# О ФОКУСИРОВКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ГАЗЕ

**В.Ф. Куропатенко [1,2], Ф.Г. Магазов [2], Е.С. Шестаковская [2]**

[1] *Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина*
*Снежинск, Россия*
[2] *Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет),*
*Челябинск, Россия*

# Постановка задачи

Зададим четыре параметра с разными размерностями:

$U_{g0}, r_0, t_0, \rho_0$.

Начальные параметры газа: $\rho_0 = const, U_0 = 0,\ P_0 = 0,\ E_0 = 0.$

На границе цилиндра в точке $t_0, r_0$ задана скорость $U_{g0} < 0$ .

Законы сохранения на ударной волне (УВ):

$$\rho_w\left(D - U_w\right) - \rho_0 D = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \tag{2}$$

$$\rho_0 D\left(E_w + \frac{1}{2}U_w^2\right) - P_w U_w = 0. \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) замыкаются уравнением состояния

$$P = \left(\gamma - 1\right)\rho E,\ P = F\left(S\right)\rho^{\gamma}. \tag{4}$$

$$M_w = \pi\rho_0 r_w^2,$$ - лагранжева координата УВ.

$$W = \frac{dM_w}{dt} = 2\pi\rho_0 r_w D.$$ - скорость УВ в лагранжевых координатах

Из (1) - (4) с учетом этих выражений следует :

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0,$$

$$P_w = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0^{1/3}\left(4\pi\right)^{-2/3}\left(3M_w\right)^{-4/3}W^2,$$

$$U_w = \frac{2}{\gamma+1}\left(4\pi\rho_0\right)^{-1/3}\left(3M_w\right)^{-2/3}W,$$

$$F_w = \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma}\rho_0^{-(\gamma-1/3)}\left(4\pi\right)^{-2/3}\right]\left(3M_w\right)^{-4/3}W^2.$$

Зададим траекторию УВ в виде:

$$M_w = M_0 \left( \frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n , \tag{5}$$

где $t_f$ - время фокусировки

$$W = W_0 \left( \frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1} ,$$

где $W_0 = \left(2M_0\right)^{1/2} \left(2\pi\rho_o\right)^{1/2} \frac{(\gamma + 1)}{2} U_{g0},$

$$t_f = t_0 - \frac{M_0 n}{W_0}.$$

# Течение газа за ударной волной

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями траектории,
сохранения массы и движения:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M - U = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial \left(rU\right)}{\partial M} = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M + 2\pi r \frac{\partial \left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} = 0. \tag{8}$$

Перейдем в (6)-(8) к новым искомым функциям

$$R = r^2, \quad C = rU.$$

Получим:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_M - 2C = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 2\pi\rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_M + 2\pi R \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} - C^2 R^{-1} = 0. \tag{11}$$

Новые функции на ударной волне имеют вид

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-1)/n}. \tag{12}$$

Перейдем от переменных $t$, $M$ к переменным $t$, $\xi(t,M)$.

Зададим зависимость $\xi(t,M)$ в виде:

$$\xi = \frac{M}{M_0}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{-n}.$$

Представим R, ρ и C в виде произведений функций от времени и функций от ξ:

$$R = \alpha_R(t)T(\xi) \qquad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \qquad C = \alpha_C(t)Z(\xi)$$

Определим эти зависимости на ударной волне, т.е. при $\xi=1$

$$T_w = T_1, \quad \alpha_R(t) = R_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^n T_1^{-1},$$

$$\delta_w = \delta_1, \quad \alpha_\rho = \rho_0\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)\delta_1^{-1}, \tag{13}$$

$$Z_w = Z_1, \quad \alpha_C(t) = C_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1} Z_1^{-1}.$$

Т.о. система уравнений (9)-(11) преобразуется в систему уравнений для Т, $\delta$ и Z:

$$\xi T' = A_1, \tag{14}$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \tag{15}$$

$$-\frac{\xi}{Z_1} Z' + \frac{C_1 \gamma \xi}{\delta_1} \delta' = C_2. \tag{16}$$

где

$$A_1 = T - \frac{2Z\,T_1}{(\gamma+1)Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{\delta^{\gamma-1}\,T\,\xi^{-2/n}}{\delta_1^{\gamma-1}\;T_1},$$

$$C_2 = \frac{Z^2\,T_1}{(\gamma+1)Z_1^2\,T} - \frac{(n-1)Z}{n\,Z_1} - C_1\frac{(n-2)\delta}{n\,\delta_1}.$$

Уравнения (14) - (16) образуют относительно $T', \delta', Z'$ систему линейных неоднородных уравнений.

Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

При $\Delta \neq 0$ существует единственное решение системы (14)–(16). Оно имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}. \tag{17}$$

Уравнения (17) интегрируются численно, начиная с ударной волны, где $\xi=1$, до значения $\xi_*$, при котором $\Delta(\xi_*)=0$. Значение $n_*$ определяется так, чтобы было одновременно $\Delta(\xi_*)=0$ и $C_2(\xi_*)=0$.

Значения $\xi_*$ и $n_*$ зависят от $\gamma$. Они приведены в таблице

| $\gamma$ | 1.1 | 1.2 | 4/3 | 1.4 | 5/3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_*$ | 1.770501 | 1.722331 | 1.684516 | 1.670651 | 1.631252 |
| $\xi_*$ | 6.768540 | 4.873946 | 3.896265 | 3.616019 | 2.990161 |

# Решение в особой точке

В особой точке определитель системы (14)-(16) обращается в ноль одновременно с $C_2$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{T_*\,\delta_*^{\gamma+1}\,\xi_*^{(n-2)/n}}{T_1\,\delta_1^{\gamma+1}}-\xi_*^2=0. \qquad (18)$$

$$\frac{1}{\gamma+1}\left(\frac{Z_*}{Z_1}\right)^2-\frac{n-1}{n}\left(\frac{Z_*}{Z_1}\right)\left(\frac{T_*}{T_1}\right)-\frac{2(\gamma-1)(n-2)}{n\gamma(\gamma+1)}\left(\frac{T_*}{T_1}\right)\xi_*=0. \qquad (19)$$

Из выражения производной $\Delta'$

$$\Delta'=\left(\Delta+\xi^2\right)\left(\frac{2(\gamma+1)\delta C_2}{(\gamma-1)\delta_1\Delta}-\frac{4Z\,T_1}{(\gamma+1)Z_1\,T\xi}+\frac{2(n-1)}{n\,\xi}\right)-2\xi.$$

следует, что $\Delta'=\infty$ при $\Delta=0$.

Для определения значения $\xi_*$ интерполируем поведение $\Delta(\xi)$ функцией от $\xi$

$$\Delta = \frac{1}{a}\sqrt{\xi\left(\xi_* - \xi\right)}. \qquad (20)$$

Производная $\Delta'$ имеет вид $\Delta' = \dfrac{1}{2a^2\Delta}\left(\xi_* - 2\xi\right).$

Постоянная величина $a$ в (20) определяется в точке $\xi_\nu$, бл к $\xi_*$ и такой, что $\Delta(\xi_\nu)$ и $\Delta'(\xi_\nu)$ ещё конечные. Тогда

$$\xi_* = \frac{2\xi_\nu\left(\Delta_\nu - \xi_\nu\Delta'_\nu\right)}{\Delta_\nu - 2\xi_\nu\Delta'_\nu}.$$

Далее находим $T_*$ экстраполяцией

$$T_* = T_\nu + T'_\nu\left(\xi_* - \xi_\nu\right).$$

Значение $\delta_*$ находим из условия $\Delta_* = 0$.

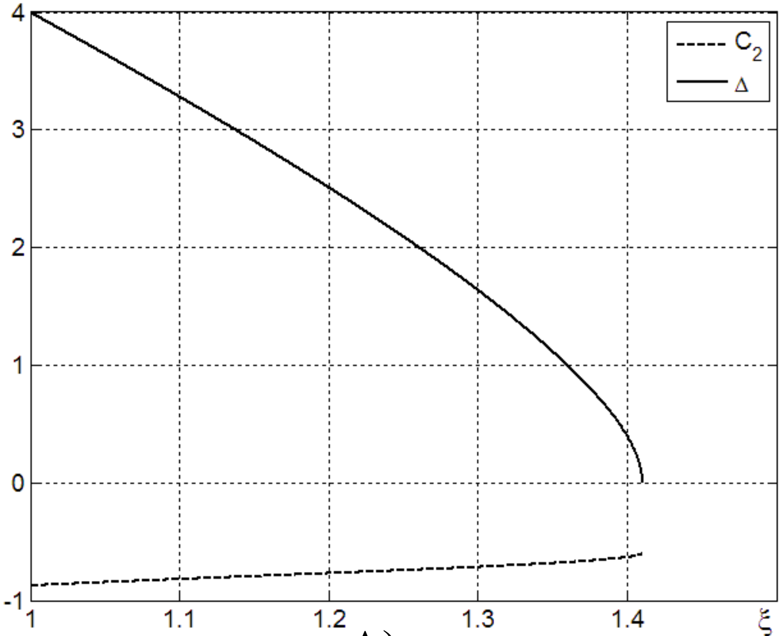
$$\delta_* = \delta_1 \left( \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{T_1}{T_*} \xi_*^{(n+2)/n} \right)^{1/(\gamma+1)},$$

а значение $Z_*$ из уравнения (19) $C_2(\xi_*)=0$.

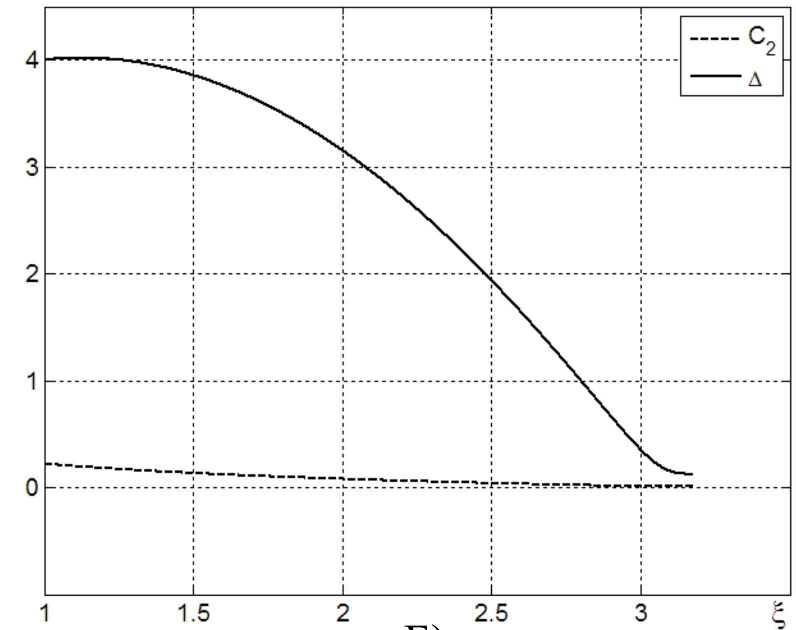
После раскрытия неопределенности в точке $\xi_*$

$$\frac{C_2(\xi_*)}{\Delta(\xi_*)} = \frac{0}{0}$$

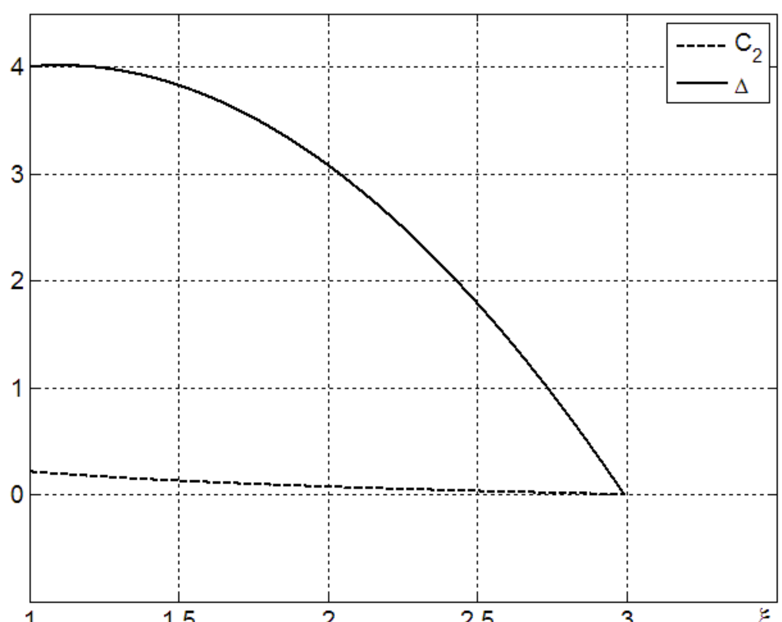
интегрирование уравнений (17) продолжается до $\xi \approx 10^{10}$.




А)




Б)



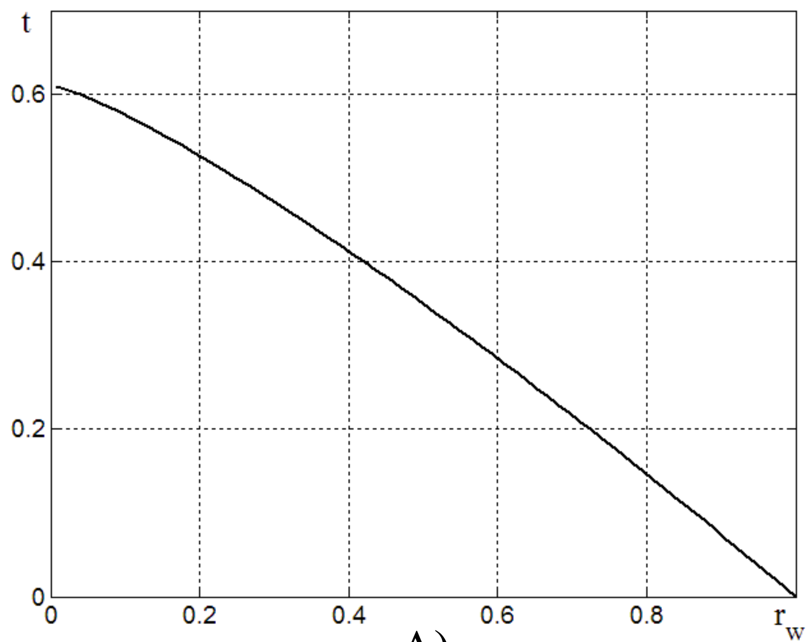

В)

Рис. 1. Фрагменты поиска значения $n_*$. Графики зависимостей определителя $\Delta$ и коэффициента $C_2$ от $\xi$ для $\gamma$=*5/3*.

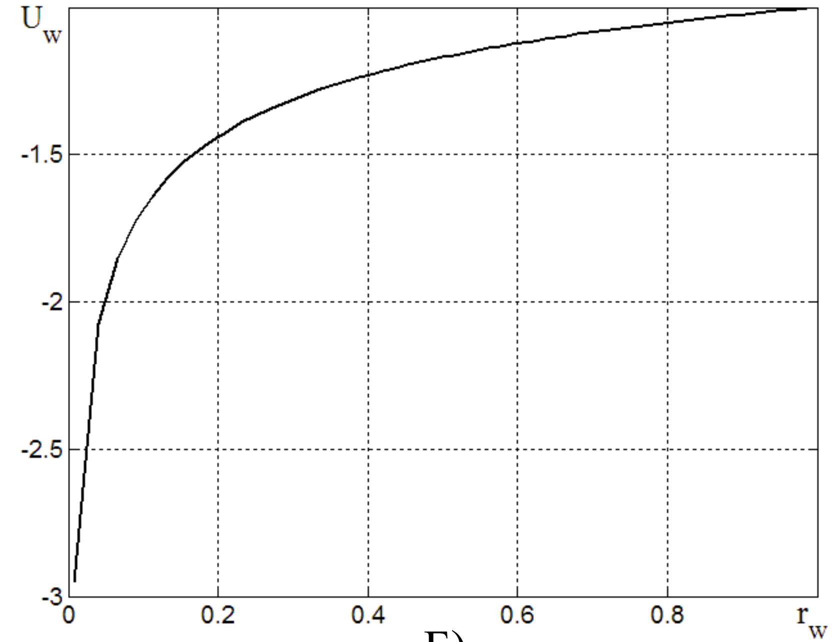
А) *n=4*

Б) *n=1,625*

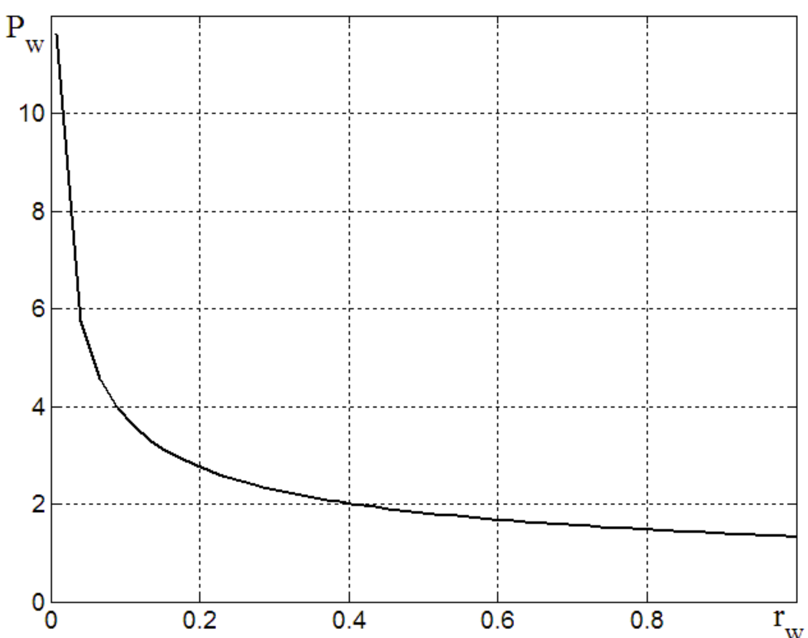
В) *n= n*$_*$*=1,631252.*



А)

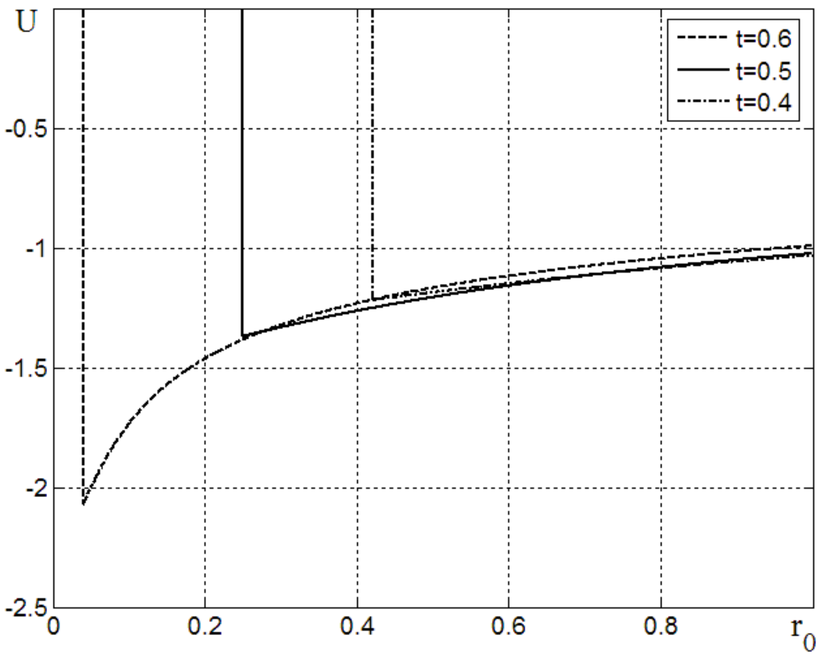


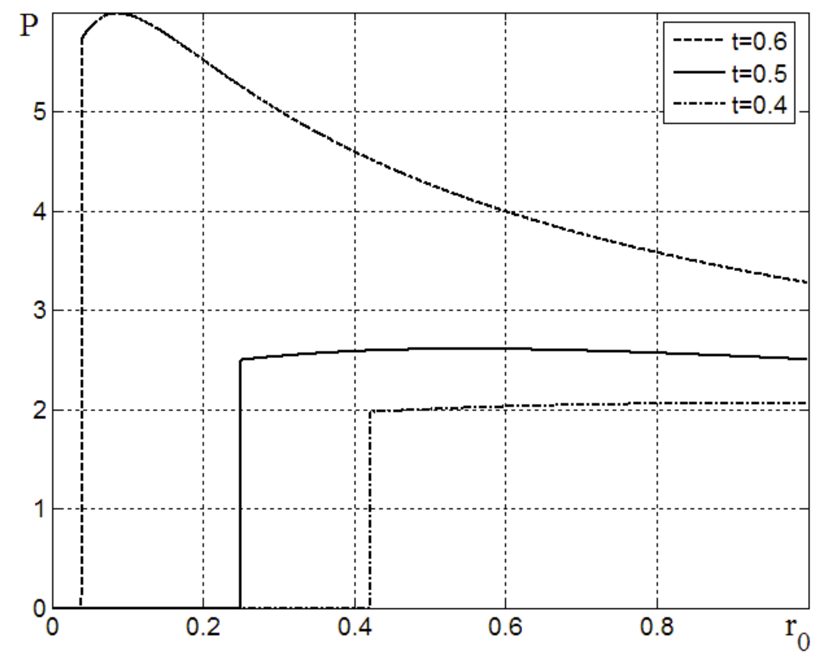
Б)



В)

Рис. 2. А) Траектория УВ;
Б) Зависимость скорости на фронте УВ от эйлеровой координаты;
В) Зависимость давления на фронте УВ от эйлеровой координаты для $\gamma$=5/3 и $n_*$=1,631252.



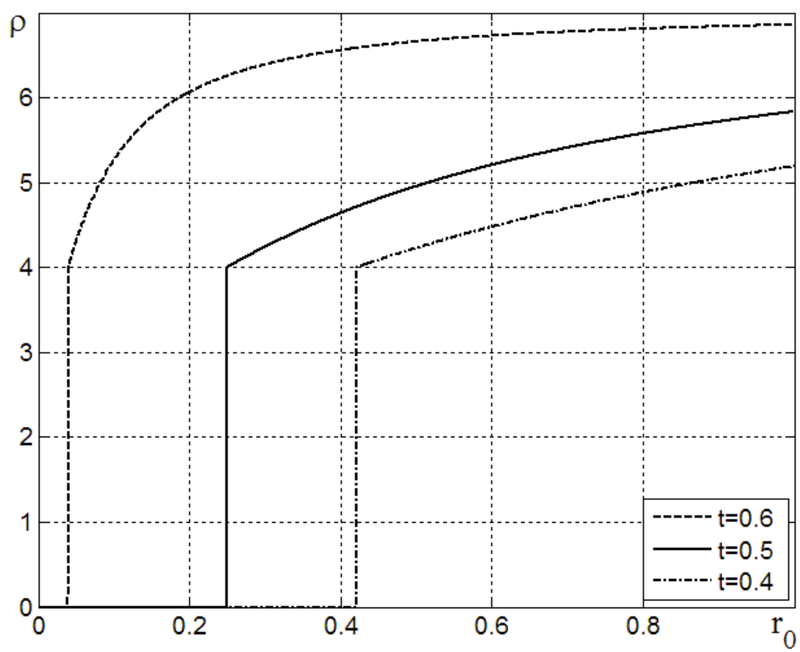




Рис. 3. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты для $\gamma$=5/3, $n_*$=1,631252 и трех моментов времени.

Спасибо за внимание!