



Посвящается 100-летию со дня рождения
академика Е.И. Забабахина
Международная конференция
«XIII ЗАБАБАХИНСКИЕ НАУЧНЫЕ
ЧТЕНИЯ»

Численное решение задачи безударного
сильного сжатия одномерных слоёв газа с
учётом условий на характеристике

Баутин С.П., Новаковский Н.С.

n.s.novakovskiy@yandex.ru

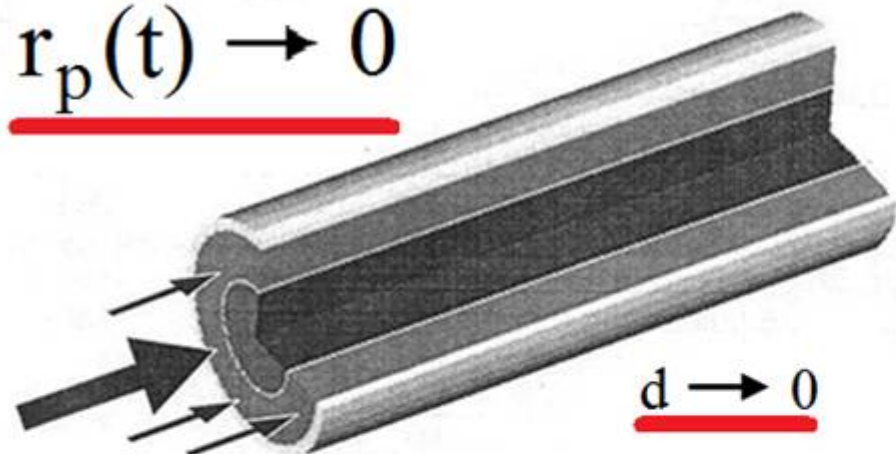
sbautin@usurt.ru

План доклада

1. Общие сведения о решаемой задаче
2. Применение метода характеристик к решению задачи в обратном направлении изменения времени.
3. Алгоритм решения задачи сильного сжатия в прямом направлении изменения времени неявным конечно-разностным методом с учётом условия на характеристике. Результаты расчётов.
4. Выводы.

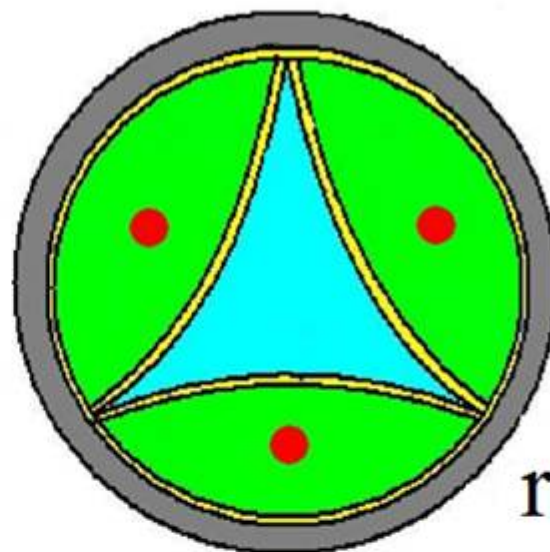
Примеры мишеней

$$\underline{r_p(t) \rightarrow 0}$$



$$\underline{d \rightarrow 0}$$

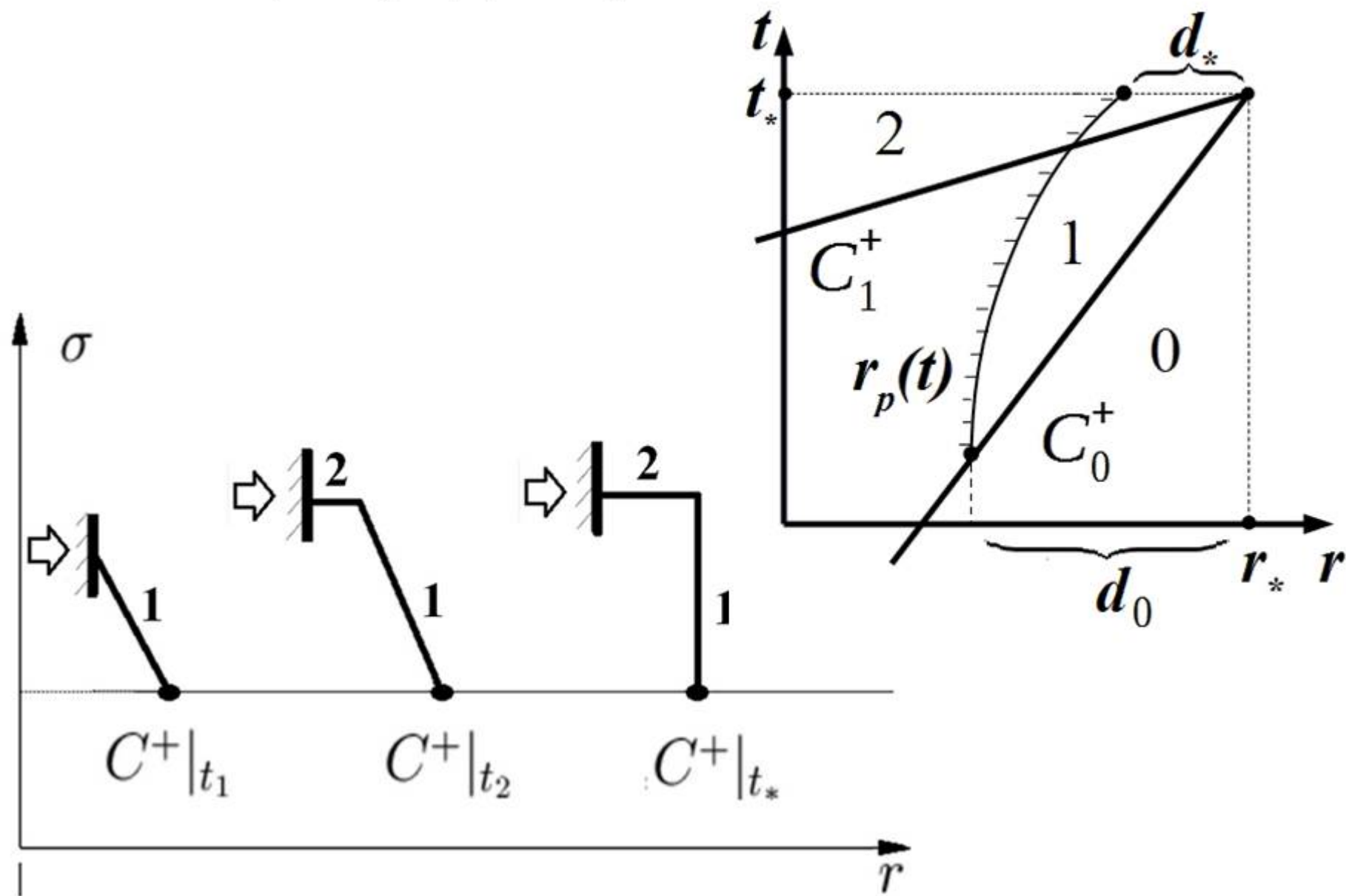
$$\underline{d \rightarrow 0}$$



$$\underline{r_p(t) \not\rightarrow 0}$$

- [1] Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.
- [2] Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия, М, ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [3] Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука. 2007.
- [4] Сучков В.А. Истечение газа в вакуум на косої стенке// ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 739-740.
- [5] Сидоров А.Ф. Новые режимы неограниченного безударного сжатия газа. // Доклады АН. – 1999.- Т. 364, №2. – С. 199-202
- [6] Николаев Ю. В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6. N. 2. С. 104-108.
- [7] Анучин М. Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя. // ПМТФ. 1998. Т. 39, N. 4. С. 25–32.
- [8] Артемьев А. Ю., Делов В. И., и др. Численное моделирование безударного неограниченного сжатия газа ...// ВАНТ. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1995. Вып. 4. С. 42-47.

(σ - r) - диаграмма сжатия



Одномерная система уравнений газовой динамики (СУГД)

$$\begin{cases} \sigma_t + u\sigma_r + \frac{(\gamma - 1)}{2}\sigma \left(u_r + \nu \frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + \frac{2}{(\gamma - 1)}\sigma\sigma_r + uu_r = 0, \\ s = 1. \end{cases}$$

$$\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad \nu = 0, 1, 2$$

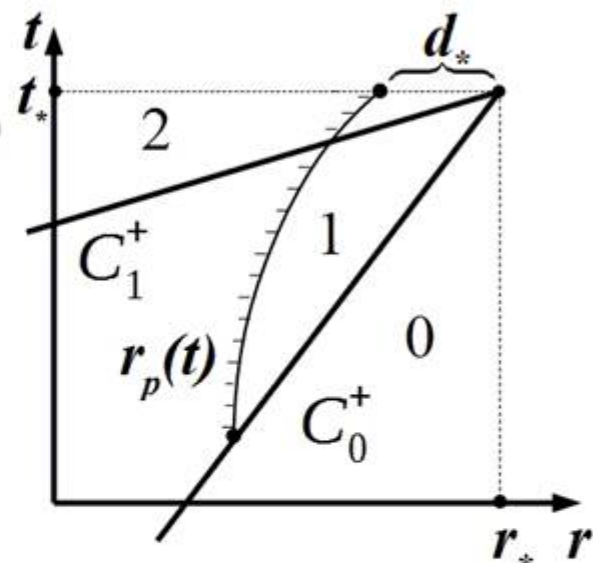
$$r = \begin{cases} x_1, \nu = 0, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2} \geq 0, \nu = 1, 2. \end{cases}$$

Точное решение в области 1

$\nu = 0$ центрированная волна (ЦВ) Римана

$$u(t, r) = \frac{2}{\gamma - 1} \sigma - \frac{2}{\gamma - 1} \text{const},$$

$$\frac{r - r_*}{t - t_*} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{2}{\gamma - 1} \text{const}$$



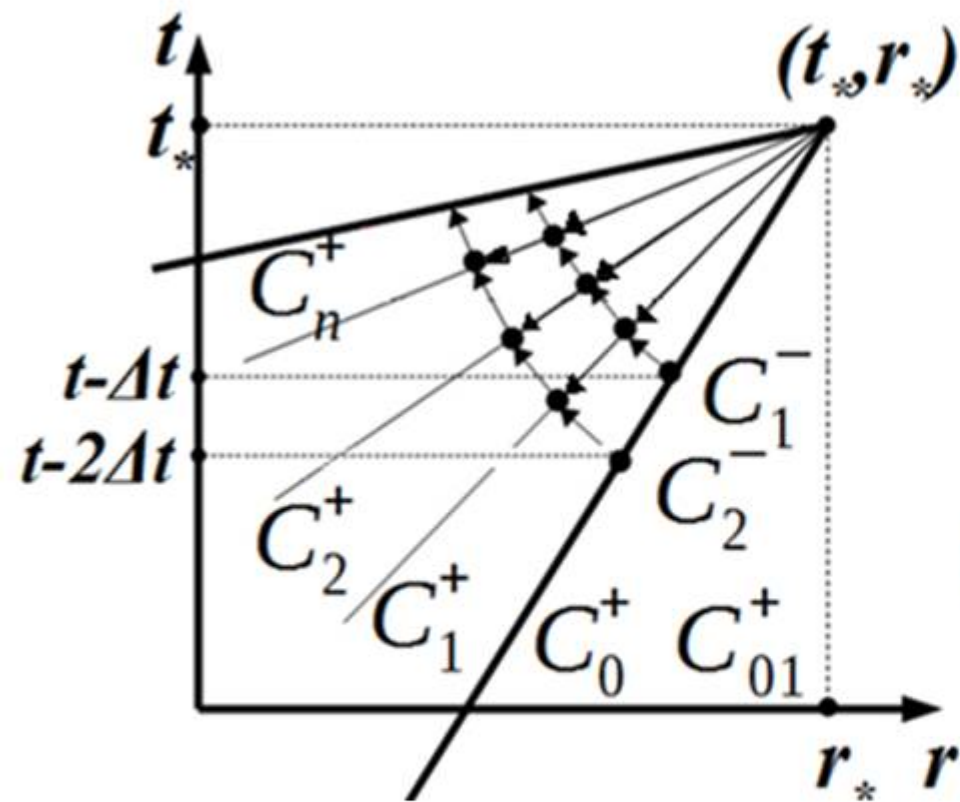
$\nu = 1, 2$ обобщенная ЦВ Б.Римана

$$u(t, \sigma) = \left[\frac{2}{\gamma - 1} \sigma + u_* \right] + (t - t_*) \tilde{u}(t, \sigma)$$

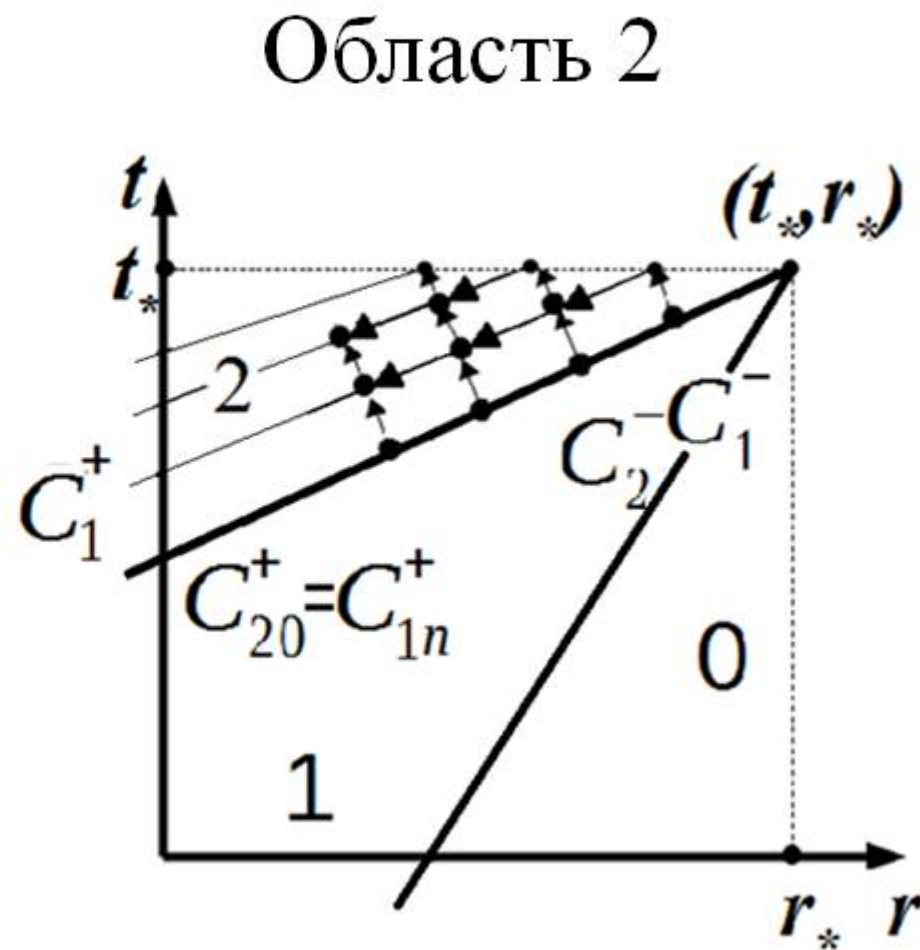
$$r(t, \sigma) = r_* + \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma + u_* \right] (t - t_*) + (t - t_*)^2 \tilde{r}(t, \sigma)$$

$$\frac{r - r_*}{t - t_*} = \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sigma + u_* \right] + (t - t_*) \tilde{r}(t, \sigma)$$

Построение решения в обратном направлении изменения времени методом характеристик



Область 1



Область 2

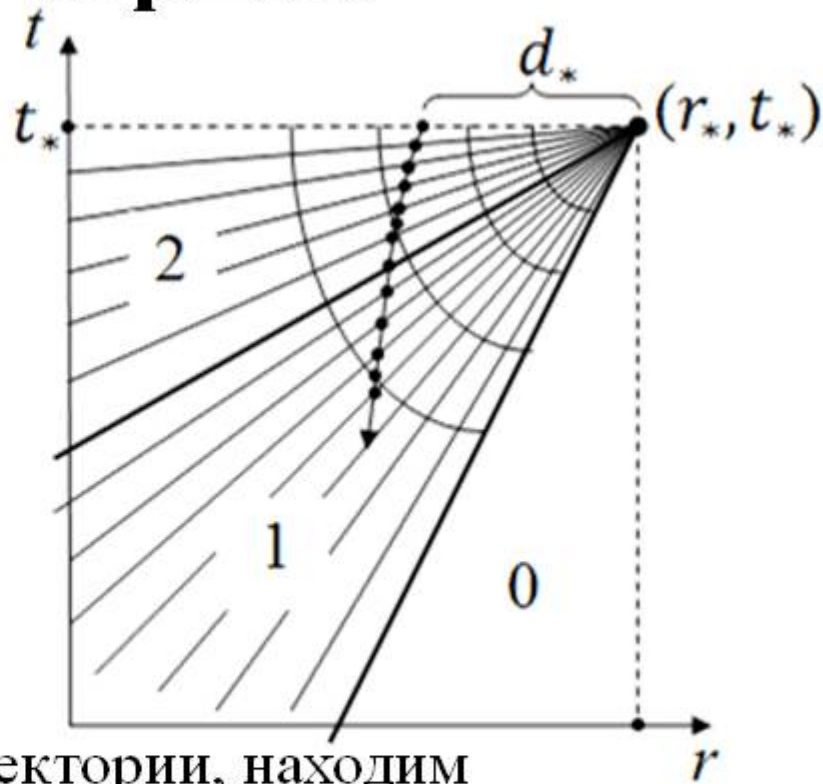
Решение построено.

Как получить рекомендации для эксперимента?

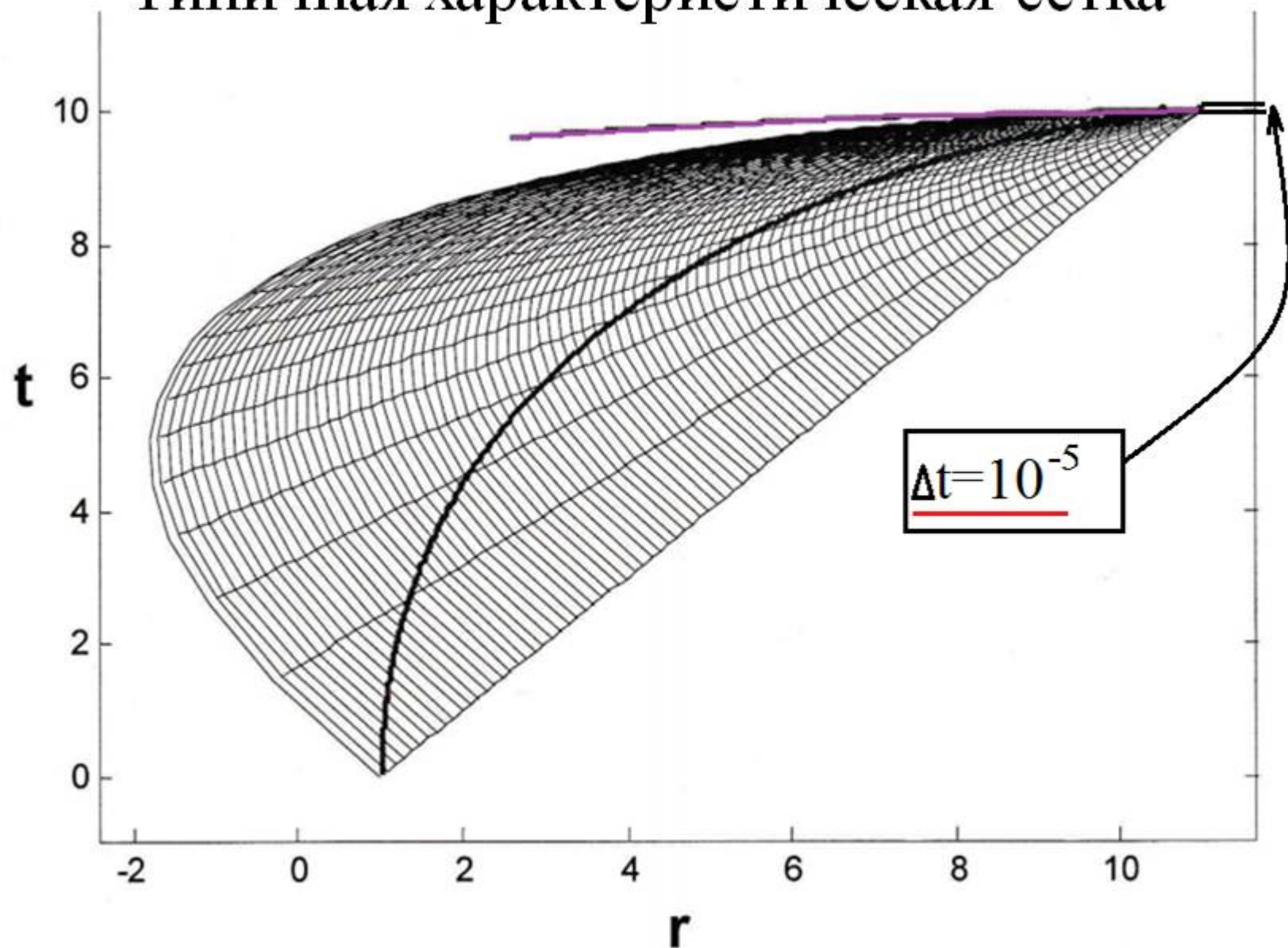
Восстановление закона движения сжимающего поршня

$$\frac{dr}{dt} = u(t, r), r|_{t=t_*} = r_* - d_*$$

1. Находим ячейку характеристической сетки (ХС), в которой лежит первая точка траектории $(r_* - d_*, t_*)$
2. Интерполируем скорость в точку $(r_* - d_*, t_*)$
3. Решаем разностное уравнение траектории, находим следующую точку пересечения.
4. Если достигли C_0^+ -характеристики области **1** - ВСЕ. Иначе переходим снова к пункту 2.



Типичная характеристическая сетка

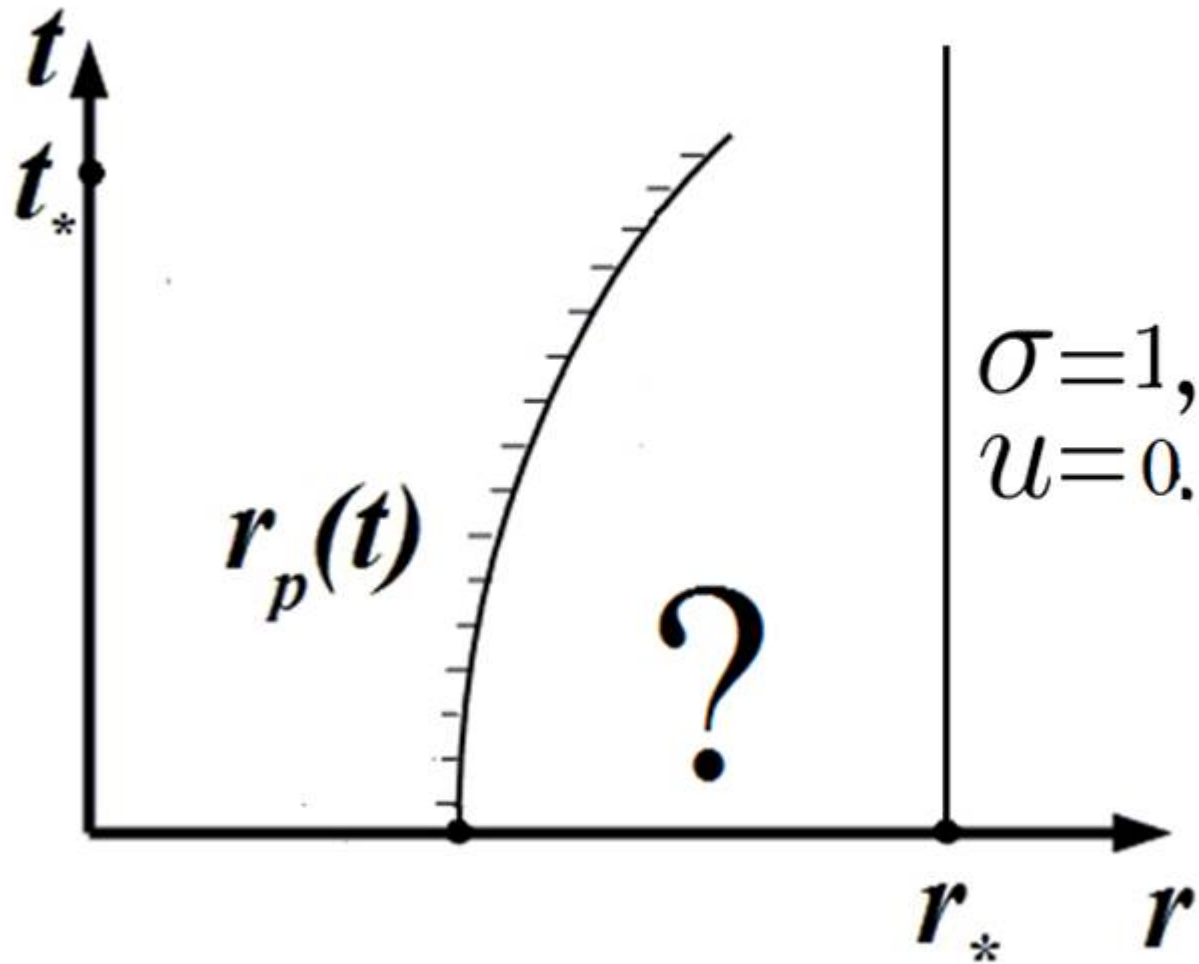


Результаты расчётов в обратном направлении изменения времени

1. Проведены тестовые расчёты ЦВ Римана с восстановлением траектории поршня в случае $v = 0$. Поля газодинамических величин алгоритм восстанавливает точно до 12 знака.
2. Погрешность определения траектории поршня убывает пропорционально увеличению числа расчетных точек
3. Проведены расчеты ряда одномерных задач в случае цилиндрической и сферической симметрии, результаты хорошо согласуются с ранее полученными результатами.

Н.С. Новаковский. Математическое моделирование сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса. // Математические структуры и моделирование. 2016 №3 (39).

Расчёты в прямом направлении изменения времени.



Закон $r_p(t)$ задан

1D СУГД в лагранжевых массовых координатах. Неявная аппроксимация

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial m}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial m}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial (pu)}{\partial x} &= 0, \\ p &= (\gamma - 1)\rho c_v T, \quad \varepsilon = c_v T \\ u|_{x=x_l}(t) &= u_p(t), \\ u|_{x=x_r}(t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

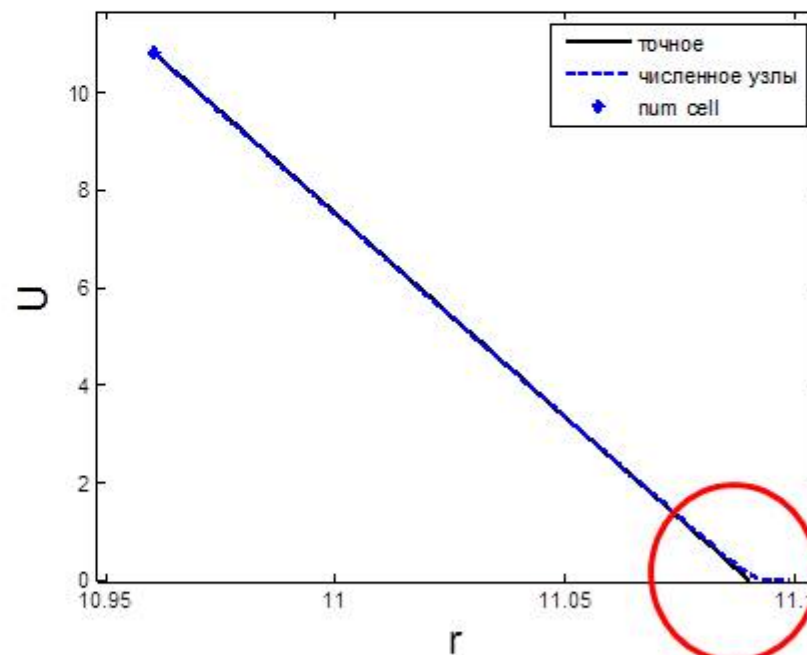
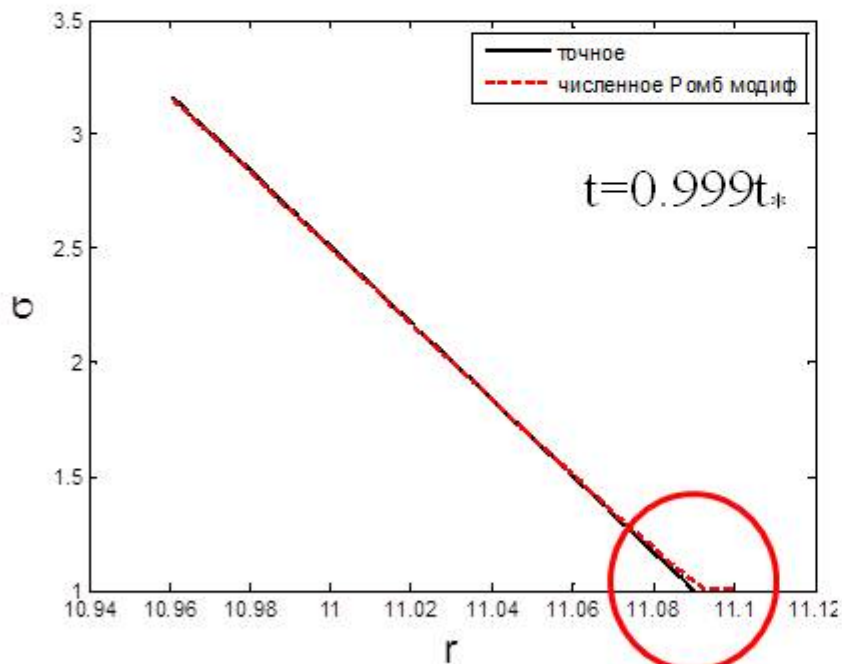
$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} &= \left(\frac{\partial u}{\partial m} \right)^{n+1}, \\ \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= - \left(\frac{\partial p}{\partial m} \right)^{n+1}, \\ \frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} + v^{n+1} \left(\frac{\partial (pu)}{\partial x} \right)^{n+1} &= 0, \\ u_0^n &= u_p(t^n), \\ u_N^n &= 0, \\ u(t^0) &= 0; v(t^0) = 1; \\ E(t^0) &= 1/(\gamma(\gamma - 1)) \end{aligned}$$

А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. // ЖВММФ. 1979. Т. 19. № 5. С. 1288-1303.

А.Д. Гаджиев, С.Ю. Кузьмин, С.Н. Лебедев, В.Н. Писарев Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения двумерных уравнений газовой динамики.// ВАНТ. Сер. Мат. мод. физ. процессов 2001. Вып.4. С. 11-21.

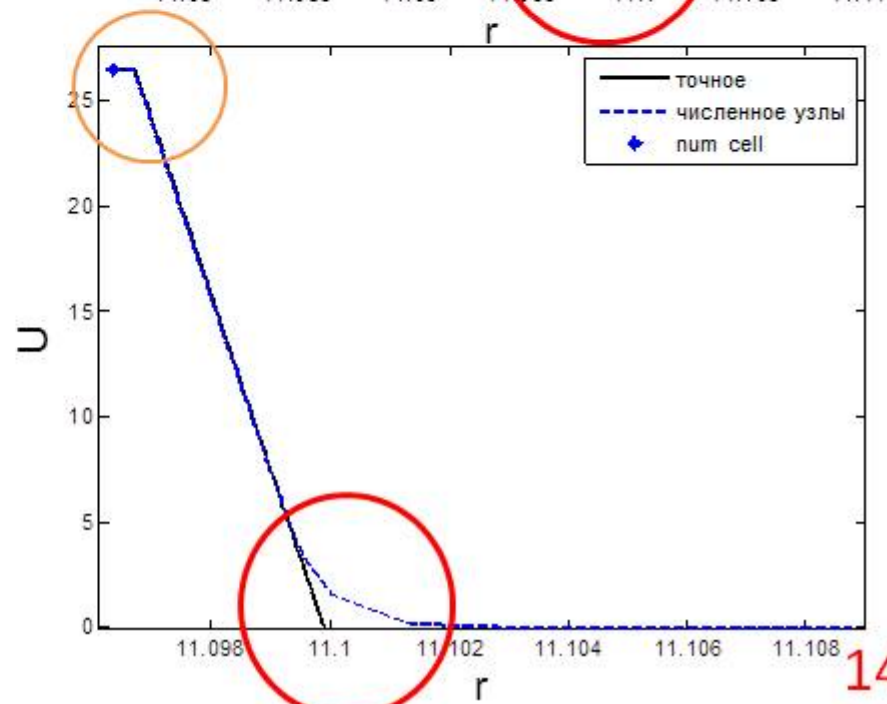
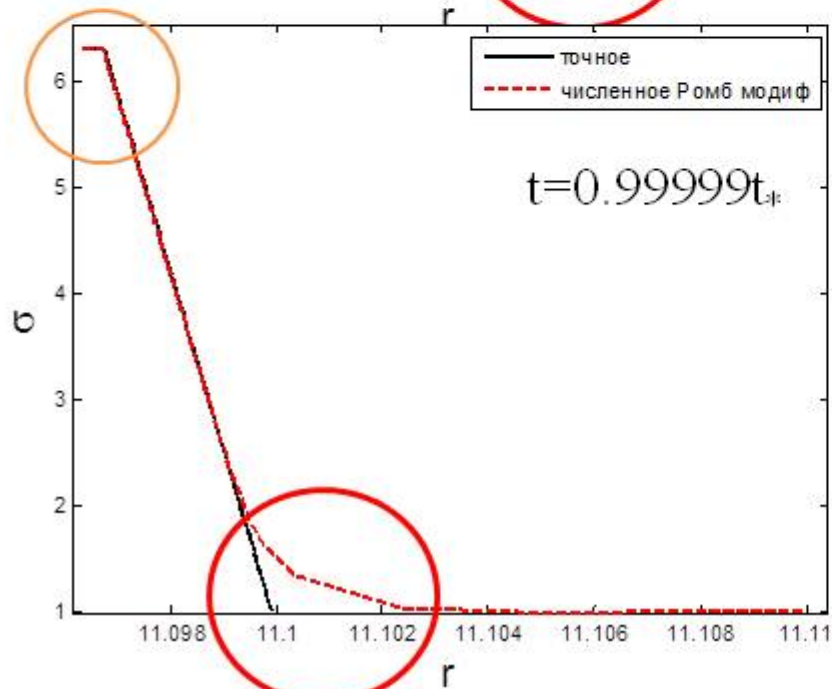
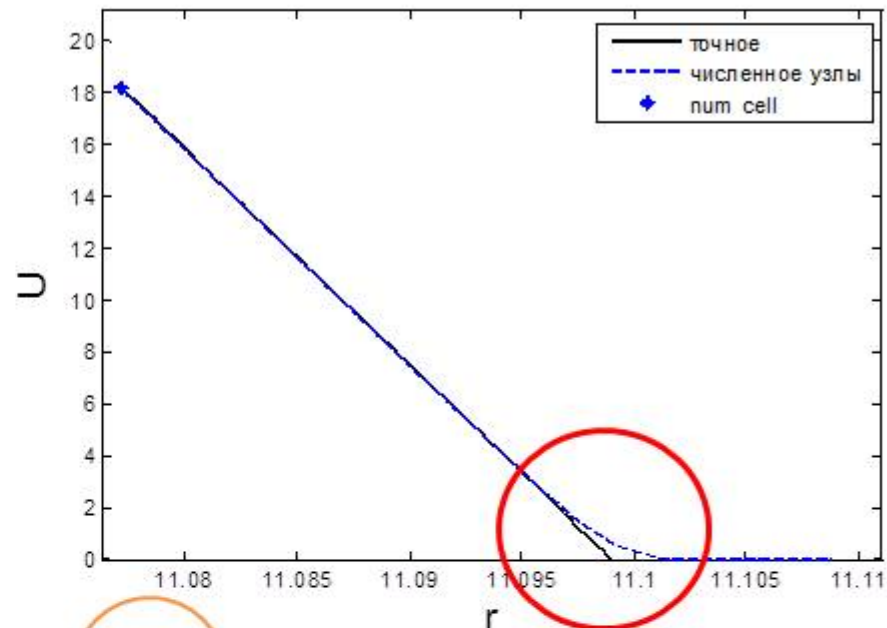
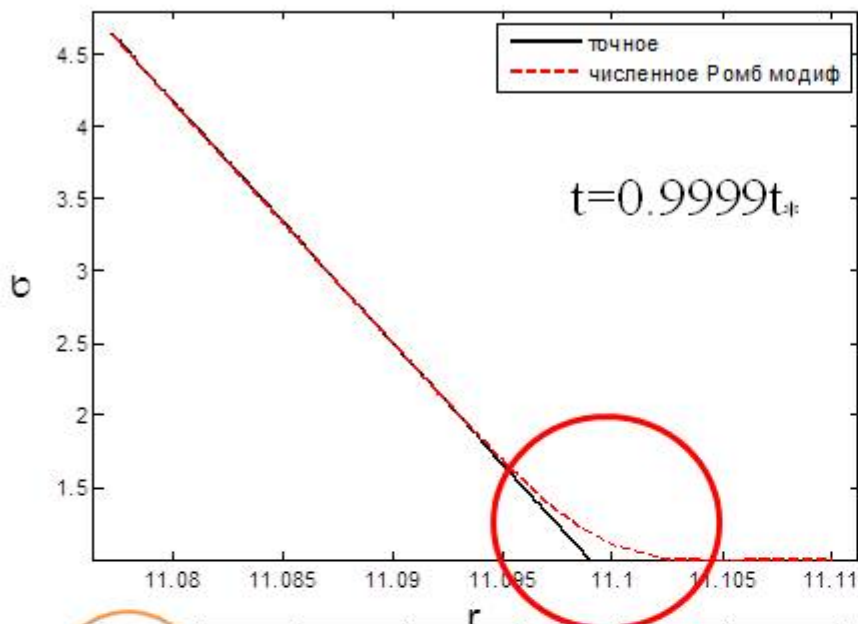
Результаты расчётов методом «РОМБ»

Симметрия	Время до сжатия части массы до максимума ($t_* = 1$)				
	10%	30%	50%	70%	90%
0	0.999980525	0.9999889	0.9999921	0.9999953	0.999998425
1	0.999983714	0.999991876	0.999994142	0.999996381	0.999998857
2	0.9999899	0.9999921	0.9999944	0.9999966	0.9999989

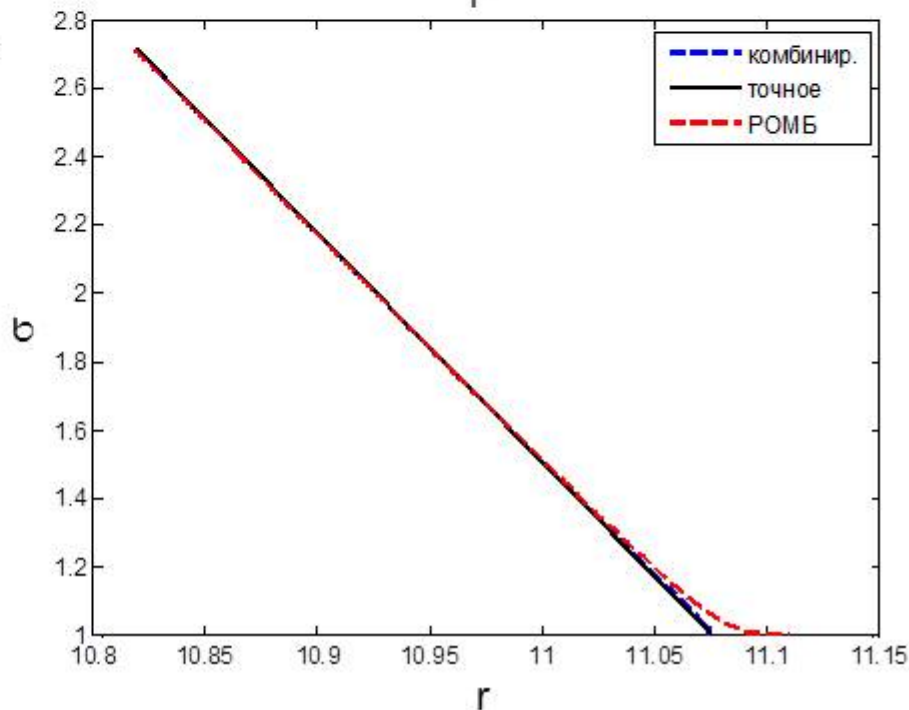
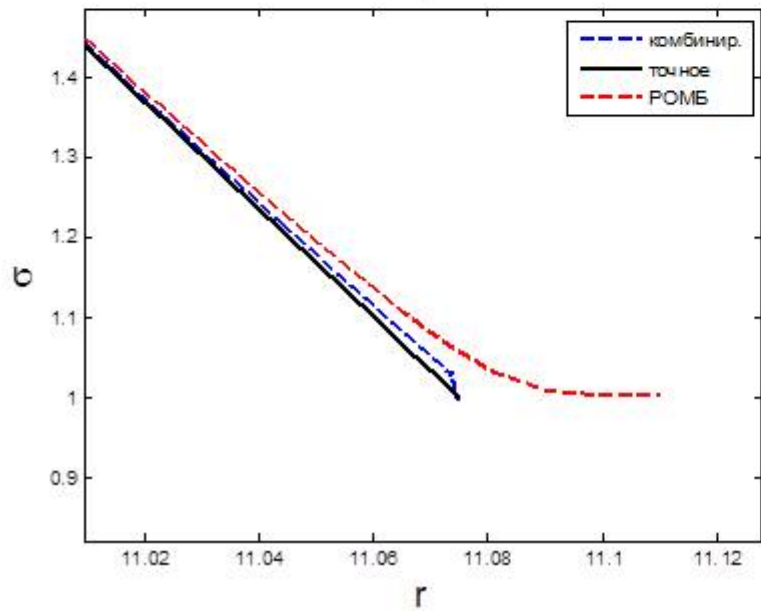
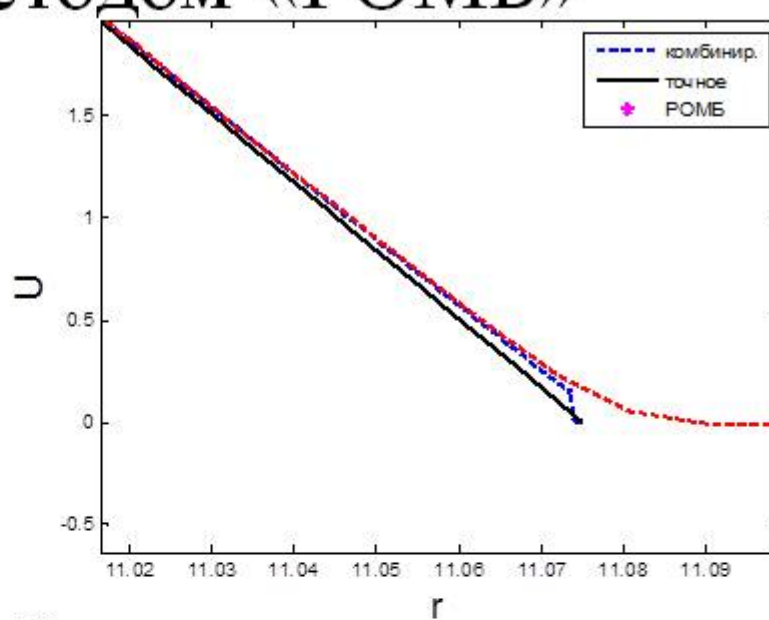
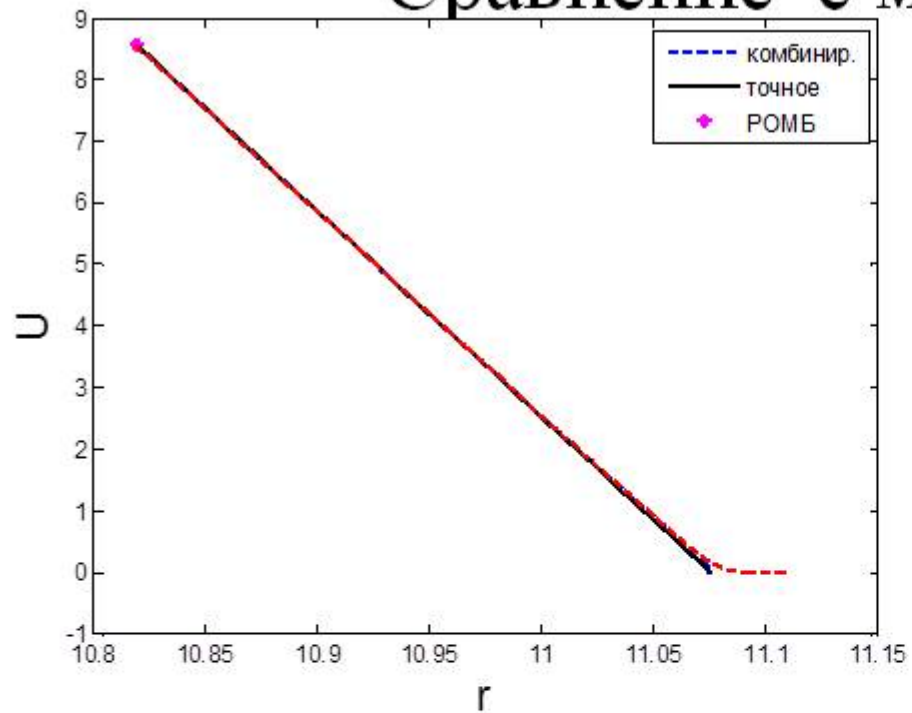


симметрия	$v=0$	$v=1$	$v=2$
$dm, \%$	0.1	0.08	0.14

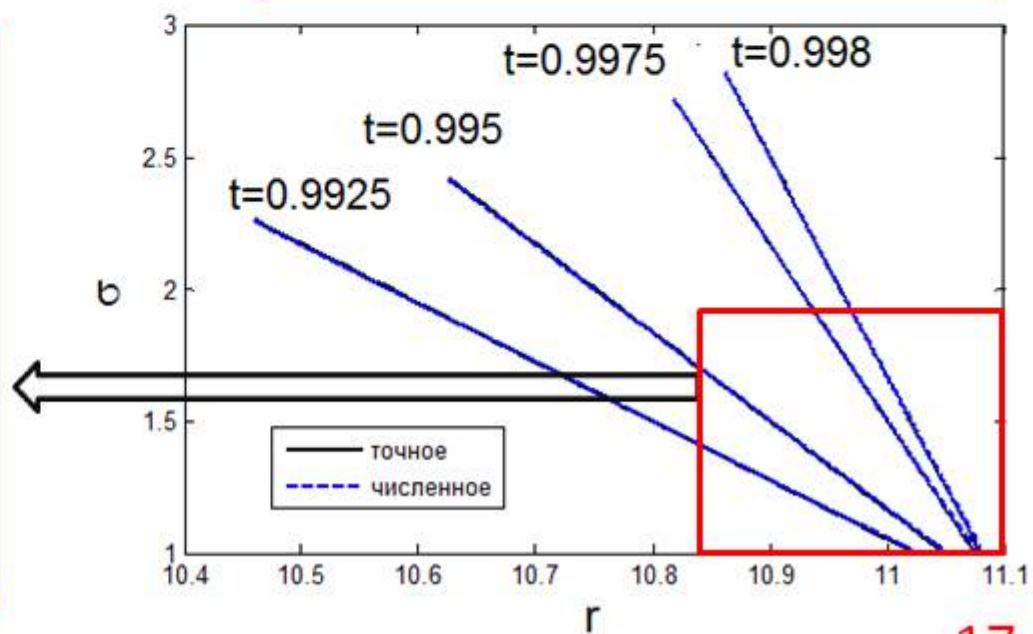
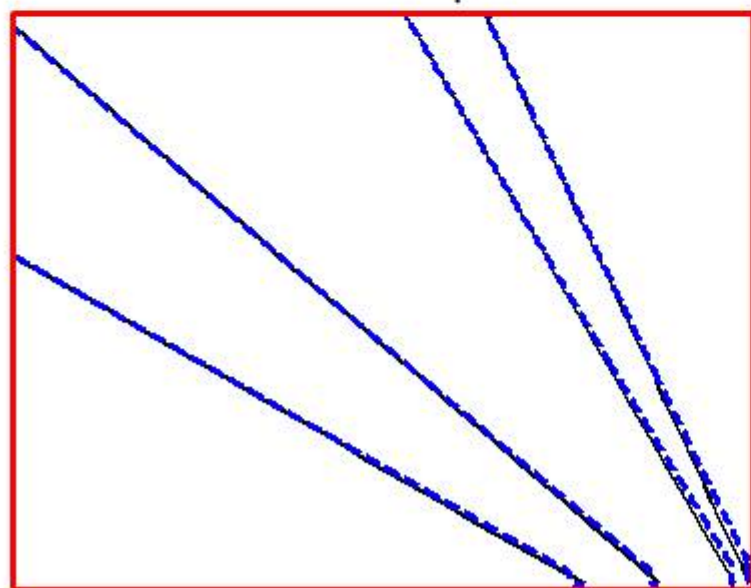
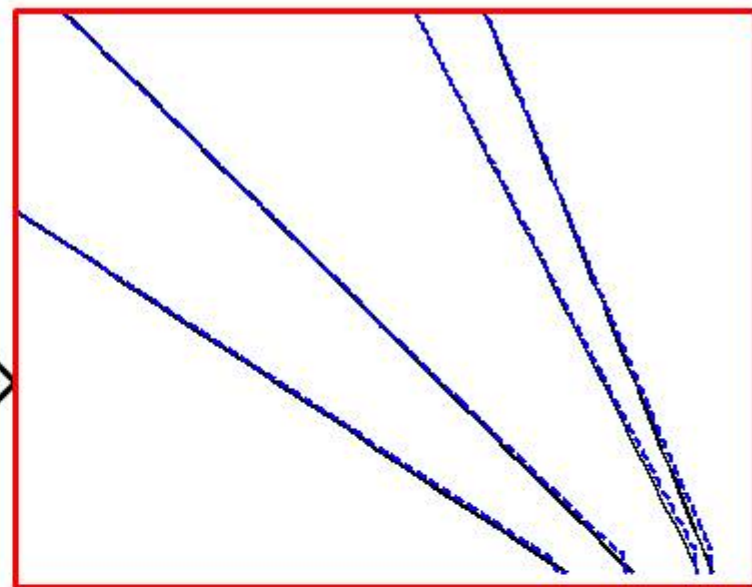
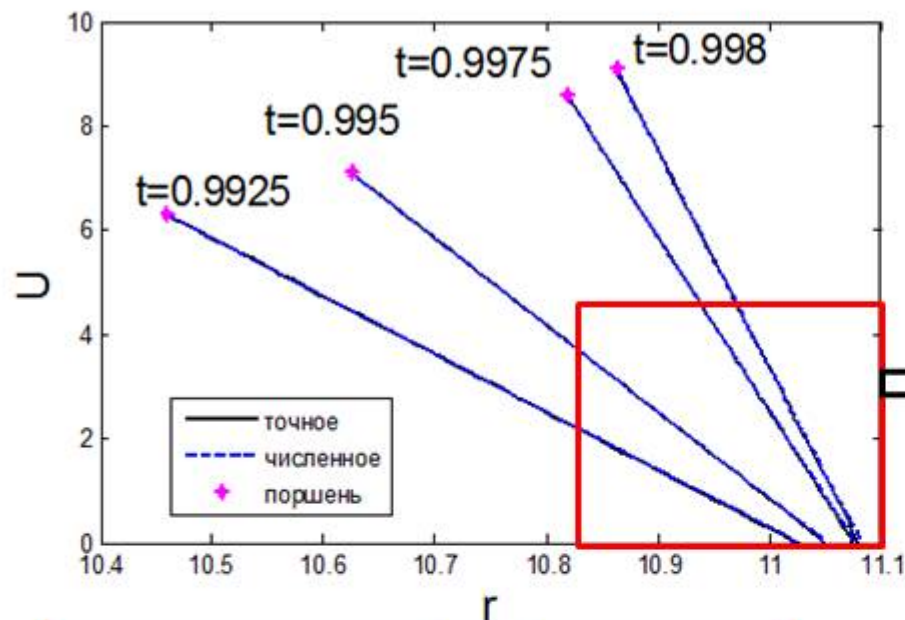
Результаты расчётов методом «РОМБ»



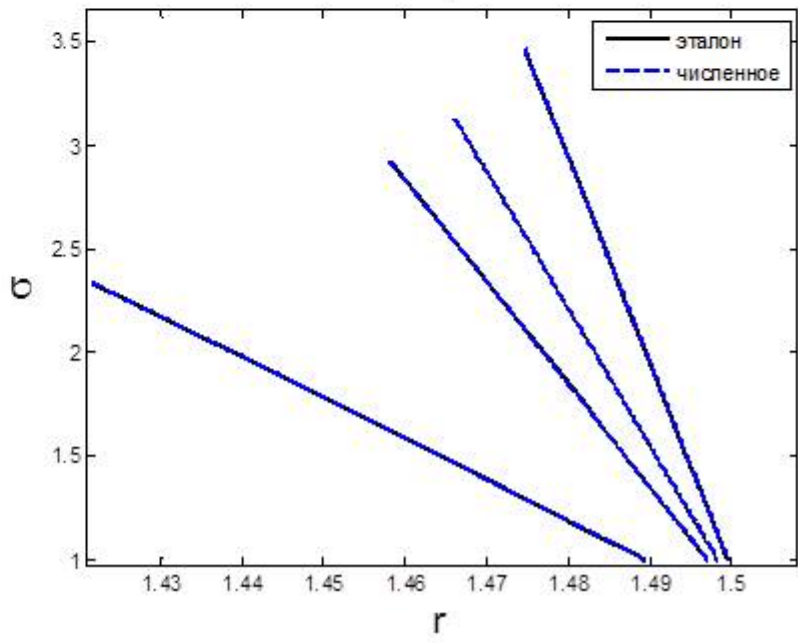
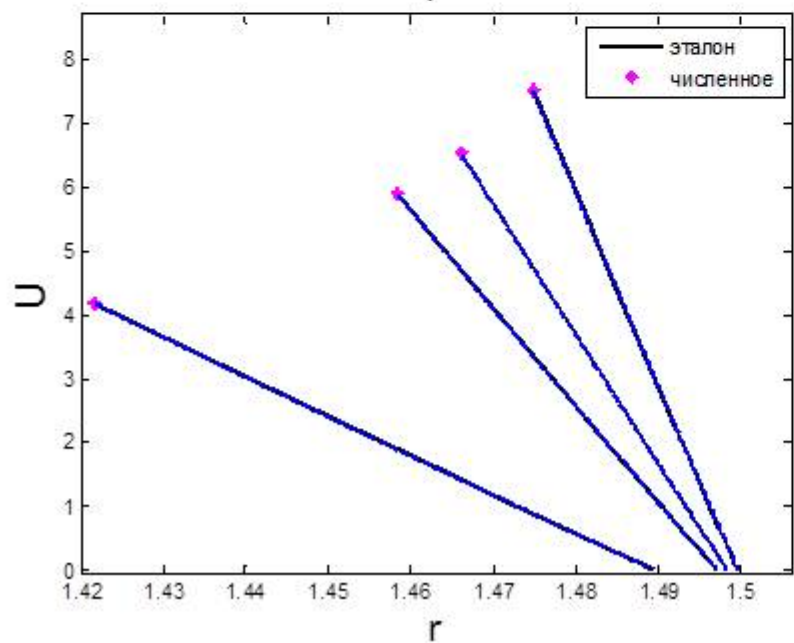
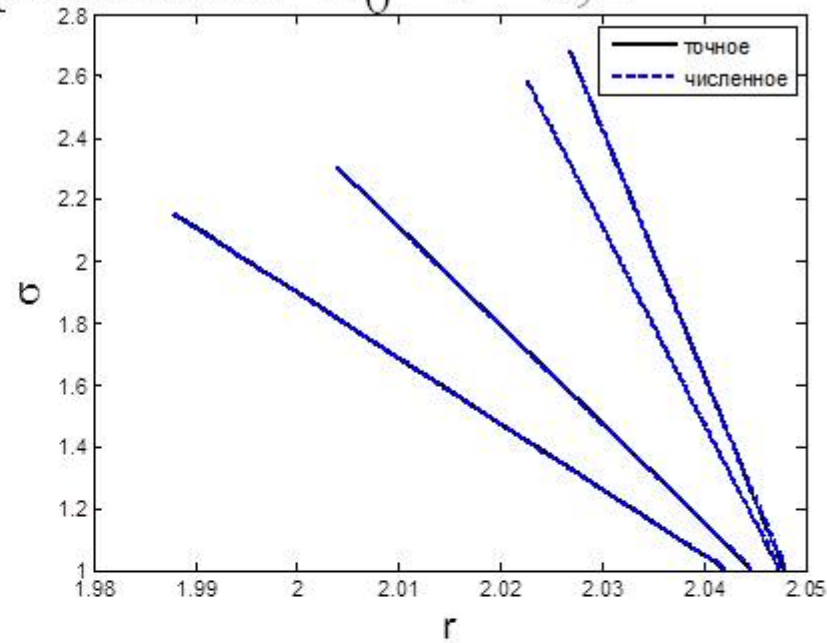
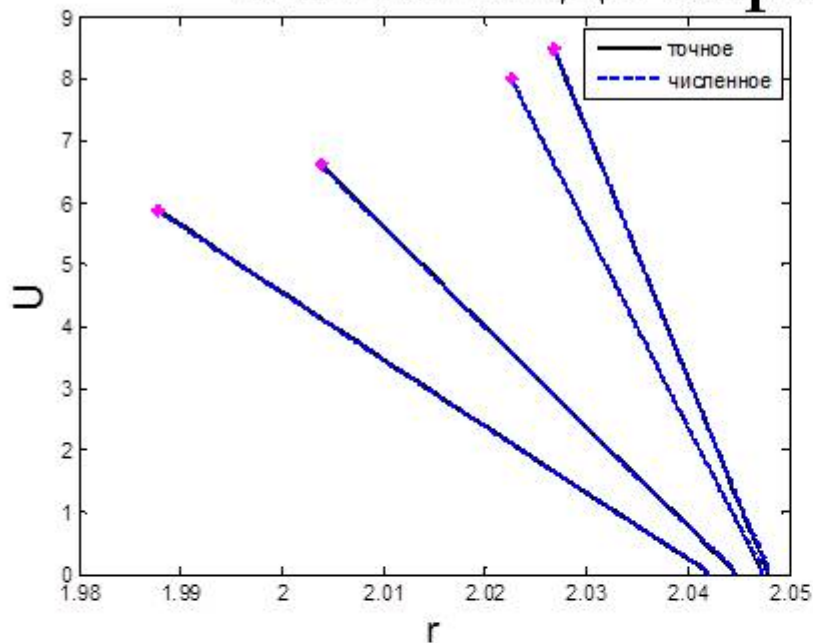
Сравнение с методом «РОМБ»



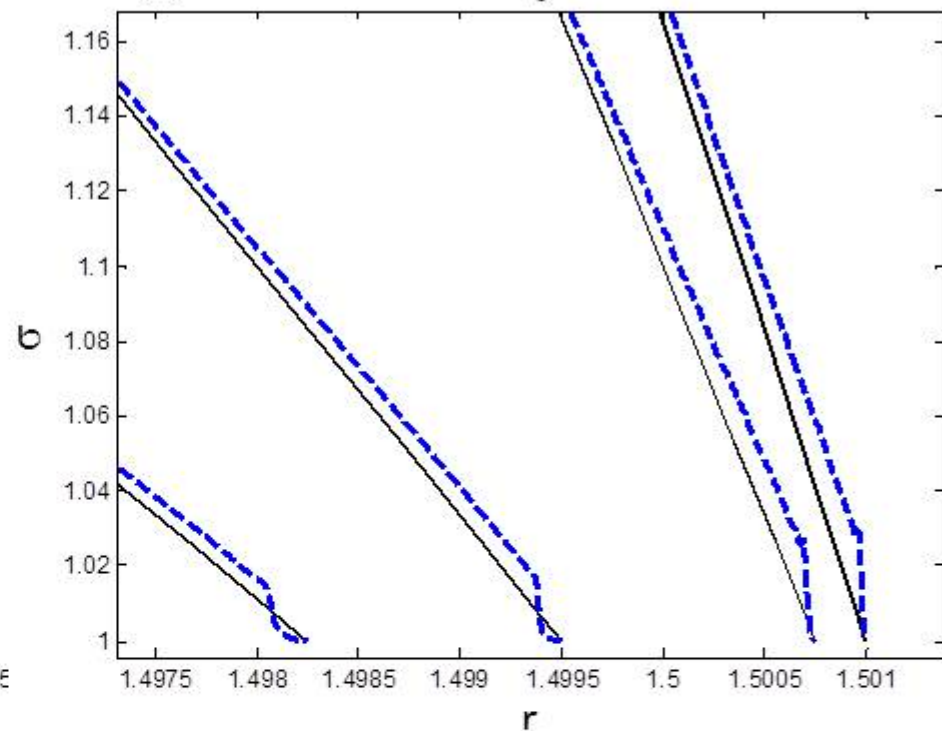
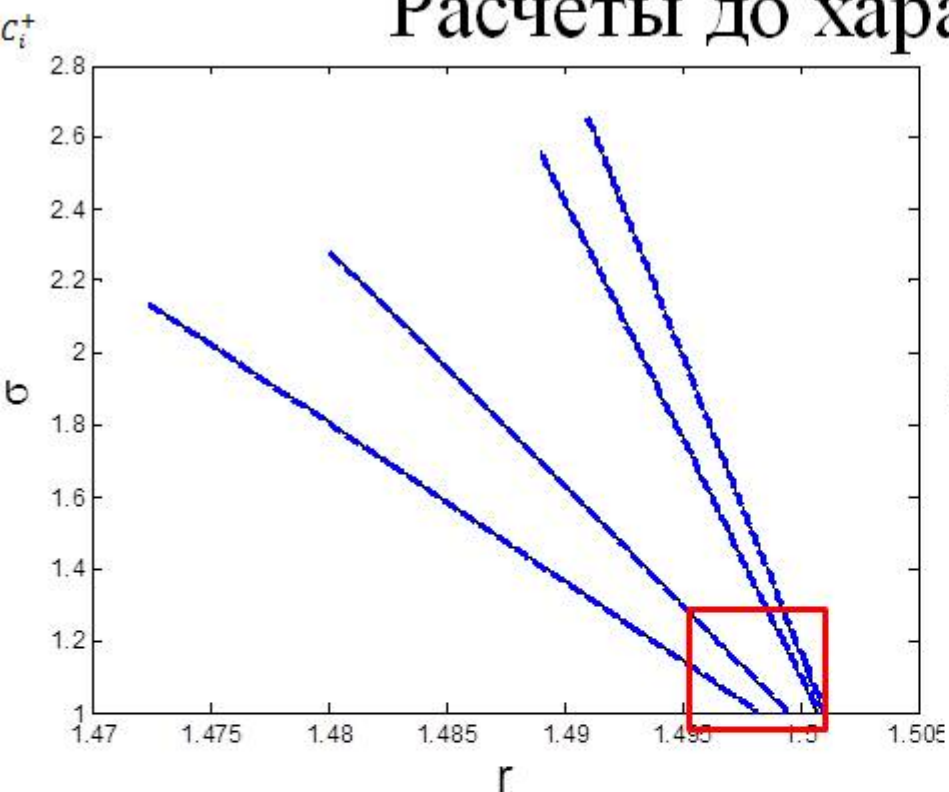
Расчёты до характеристики $C_0^+ v=0$



Расчёты до характеристики C_0^+ $v=1,2$



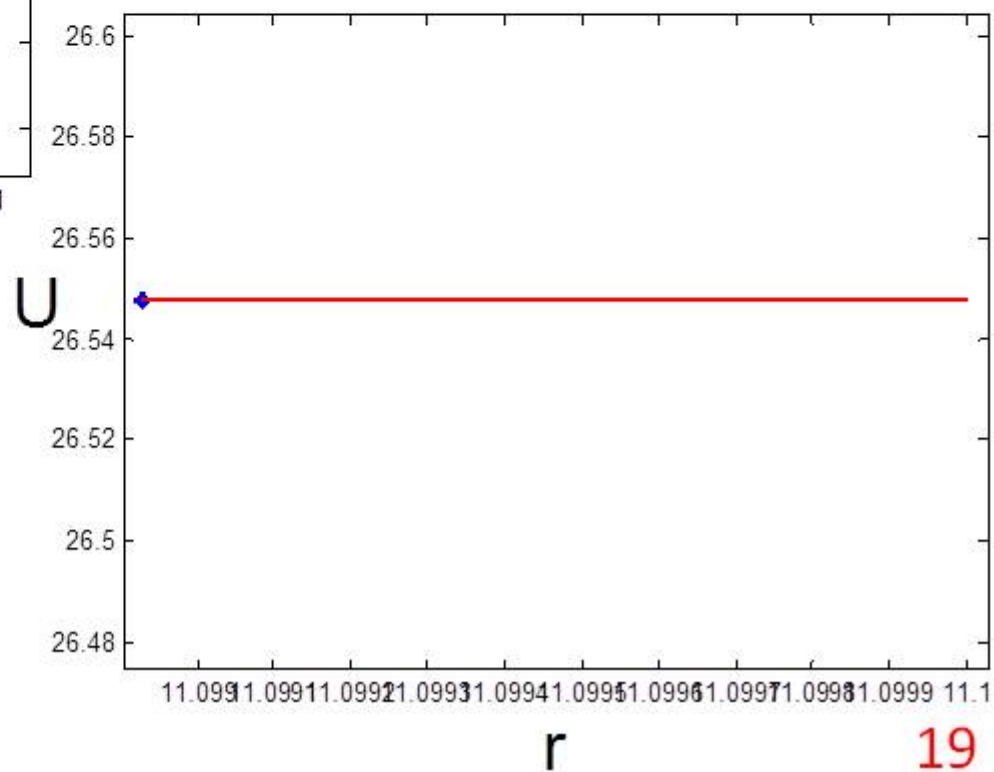
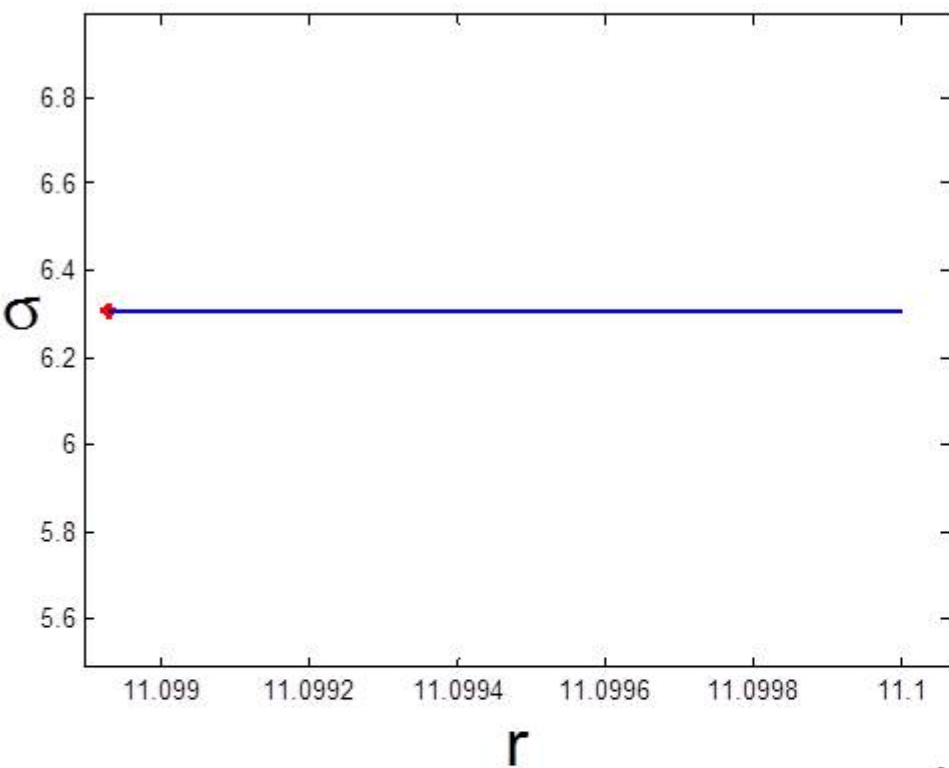
Расчёты до характеристики C_0^+



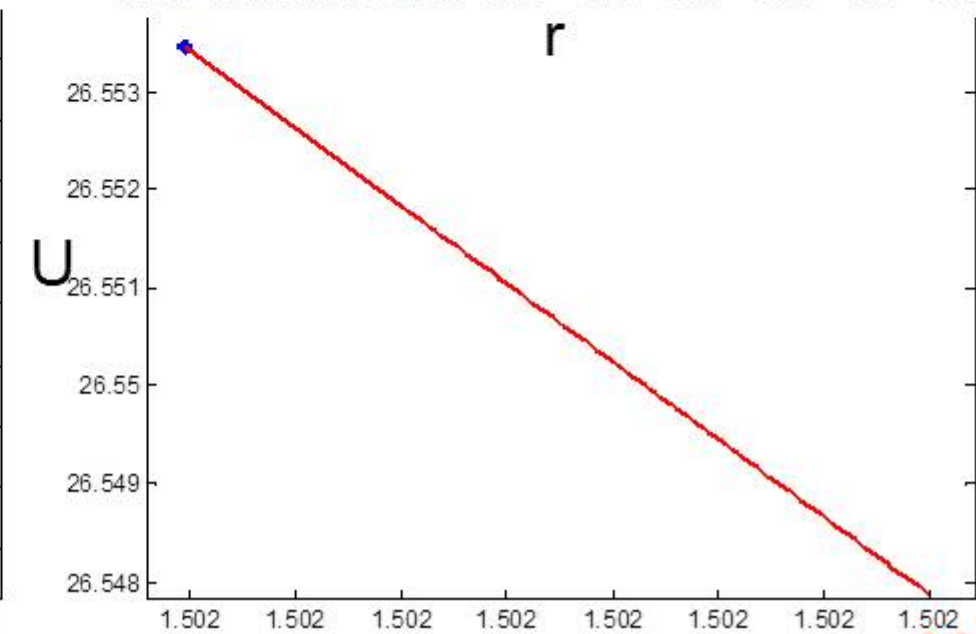
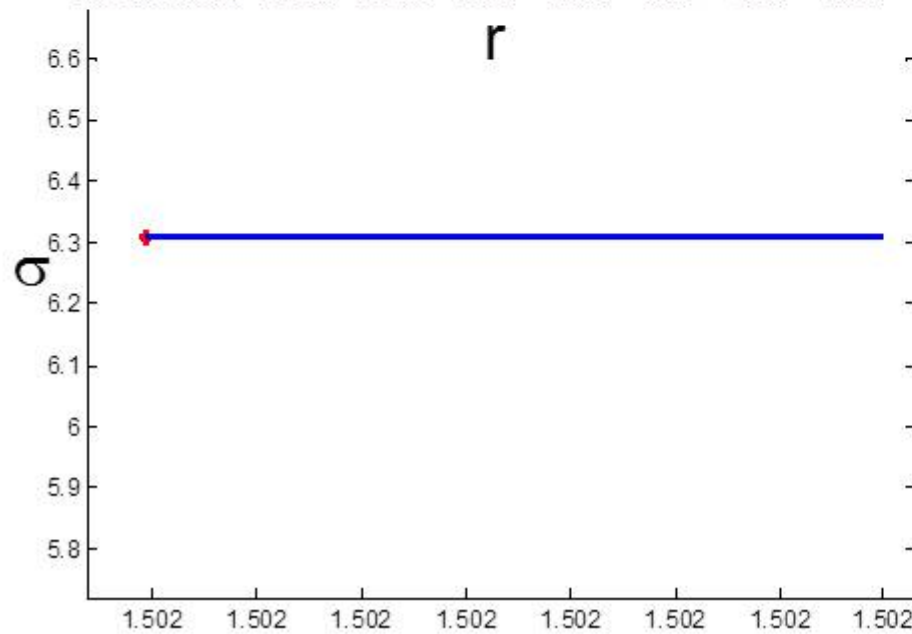
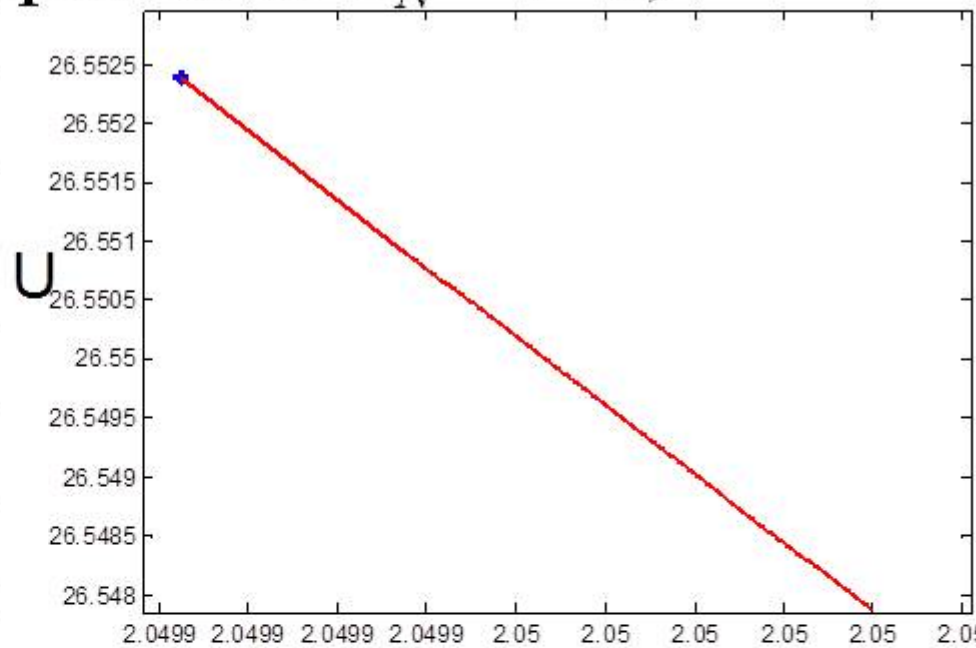
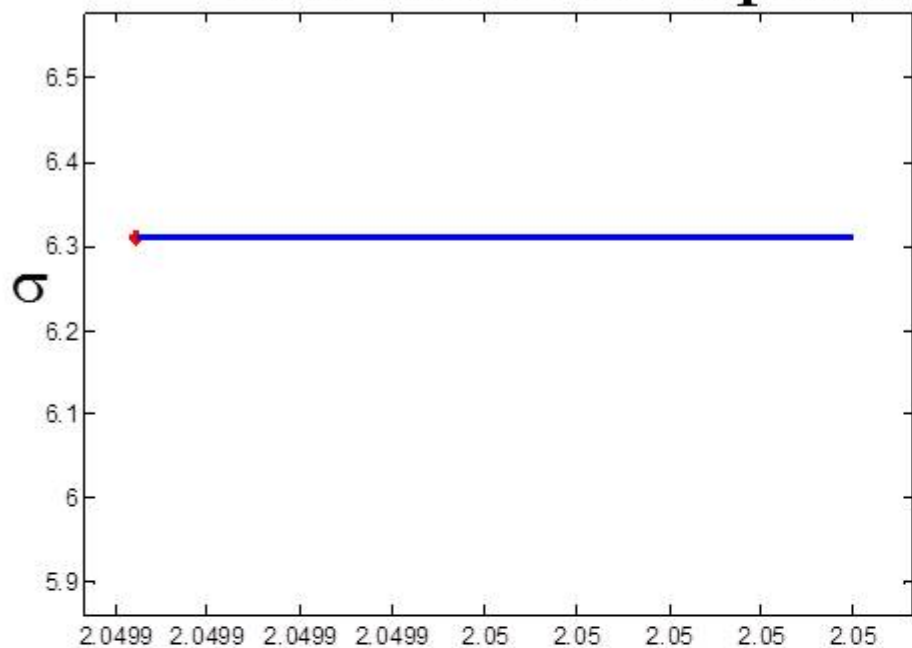
Вывод:

использовать другие C_i^+ -характеристики,
полученные при расчёте в обратном направлении
изменения времени
и считать от поршня до них

Расчёты до характеристики $C_N^+ v=0$



Расчёты до характеристики C_N^+ $v=1,2$



Выводы

1. Построен закон движения сжимающего поршня расчётом в обратном направлении изменения времени методом характеристик. При этом использовалось локально-аналитическое решение, построенное в окрестности точки (r_*, t_*)
2. При помощи конечно-разностного метода с реализованным учётом условия на характеристике численно смоделировано воздействие сжимающего поршня на слой газа достаточно большой массы.
3. Решение построено до момента t_* - вся масса газа сжимается до заданной плотности.

Благодарю за внимание!