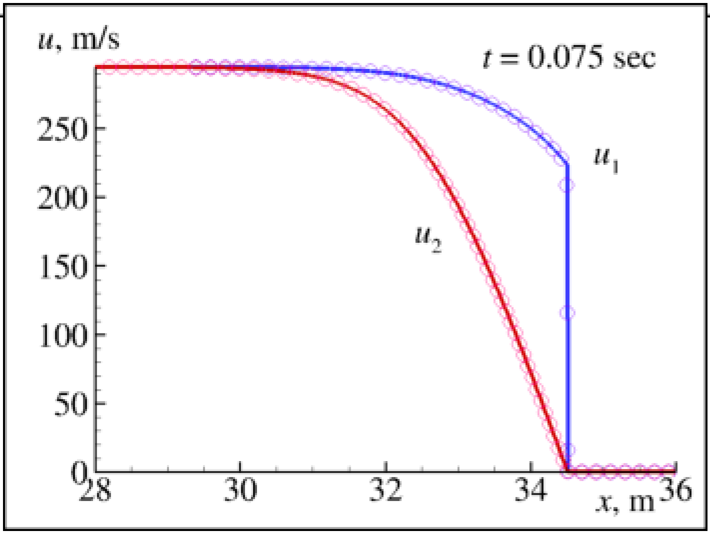


$$m_{20} = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$u_0 = 460\,м/с$$

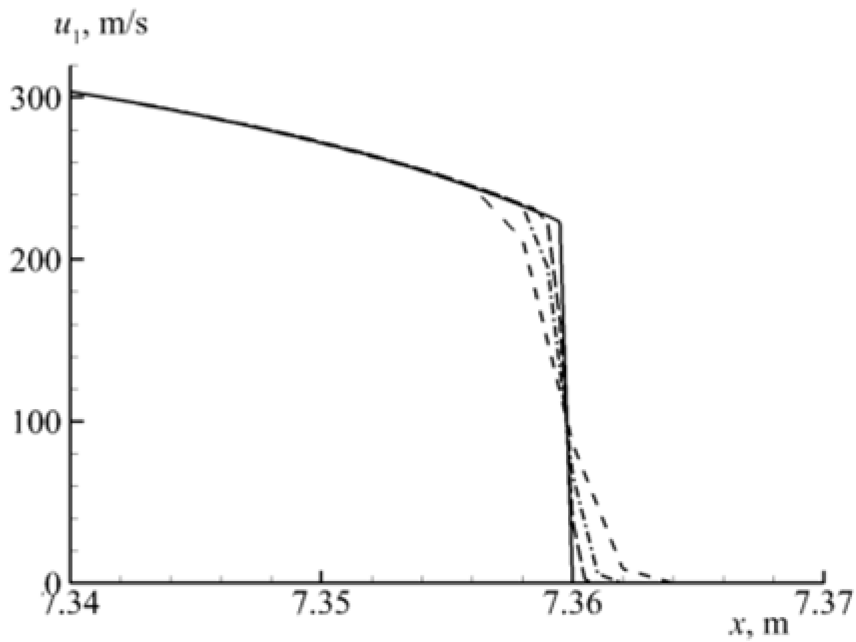
$$a_1 = 330\,м/с$$

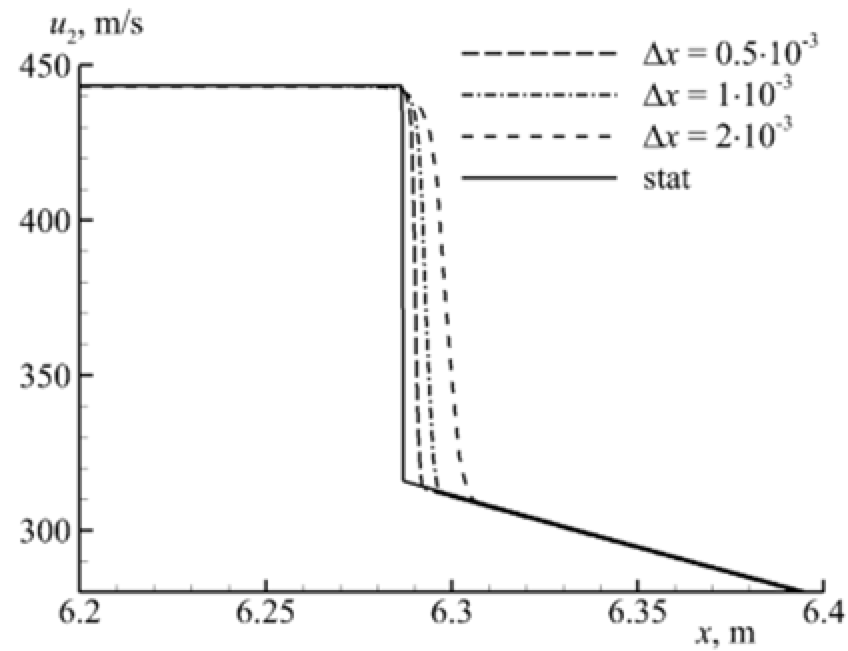
$$a_2 = 50\,м/с$$



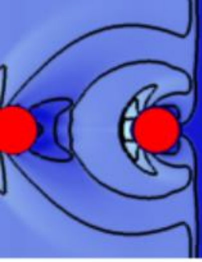
Сравнение стационарного и нестационарного решения

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
замороженной двухфронтовой УВ
(сходимость по сетке)

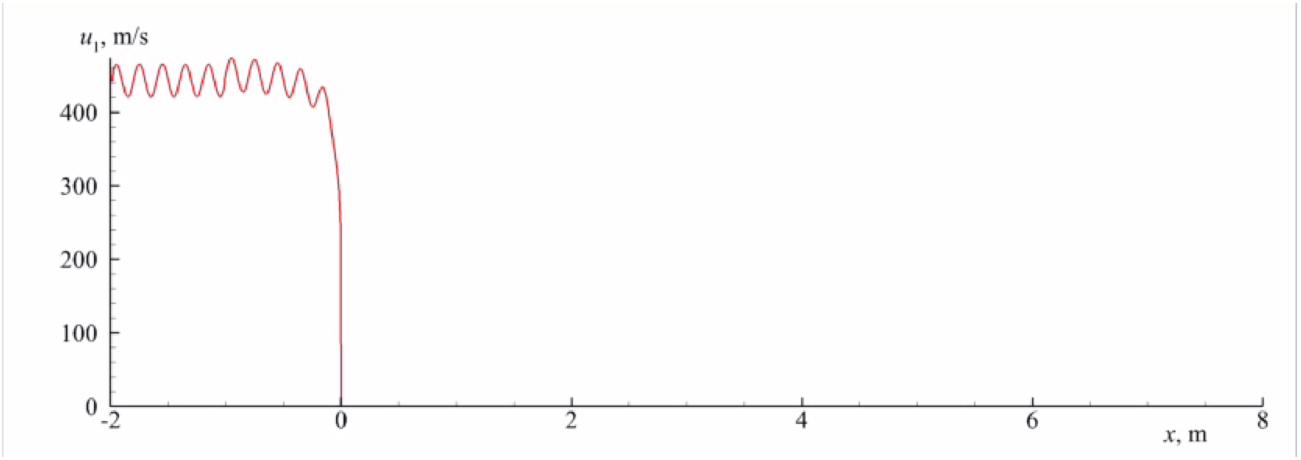


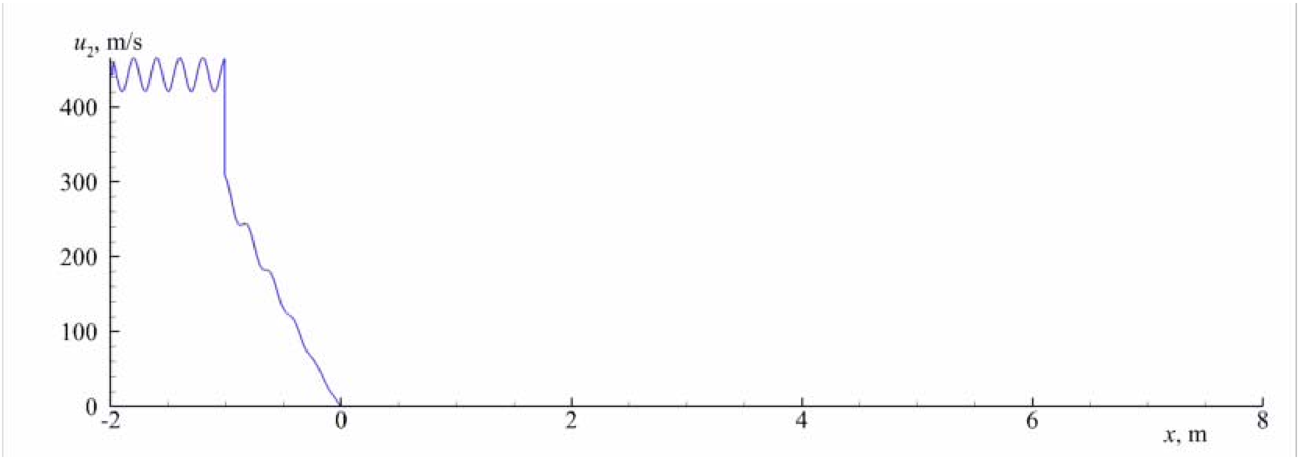


$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-2}, u_0 = 460\, м/с, a_1 = 330\, м/с, a_2 = 50\, м/с$$



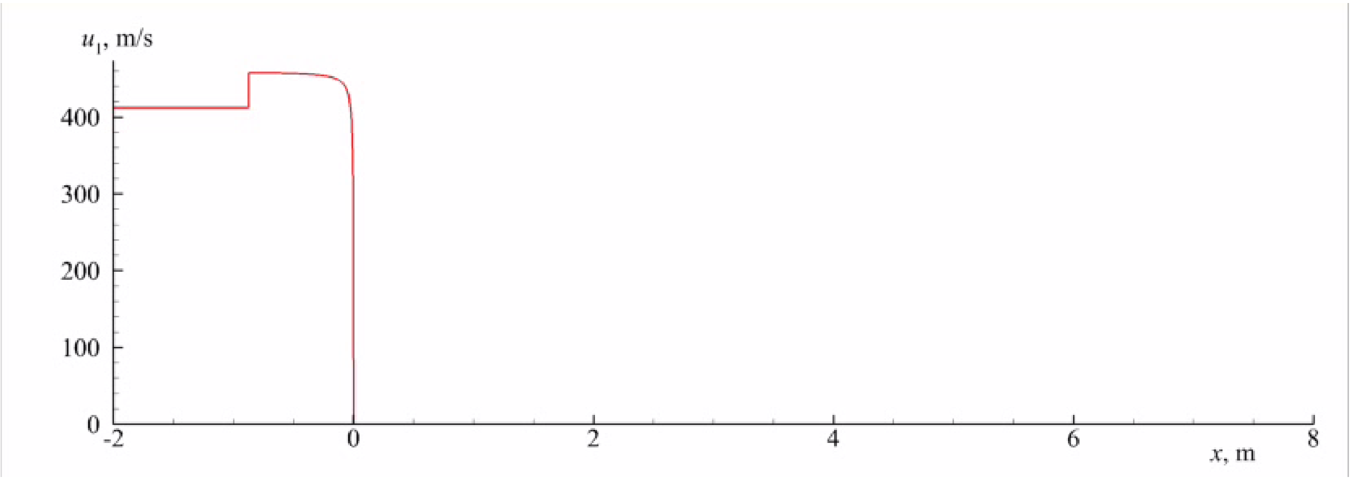
РАСПРОСТРАНЕНИЕ
замороженной двухфронтовой УВ
(устойчивость к конечным возмущениям)

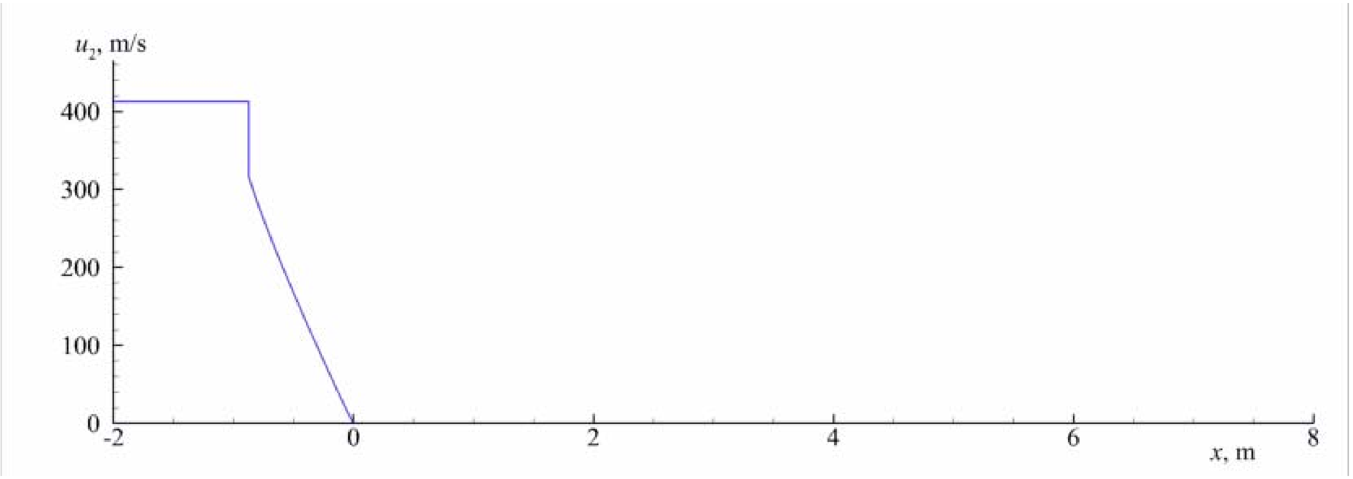




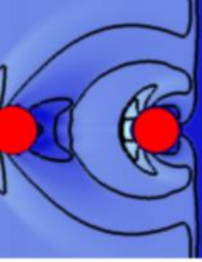
$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-2}, u_0 = 460\,м/с, a_1 = 330\,м/с, a_2 = 50\,м/с$$

РАСПРОСТРАНЕНИЕ
замороженной двухфронтовой УВ
(устойчивость к малым возмущениям)

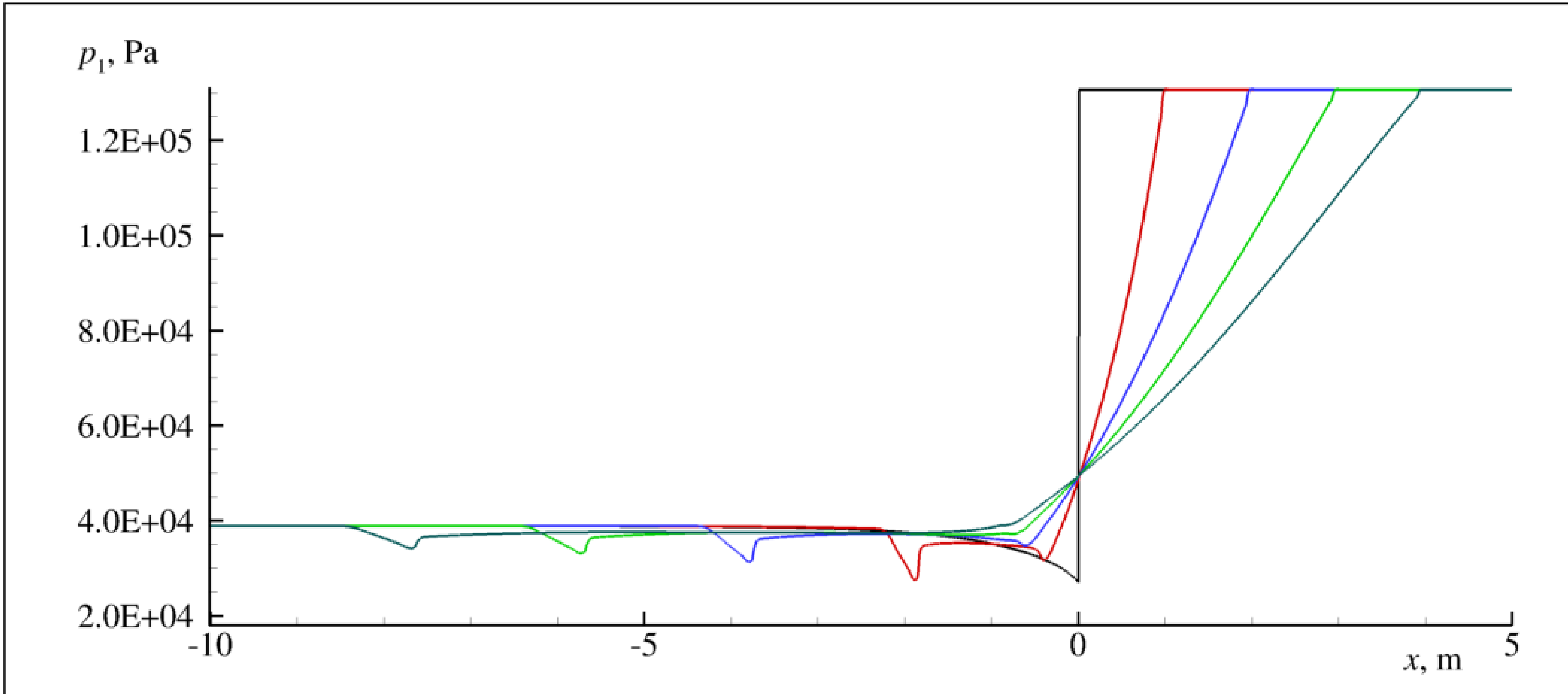




$$m_{20} = 1 \cdot 10^{-1}, u_0 = 460\, м/с, a_1 = 330\, м/с, a_2 = 50\, м/с$$



РАСПРОСТРАНЕНИЕ дисперсионно-замороженной УВ разрежения, заданной в качестве начальных данных



$$m_{20} = 2 \cdot 10^{-4}, u_0 = 150\, м/с, a_1 = 330\, м/с, a_2 = 50\, м/с, u_k = 505.7\, м/с$$

ВЫВОДЫ

В математической модели Андерсона для описания течения смеси газа и твердых частиц с учетом их собственного давления развита теория сильного разрыва, позволившая описать типы стационарных ударных волн.

Создана математическая технология расчета начально-краевой задачи для нестационарных одномерных уравнений механики гетерогенной среды Андерсона, имеющих составной тип.

Численно показана:

– устойчивость полученных замороженных и дисперсионных ударных волн различных типов (1 и 2 фронтовой конфигурацией) относительно инфинитезимальных возмущений;

– неустойчивость УВ разрежения.