РФЯЦ

ВНИИТФ

В.Ф. Куропатенко

Кумуляция энергии при схождении каверн, оболочек и ударных волн

Международная конференция
"XIII Забабахинские научные чтения"

20.03-24.03.2017 г.
г. Снежинск, Россия

1. О кумуляции

В 2017 году исполнилось 100 лет со дня рождения

Евгения Ивановича Забабахина.

В 2017 году проблеме кумуляции исполнилось 100 лет.

Исследования кумуляции энергии начались в 1917 г. с работы Рэлея о схлопывании сферических пузырьков.

Наиболее ярко кумуляция проявляется в сходящихся ударных волнах, оболочках и при схлопывании пузырьков.

Проблема коллапса пузырьков в жидкости возникла в связи с кавитационной коррозией гребных винтов.

Второе дыхание проблема приобрела при создании ядерного оружия.

Третья волна интереса к проблеме кумуляции энергии связана с поисками новых источников энергии:

- **газодинамический термояд (УВ).**
- **магнитный термояд.**
- **лазерный термояд.**

2. Кумуляция энергии

Кумуляцией называют такое перераспределение энергии термодинамической системы, при котором происходит её локальный рост.

Если отношение максимального значения удельной внутренней энергии maxE к её среднему значению E_m растёт с течением времени, то происходит кумуляция энергии. Она характеризуется числом K

$$K = \frac{\max E(t)}{E_m(t)}.$$

Если $K \to \infty$ с ростом времени t , то кумуляция энергии считается неограниченной. Если же K<N=const, то кумуляция энергии ограниченная.

Е.И. Забабахин в качестве характеристики кумуляции энергии предложил величину K

$$K = \frac{\max P(t)}{\max P(t_0)}$$

поскольку P имеет размерность $Дж/см^3$ (энергия в единице объёма).

Е.И. Забабахин, Явления неограниченной кумуляции /Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. – М. Наука. Физматлит, 1970. – С. 313-342.

3. Надежды и разочарования

Неограниченная кумуляция энергии получалась теоретически во многих задачах.

Однако, в экспериментах получить неограниченную кумуляцию энергии не удалось.

В экспериментах достигалась только ограниченная кумуляция энергии.

Е.И. Забабахин: "Максимально полный учёт реальных условий (в том числе диссипация энергии из-за вязкости и теплопроводности) теоретической неограниченной кумуляции не устраняют, и вопрос о том, что же её в конце концов ограничивает, остаётся открытым". "Вероятно, кумуляция ограничена неустойчивостью". (1988 г.)

4. История изучения кумуляции

Фундаментальный вклад в изучение кумуляции энергии внёс **Евгений Иванович Забабахин.**

Многими авторами при моделировании кумуляции получены яркие теоретические результаты.

Аналитические решения о схлопывании сферического пузырька построили:

1917 г. Рэлей. (В идеальной "несжимаемой" жидкости.)

1960 г. Хантер. (В идеальном газе.)

1963 г. Я.М. Каждан, К.В. Брушлинский. (В идеальном газе.)

1970 г. Е.И. Забабахин. (В вязкой "несжимаемой" жидкости.)

1996 г. А.Н. Крайко. (В идеальном газе.)

1965 г. Е.И. Забабахин построил решение задачи о фокусировке сферической несжимаемой оболочки.

1975 г. по н.в. Р.И. Нигматулин. Исследование пузырьков в реальных жидкостях.

1960-2017 гг. Исследования с помощью численнных методов.

5. История кумуляции в ударных волнах

Построены автомодельные решения о схождении сферической ударной волны в идеальном газе:

1942 г. Гудерлей, 1945 г. Л.И. Седов, 1945 г. К.П. Станюкович,
1955 г. Л.Д. Ландау, К.П. Станюкович, 1996-2014 гг. А.Н. Крайко.

Исследовано влияние различных свойств материалов на кумуляцию.

1957 г. Е.И. Забабахин, М.Н. Нечаев, (Ударные волны в ЭМ поле).
1960 г. Е.И. Забабахин, (Кумуляция энергии в многослойных сферических системах).
1965 г. Е.И. Забабахин, В.А. Симоненко, (Влияние теплопроводности на параметры ударной волны).

Цель наших работ - построить эталонные решения для контроля точности методов математического моделирования кумуляции. Они отличаются от других работ постановкой задач, интерпретацией результатов, подходом к построению и анализу уравнений и методами их решения.

6. Ударная волна в холодном газовом шаре

Постановка задачи. При $t = t_0$:

- имеется газовый шар размером r_0 и массой $m_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0$,
- заданы параметры газа: $P_0 = 0$, $\rho_0 = const$, $U_0 = 0$, $E_0 = 0$,
- на границе задано $U_{g0} < 0$.

УРС газа $P=f(s)\rho^\gamma$ или $P=(\gamma-1)\rho E$.

При $t > t_0$ в газ пойдёт ударная волна с параметрами:

В эйлеровых координатах r, t

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0, \quad U_w = \frac{2}{\gamma+1}D,$$

$$P_w = \rho_0 D U_w.$$

Скорость ударной волны

$$D = \frac{dr}{dt}.$$

В лагранжевых координатах m, t

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0,$$

$$U_w = \frac{2}{(\gamma+1)(4\pi\rho_0)^{1/3}(3m_w)^{2/3}}W,$$

$$P_w = \left(\frac{\rho_0}{3m_w}\right)^{2/3}(4\pi)^{-1/3}U_w W.$$

Скорость ударной волны

$$W = \frac{dm}{dt}.$$

7. Траектория ударной волны

Траектория ударной волны задаётся:

В эйлеровых координатах

$$r_w = r_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^n.$$

Скорость УВ

$$D = D_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1},$$

$$D_0 = \frac{\gamma+1}{2}U_{g0}.$$

Момент фокусировки

$$t_f = t_0 - \frac{r_0 n}{D_0}.$$

Показатель автомодельности n пока не определён.

В лагранжевых координатах

$$m_w = m_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^k.$$

Скорость УВ

$$W = W_0\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{k-1},$$

$$W_0 = \frac{\gamma+1}{2}U_{go}\left(4\pi\rho_0\right)^{1/3}\left(3m_0\right)^{2/3}.$$

Момент фокусировки

$$t_f = t_0 - \frac{m_0 k}{W_0}.$$

Показатель автомодельности k пока не определён.

8. Движение газа между УВ и границей

Амплитуда ударной волны зависит от расстояния до центра симметрии и от догоняющих УВ волн сжатия или разрежения. Поведение газа между УВ и границей определяется системой уравнений.

В эйлеровых координатах это закон сохранения массы, уравнение движения, уравнение для давления и УРС

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_r + U\frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\rho U}{r} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_r + U\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = 0, \qquad (8.1)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_r + U\frac{\partial P}{\partial r} + \gamma P\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r}\right) = 0,$$

$$P = F(s)\rho^{\gamma} \quad \text{или} \quad P = (\gamma-1)\rho E.$$

Искомые величины: ρ, U, P.

В лагранжевых координатах это уравнение траектории, закон сохранения массы, уравнение движения и УРС. После перехода от r и U к $R=r^3$ и $C=r^2U$ они примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_m - 3C = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_m + 4\pi\rho^2\frac{\partial C}{\partial m} = 0, \qquad (8.2)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_m + 4\pi R^{4/3}\frac{\partial\left(F\rho^{\gamma}\right)}{\partial m} - \frac{2C^2}{R} = 0,$$

$$P = F(s)\rho^{\gamma} \quad \text{или} \quad P = (\gamma-1)\rho E.$$

Искомые величины: R, C, ρ.

9. Разделение переменных

Перейдём к новым независимым переменным и функциям.

В эйлеровых координатах.

От t, r к t, $\xi(t, r)$, где

$$\xi = \frac{r}{r_0}\left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t}\right)^n .$$

В лагранжевых координатах.

От t, m к t, $\eta(t, m)$, где

$$\eta = \frac{m}{m_0}\left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t}\right)^k .$$

На фронте ударной волны

$\xi=1$ $\eta=1$

Будем искать решение в виде

$$P = \alpha_P(t)\Pi(\xi), \;\; \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi),$$
$$U = \alpha_u(t)M(\xi).$$

$$R = \beta_R(t)T(\eta), \;\; \rho = \beta_\rho(t)\delta(\eta),$$
$$C = \beta_c(t)Z(\eta).$$

Системы основных уравнений (8.1) и (8.2) разделяются на две системы уравнений каждая. Одна система для функций, зависящих от t, другая для функций, зависящих от ξ (соответственно от η).

10. Системы уравнений

Для функций, зависящих от t.

В эйлеровых координатах

$$\alpha_\rho = \frac{\rho_0}{\delta_1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right), \quad \alpha_u = \frac{D_0}{M_1}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1},$$

$$\alpha_p = \frac{\rho_0 D_0^2}{\Pi_1}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{2(n-1)}.$$

$\delta=\delta_1$, $\Pi_1=1$, $M_1=1$ на фронте ударной волны.

В лагранжевых координатах

$$\beta_R = \frac{R_0}{T_1}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{k}, \quad \beta_\rho = \frac{\rho_0}{\delta_1}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right),$$

$$\beta_c = \frac{C_0}{Z_1}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{k-1}.$$

T_1, δ_1, Z_1 – это значения T, δ, Z на фронте ударной волны.

Для функций, зависящих от ξ или η.

$$\begin{aligned}
&(M-\xi)\delta' + \delta M' = -\frac{2M\delta}{\xi},\\
&\delta(M-\xi)M' + \Pi' = -\frac{n-1}{n}\delta M, \qquad (10.1)\\
&\gamma\Pi M' + (M-\xi)\Pi' = -\frac{2\gamma M\Pi}{\xi} - \frac{n-1}{n}\Pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\eta T' = A_1,\\
&\delta B_1 Z' - \eta Z_1 \delta' = 0, \qquad (10.2)\\
&-\frac{\eta}{Z_1}Z' + \frac{C_1\gamma\eta}{\delta_1}\delta' = C_2.
\end{aligned}$$

где

$$A_1(T,Z), B_1(\delta), C_1(T,\delta,\eta), C_2(T,\delta,Z,\eta).$$

11. Решение

Система уравнений (10.1) является линейной относительно δ', M', Π', система (10.2) линейна относительно T', δ', Z'. Они неоднородны. Решения существуют, если соответствующие определители не равны нулю.

В эйлеровых координатах

$$\Delta = (M-\xi)\left(\delta(M-\xi)^2 - \gamma\Pi\right) \neq 0. \quad (11.1)$$

Решение имеет вид

$$M' = \frac{R_1(M-\xi)}{\xi n\Delta}, \quad \delta' = \frac{\delta R_2}{\xi n\Delta},$$

$$\Pi' = -\frac{\xi R_3 (M-\xi)^2}{\xi n\Delta}.$$

В лагранжевых координатах

$$\Delta = (B_1C_1\gamma - \xi)\xi \neq 0. \quad (11.2)$$

Решение имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\eta}, \quad \delta' = \frac{B_1C_2\delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\eta C_2 Z_1}{\Delta}.$$

Решение также существует, если одновременно $\Delta=0$ и $C_2=0$. Это возможно при $K=K_*$

Решение также существует, если одновременно с $\Delta=0$ все миноры расширенной матрицы третьего порядка равны нулю. Это возможно при $n=n_*$.

γ	1,1	1,2	4/3	1,4	5/3
n_*	0,7959	0,7571	0,7293	0,7172	0,6884
k_*	2,3879	2,2714	2,1831	2,1515	2,0651

12. Эталонное решение

Начальные данные:
$P_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $U_0 = 0$,
$U_{g0} = -1.$

$$\gamma = \frac{5}{3}, \qquad n = 0{,}688377.$$

Задана скорость границы $U_{гр}(t)$. На Рис. 1,2,3 —— аналитическое решение; –о– расчёты по программе ВОЛНА с выделенным разрывом; - - - без выделения разрыва. Сравнение профилей приведено на три момента времени $t_1=0{,}4$; $t_2=0{,}45$; $t_3=0{,}5$; $t_ф=0{,}51628$;

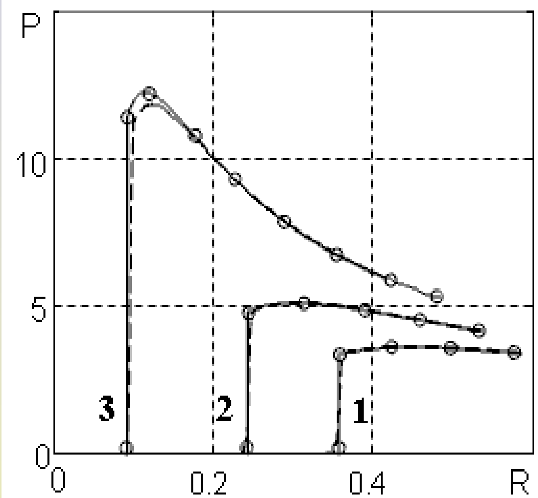


Рис. 1

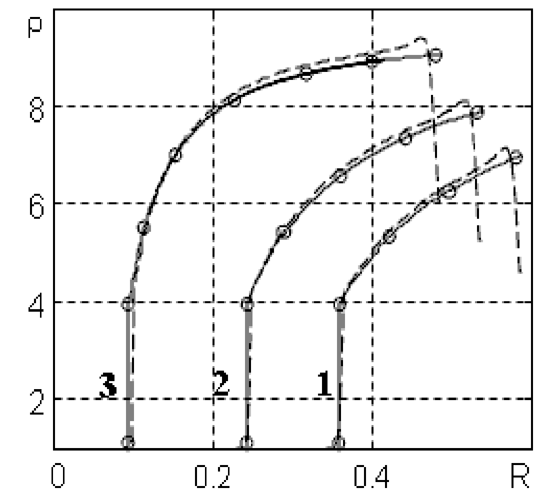


Рис. 2

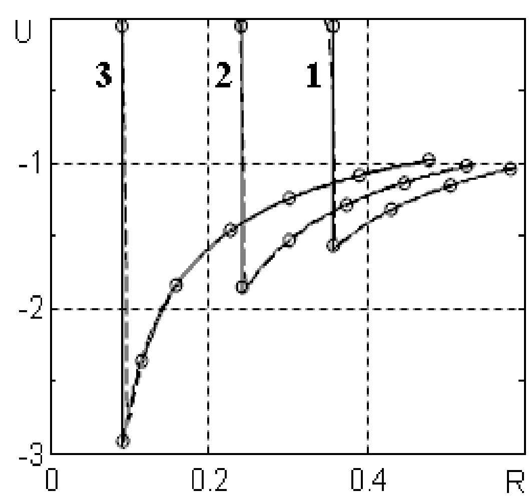
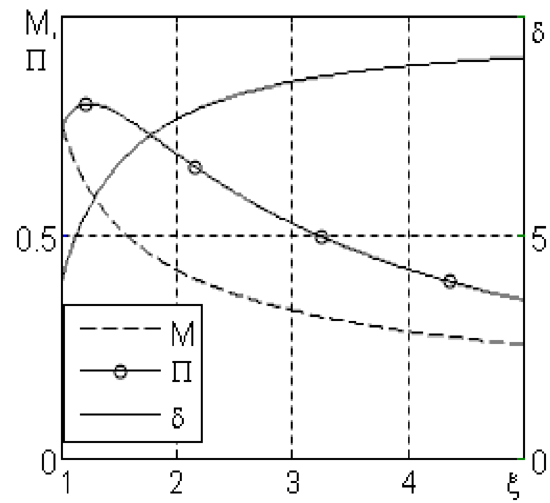


Рис. 3



13. Сжимаемая несжимаемая сплошная среда

Закон сохранения массы, уравнение движения и уравнение внутренней энергии в лагранжевых координатах имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial t} - 4\pi\frac{\partial r^2 U}{\partial M} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} + 4\pi r^2\frac{\partial P}{\partial M} = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Сжимаемость β_s и скорость звука C связаны

$$\beta_s = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s, \quad C^2 = -V^2\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_s, \quad C^2 = \frac{V}{\beta_s}.$$

В природе нет несжимаемых веществ.

Есть класс течений, в которых V=const.

Постоянство V многими воспринимается как несжимаемость, т. е. $\beta_s = 0$ и $C^2 = \infty$. Это заблуждение.

Свойство течения – это не свойство вещества.

14. Течения с постоянной плотностью

В течениях с V = const $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ система уравнений сводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial r^2 U}{\partial M} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t} + 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M} = 0. \qquad (14.1)$$

Вместе с уравнением траектории частиц

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M = U$$

система 3^x уравнений содержит 3 функции

$$r(t,M),\ U(t,M),\ P(t,M).$$

В рамках этих уравнений решения строили Рэлей, Хантер, Забабахин.

15. Фундаментальное противоречие

В модели Навье-Стокса не учитываются закон сохранения энергии и УРС. Это источник противоречия. Его суть:

1. Из уравнения движения (14.1) следует, что давление

P изменяется при V=const.

2. Из уравнения $\frac{\partial E}{\partial t} + P\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ при $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ следует $\frac{\partial E}{\partial t} = 0.$

3. Из УРС P = P(V,E) при V = const, E =const следует, что

P не изменяется.

Это противоречие устраняется, если предположить, что в среде действуют источники энергии. В УРС при V=const

$$P_x\left(V\right) = \text{const},\ \ E_x\left(V\right) = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial E_T}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Широкий класс УРС имеет вид $P_T V = \Gamma(V) E_T$ и т. о. давление при V = const зависит от диссипативной функции g.

Вязкости и теплопроводности недостаточно, чтобы обеспечить течение с V = const.

16. Общее решение

Первое уравнение

$$\frac{\partial r^2 U}{\partial M} = 0$$

имеет решение

$$r^2 U = f(t). \qquad (1)$$

Это верно при любом M. На границе пузырька при M=0

$$r_B^2 U_B = f(t).$$

Т. о. получается зависимость скорости от координаты

$$U = U_B r_B^2 r^{-2}.$$

Уравнение траектории границы $\frac{dr_B}{dt} = U_B$ интегрируется по t

$$r_B = \left(r_{B0}^3 + \int_{t_0}^{t} 3f(t)\,dt \right)^{1/3}. \qquad (2)$$

Время фокусировки t_f полости получается из (2) при $r_B = 0$

$$r_{B0}^3 + \int_{t_0}^{t_f} 3f(t)\,dt = 0.$$

17. Определение давления

Подставим $r^2U = f(t)$ в уравнение движения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial M} = 0$$

и выразим $\dfrac{\partial P}{\partial M}$

$$\frac{\partial P}{\partial M} = -\frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{df}{dt} - \frac{2f^2}{r^5}\right). \qquad (1)$$

Умножим на $dM = 4\pi r^2 V_0^{-1} dr$ и проинтегрируем от 0 до M,
т. е. от r_B до r

$$P = P_B(t) + \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dt}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_B^4}\right)\right). \qquad (2)$$

P_B определяется либо газом внутри каверны, либо поверхностным натяжением. При их отсутствии $P_B = 0$.
При $r = \infty$

$$P_\infty = P_B(t) - \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dt}\frac{1}{r_B} - \frac{f^2}{2}\frac{1}{r_B^4}\right). \qquad (3)$$

Из зависимостей $P_\infty(t)$, $P_B(t)$, $r_B(t)$, $f(t)$ любые две независимы.
Т. е. это течение с двухфункциональным произволом.

18. Диссипация

Запишем выражение для P(t, r) в виде

$$P = P_\infty(t) + \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dt}\frac{1}{r} - \frac{f^2}{2r^4}\right). \tag{1}$$

Перейдём от P к E с помощью $PV_0 = \Gamma E$. Продифференцируем E по времени, получим скорость диссипации, которая обеспечивает "несжимаемость" V = const

$$\left(\frac{\partial g}{dt}\right)_M = \frac{1}{\Gamma}\left(V_0\frac{dP_\infty(t)}{dt} + \frac{1}{r}\frac{d^2f}{dt^2} - \frac{2f}{r^4}\cdot\frac{df}{dt} + \frac{2f^3}{r^7}\right).$$

19. Определение средней энергии

Поскольку V=const, то P_x и E_x не изменяются. Положим $P_x=0$, $E_x=0$. За счёт диссипации меняется только тепловая энергия

$$E_T = P \cdot \frac{V_0}{\Gamma} \qquad (1)$$

Выражение для E(r, t) получается из (17.2)

$$E = \frac{1}{\Gamma}\left(P_B(t)V_0 + \frac{df}{dt}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_B}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r_B^4}\right)\right).$$

Умножим E на $dM=4\pi r^2\rho_0 dr$ и проинтегрируем от r_B до r_A, где – r_A граница некоторой массы

$$M_0 = \frac{4}{3}\pi\rho_0\left(r_A^3 - r_B^3\right).$$

После деления на M_0 получим среднюю удельную энергию

$$E_m = \frac{1}{\Gamma}\left(P_B(t)V_0 + \frac{df}{dt}\left(\frac{3\left(r_A^2 - r_B^2\right)}{2\left(r_A^3 - r_B^3\right)} - \frac{1}{r_B}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{3\left(r_A - r_B\right)}{\left(r_A^3 - r_B^3\right)r_A r_B} - \frac{1}{r_B^4}\right)\right). \qquad (2)$$

20. Определение maxP и maxE

В любой момент времени максимальное P находится в точке $r_М$, где

$$\left(\frac{\partial P}{\partial M}\right)_t = 0. \qquad (1)$$

Из (17.1) и (20.1) следует координата точки, где P=maxP

$$r_М = \left(2f^2 \Big/ \frac{df}{dt}\right)^{1/3}. \qquad (2)$$

Из (17.2) и (20.2) следует

$$\max P = P_В(t) + \frac{1}{V_0}\left(\frac{df}{dt}\left(\frac{1}{r_М} - \frac{1}{r_В}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{r_М^4} - \frac{1}{r_В^4}\right)\right). \qquad (3)$$

Из (19.1) и (20.3) следует выражение для maxE

$$\max E = \frac{V_0 P_В(t)}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{df}{dt}\left(\frac{1}{r_М} - \frac{1}{r_В}\right) - \frac{f^2}{2}\left(\frac{1}{r_М^4} - \frac{1}{r_В^4}\right)\right). \qquad (4)$$

Эти уравнения содержат три функции от t. Из них две независимых. Пусть это будут

$$P_В = (t) \quad и \quad f(t).$$

21. Класс простейших решений

Рассмотрим закрытие каверны в бесконечно протяжённой жидкости ($r_A = \infty$). Функции $P_B(t)$ и $f(t)$ выберем из условий, что в каверне вакуум ($P_B = 0$), а траектория её поверхности имеет вид

$$r_B = r_{B0}\varphi^n \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{t_f - t}{t_f - t_0}. \tag{1}$$

Продифференцируем r_B и подставим в общее решение. Получим

$$U_B = U_{B0}\varphi^{n-1}, \qquad U_{B0} = -\frac{nr_{B0}}{t_f - t_0}. \tag{2}$$

Из условий, что $r_B=0$ и $U_B= -\infty$ при $t=t_f$ следует

$$0 < n < 1.$$

Функции $f(t)$ и $\dfrac{df}{dt}$ получаются из (1), (2) и из (16.2)

$$f(t) = r_{B0}^2 U_{B0}\varphi^{3n-1}, \qquad \frac{df}{dt} = \frac{3n-1}{n} \cdot r_{B0}\, U_{B0}^2\, \varphi^{3n-2}.$$

Условия $U_{B0} < 0$, $f(t)<0$, $\dfrac{df}{dt} > 0$ выполняются, если $n>1/3$. Из условия $P_\infty(t)>0$ следует, что $n<0,4$. Т. о. решение возможно, если

$$1/3 < n < 0,4.$$

22. Показатели кумуляции

Max P при $t=t_0$ получается из (20.3) при $\varphi=1$. Т. о.

$$K_P = \frac{\max P(t)}{\max P(t_0)} = \left(\frac{r_{B0}}{r_B}\right)^{2(1-n)/n}.$$

При $r_{B0}/r_B \to \infty$ получается неограниченная кумуляция при $1/3<n<1$.

При $n=0{,}4$ результат совпадает с решением Рэлея-Забабахина.

Максимальное значение удельной внутренней энергии maxE и её среднее значение E_m при $r_B \ll r_{B0}$ имеет вид

$$\max E = \frac{U_{B0}^2}{\Gamma}\left(\frac{r_{B0}}{r_B}\right)^{2(1-n)/n}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{3n-1}{2n}\right)^{4/3}-\frac{5}{2}+\frac{1}{n}\right),\quad E_m = \frac{U_{B0}^2}{2\,\Gamma}\left(\frac{r_{B0}}{r_B}\right)^{2(1-n)/n}\frac{(2-5n)}{n}.$$

Значит

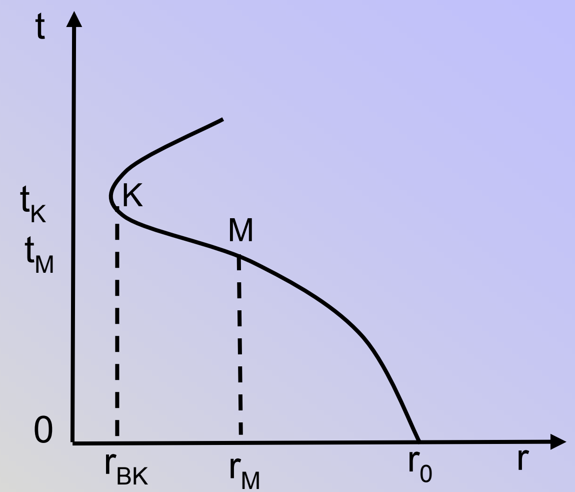
$$K_E = 1+\frac{3n}{2-5n}\left(\frac{3n-1}{2n}\right)^{4/3}.$$

Величина K_E не зависит от времени. Средняя энергия E_m растёт вместе с maxE так, что их отношение постоянно. Для $1/3<n<0{,}4$ K_E принимает значения в диапазоне $1< K_E<\infty$.

23. Схлопывание полости с газом

Модель примитивная: плотность газа в пузырьке зависит только от времени и газ сжимается изэнтропически. Т. о.

$$P_B = P_{B0}\left(\frac{r_{B0}}{r_B}\right)^{3\gamma}, \quad f = U_{B0} r_{B0}^2 \sqrt{\frac{r_B - r_{BK}}{r_{B0} - r_{BK}}},$$



Где r_{BK} - минимальный радиус каверны.
Дифференцируем $f(t)$, получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{f^2}{2r_B^2\left(r_{B0} - r_{BK}\right)}.$$

В момент остановки границы

$$t_K = t_0 - \frac{2\left(r_{B0} - r_{BK}\right)}{15U_{B0}\cdot r_{B0}^2}\left(3r_{B0}^2 + 4r_{B0}r_{BK} + 8r_{BK}^2\right), \quad f_K = 0. \quad \left(\frac{df}{dt}\right)_K = 0, \quad U_{BK} = 0.$$

Максимальное значение P находится в точке

$$r_M = \left(2f^2 \Big/ \frac{df}{dt}\right)^{1/3} = \left(4r_B^2\left(r_B - r_{BK}\right)\right)^{1/3}.$$

r_M уменьшается с уменьшением r_B и $r_B = r_M = \frac{4}{3} r_{BK}$ в момент t_M.

С этого момента граница тормозится: $\left(\frac{\partial P}{\partial M}\right)_B < 0$ и $\max P = P_B\left(t\right)$.

24. Показатели кумуляции

В момент t_K

$$\max P_K = P_{B0}\left(\frac{r_{B0}}{r_{BK}}\right)^{3\gamma}, \qquad \max E_K = \frac{V_0}{\Gamma}P_{B0}\left(\frac{r_{B0}}{r_{BK}}\right)^{3\gamma}.$$

Поскольку в момент t_K $f_K=0$, $\left(\frac{df}{dt}\right)_K = 0$, то $E_{mK} = \frac{V_0}{r}P_{B0}\left(\frac{r_{B0}}{r_{BK}}\right)^{3\gamma}.$

Из равенства $\max E_K = E_{mK}$ следует, что кумуляции нет

$$K_E = 1.$$

В момент t_0 определим $\max P_0$ по уравнению (19.3).

$$\max P_0 = P_{B0} + \frac{U_{B0}^2}{2V_0}\left(\frac{3}{2^{4/3}\left(1 - r_{BK}/r_{B0}\right)^{4/3}} - \frac{r_{BK}}{r_{B0}}\left(1 - \frac{r_{BK}}{r_{B0}}\right)^{-1}\right).$$

Т. о. согласно показателю кумуляции

$$K_P = \frac{\max P_K}{\max P_0}$$

кумуляция энергии ограничена.

25. Фокусировка оболочки

На внутренней $r = r_B$ и наружной $r = r_A$ границах оболочки $P_B = 0$, $P_A = 0$. Все процессы зависят от начальной энергии и энерговыделения g. Функция f зависит от $r_B(t)$ и $r_A(t)$

$$f = U_{B0} r_{B0}^2 \left(\frac{r_A r_B (r_{A0} - r_{B0})}{r_{A0} r_{B0} (r_A - r_B)} \right)^{1/2}, \qquad \frac{df}{dt} = \frac{f^2 (r_A + r_B)(r_A^2 + r_B^2)}{2 r_A^3 \cdot r_B^3}.$$

maxP достигается внутри оболочки в точке

$$r_M = r_A r_B \left(0,25 (r_A + r_B)(r_A^2 + r_B^2) \right)^{-1/3}.$$

Т. о. $r_M \to 0$ при $r_B \to 0$. Средняя энергия оболочки за время полёта выросла, но maxE выросла сильнее. Сравним показатели кумуляции

$$K_p \approx G_4 \left(\frac{r_{B0}}{r_B} \right)^3, \qquad K_E \approx G_5 \left(\frac{r_{B0}}{r_B} \right),$$

где G_4= const, G_5= const при $r_B = 0$. Значение K_p получено Забабахиным в 1965 году.

26. Заключение

1. Интерес к изучению кумуляции энергии не иссякает. Модели вещества становятся всё более сложными. Важную роль при исследовании кумуляции энергии играет математическое моделирование.

2. Усиливается значение аналитических решений как эталонных решений для контроля точности численных методов.

3. Построены решения о сходящейся ударной волне в идеальном газе с произвольным показателем автомодельности. В них существенна зависимость энтропии от лагранжевой координаты. Дан пример сравнения с расчётами по программе ВОЛНА.

4. Построены решения о коллапсе каверн и сходящихся оболочек в течениях с постоянной плотностью. Показано, что для обеспечения $\rho = \mathrm{const}$ в течениях сжимаемой жидкости в систему нужно вкладывать энергию. Если учитывать эти затраты энергии, то показатель кумуляции уменьшается.

Благодарю за внимание