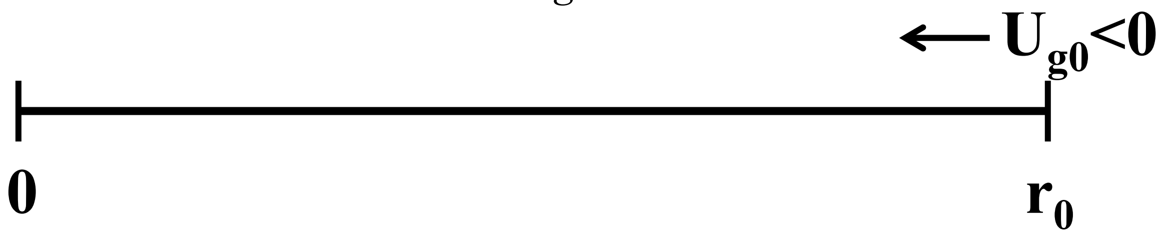
О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ГАЗЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ

В.Ф. Куропатенко [1,2], Е.С. Шестаковская [2]

[1] ***Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е.И. Забабахина***
Снежинск, Россия
[2] ***Южно-Уральский государственный университет***
(национальный исследовательский университет),
Челябинск, Россия

При постановке задачи задаем четыре параметра с разными размерностями: U_{g0}, r_0, t_0, ρ_0.



Начальные параметры газа: $\rho_0 = const, U_0 = 0, P_0 = 0, E_0 = 0$

Законы сохранения на ударной волне:

$$\rho_w\left(D - U_w\right) - \rho_0 D = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 D U_w - P_w = 0, \tag{2}$$

$$\rho_0 D\left(E_w + \frac{1}{2}U_w^2\right) - P_w U_w = 0. \tag{3}$$

Уравнения (1)–(3) замыкаются уравнением состояния

$$P = \left(\gamma - 1\right)\rho E,\ P = F\left(S\right)\rho^{\gamma}. \tag{4}$$

$M_w = \dfrac{4}{3}\pi\rho_0 r_w^3$ - лагранжева координата ударной волны

$W = \left(3M_w\right)^{2/3}\left(4\pi\rho_0\right)^{1/3} D$ - скорость ударной волны в лагранжевых координатах

Выразив D и подставив в (1)–(3), получим условия на ударной волне, содержащие W и M_w

$$\left(\frac{1}{\rho_w} - \frac{1}{\rho_0}\right) W + (4\pi)^{1/3}\left(\frac{3M_w}{\rho_0}\right)^{2/3} U_w = 0, \tag{5}$$

$$U_w W - (4\pi)^{1/3}\left(\frac{3M_w}{\rho_0}\right)^{2/3} P_w = 0, \tag{6}$$

$$\left(E_w + 0{,}5U_w^2\right) W - (4\pi)^{1/3}\left(\frac{3M_w}{\rho_0}\right)^{2/3} P_w U_w = 0. \tag{7}$$

Из (4), (5), (6) и (7) следуют выражения

$$\rho_w = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_0,$$

$$U_w = \frac{2W}{(\gamma+1)(4\pi\rho_0)^{1/3}(3M_w)^{2/3}},$$

$$P_w = \frac{2\rho_0^{1/3}W^2}{(\gamma+1)(4\pi)^{2/3}(3M_w)^{4/3}},$$

$$F_w = \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\gamma}\frac{W^2\rho_0^{(1-3\gamma)/3}}{(4\pi)^{2/3}(3M_w)^{4/3}}.$$

Зададим траекторию УВ в виде

$$M_w = M_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^n , \tag{8}$$

где t_f – время фокусировки.

$$W = W_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1} ,$$

где $W_0 = 3M_0^{2/3} \left(4\pi\rho_0\right)^{1/3} \frac{(\gamma + 1)}{2} U_{g0},$

$$t_f = t_0 - \frac{M_0 n}{W_0}.$$

Параметры адиабатического течения за ударной волной определяются уравнениями траектории, сохранения массы и движения

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_M - U = 0, \qquad (9)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 4\pi\rho^2 \frac{\partial\left(r^2 U\right)}{\partial M} = 0, \qquad (10)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_M + 4\pi r^2 \frac{\partial\left(F\rho^\gamma\right)}{\partial M} = 0. \qquad (11)$$

Перейдём в (9) - (11) к новым искомым функциям

$$R = r^3, \quad C = r^2 U.$$

После перехода уравнения (9)–(11) примут вид

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_M - 3C = 0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_M + 4\pi\rho^2 \frac{\partial C}{\partial M} = 0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_M + 4\pi R^{\frac{4}{3}} \frac{\partial\left(F\rho^{\gamma}\right)}{\partial M} - 2C^2 R^{-1} = 0. \tag{14}$$

Новые функции на ударной волне имеют вид

$$R_w = R_0 \frac{M_w}{M_0}, \quad C_w = C_0 \left(\frac{M_w}{M_0}\right)^{(n-1)/n}. \tag{15}$$

Перейдём от переменных *t, M* к переменным *t, ξ (t, M)*.
Зададим зависимость *ξ (t, M)* в виде

$$\xi = \frac{M}{M_0}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{-n}. \qquad (16)$$

С помощью уравнений для производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_M = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\xi + \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_M, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial M}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_t \left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_t,$$

где

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{n\xi}{t_f - t}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial M} = \frac{1}{M_0}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{-n},$$

преобразуем уравнения (12)–(14)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{M} - 3C = 0, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{M} + 4\pi\rho^{2}\left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_{t} = 0, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)_{\xi} + \left(\frac{\partial C}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{M} - \frac{2C^{2}}{R} + \tag{19}$$

$$+4\pi R^{\frac{4}{3}}\left[\rho^{\gamma}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_{t} + \gamma F\rho^{\gamma-1}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right)_{t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial M}\right)_{t}\right] = 0.$$

Для разделения переменных представим R, ρ и C в виде произведений функций от времени и функций от ξ

$$R = \alpha_R(t) T(\xi) \qquad \rho = \alpha_\rho(t)\delta(\xi) \qquad C = \alpha_C(t) Z(\xi)$$

Получим эти зависимости на ударной волне, т.е. при $\xi=1$ с помощью (14) и (15)

$$R_w = R_0 \cdot \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^n, \quad C_w = C_0 \cdot \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1}. \tag{20}$$

Тогда

$$T_w = T_1, \quad \alpha_R(t) = R_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^n T_1^{-1},$$

$$\delta_w = \delta_1, \quad \alpha_\rho = \rho_0 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \delta_1^{-1}, \tag{21}$$

$$Z_w = Z_1, \quad \alpha_C(t) = C_0 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1} Z_1^{-1}.$$

Подставив (20),(21) в (17)–(19), получим три уравнения для T, δ и Z

$$\xi T' = A_1, \tag{22}$$

$$\delta_1 B_1 Z' - \xi Z_1 \delta' = 0, \tag{23}$$

$$-\xi Z_1^{-1} Z' + C_1 \gamma \xi \delta_1^{-1} \delta' = C_2, \tag{24}$$

где

$$A_1 = T - \frac{2ZT_1}{(\gamma+1)Z_1}, \quad B_1 = \frac{2\delta^2}{(\gamma-1)\delta_1^2}, \quad C_1 = \frac{T^{4/3}\delta^{\gamma-1}\xi^{-(n+6)/3n}}{T_1^{4/3}\delta_1^{\gamma-1}},$$

$$C_2 = \frac{4Z^2T_1}{3(\gamma+1)Z_1^2 T} - \frac{(n-1)Z}{nZ_1} - C_1\frac{2(n-3)\delta}{3n\delta_1}.$$

Уравнения (22) - (24) образуют относительно T', δ', Z' систему линейных неоднородных уравнений.
Определитель системы равен

$$\Delta = B_1 C_1 \gamma \xi - \xi^2.$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (22)–(24) имеет вид

$$T' = \frac{A_1}{\xi}, \quad \delta' = \frac{B_1 C_2 \delta_1}{\Delta}, \quad Z' = \frac{\xi C_2 Z_1}{\Delta}.$$

Значения n_* и ξ_*, при которых одновременно $\Delta(\xi_*)=0$ и $C_2(\xi_*)=0$, соответствующие значениям γ, приведены в таблице

γ	1.1	1.2	4/3	1.4	5/3
n_*	2.387916	2.271434	2.183068	2.151532	2.065135
ξ_*	7.959997	5.717071	4.559431	4.227062	3.481885

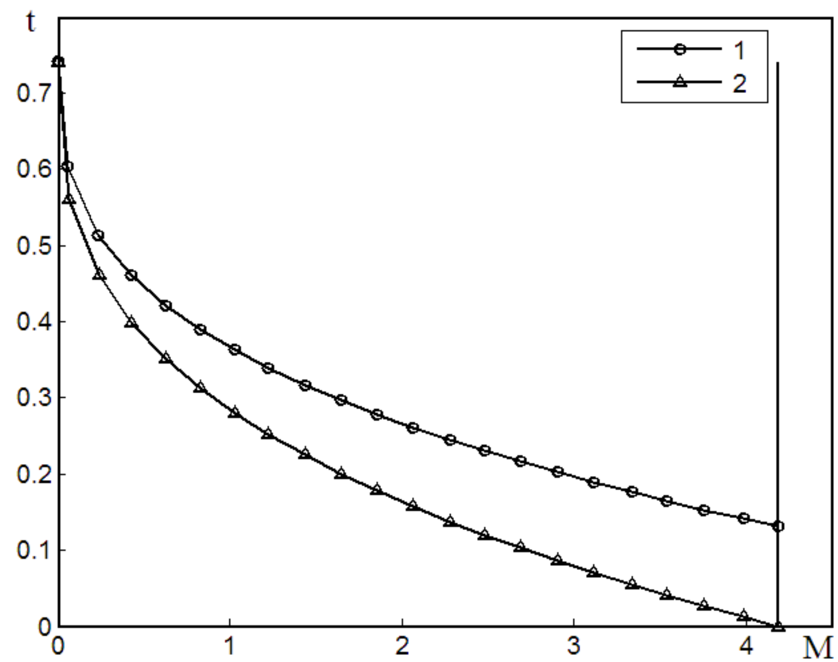
В области $n < n_*$ $\Delta(\xi)>0$ для $1 \le \xi < \infty$.
В области $n > n_*$ $\Delta(\xi_n)=0$, но $C_2(\xi_n)\neq 0$. На границе газового шара при $M=M_0$ значение ξ_n достигается в момент

$$t_n = t_f - \left(t_f - t_0\right)\xi_n^{-1/n}.$$

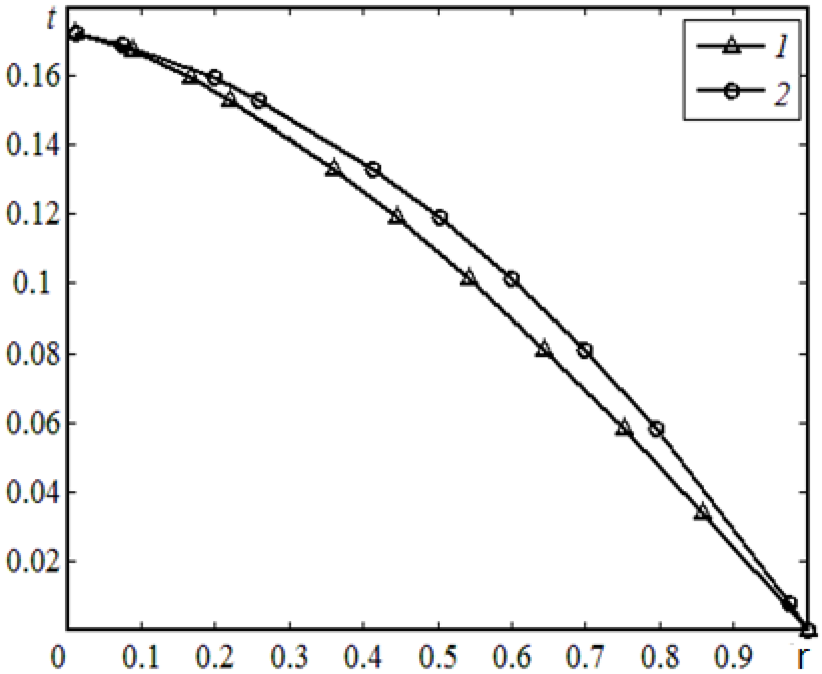
Из точки M_0 ,t_n выходит линия, на которой $\xi=\xi_n$=const.
Её уравнение

$$M = M_0\xi_n\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^n . \qquad (25)$$

Это характеристика. Она фокусируется одновременно с ударной волной, т. к. при $t=t_f$ M=0. В области между (25) и ударной волной (8) для каждого n>n_* существует единственное решение.



На рис. 1 – характеристика,



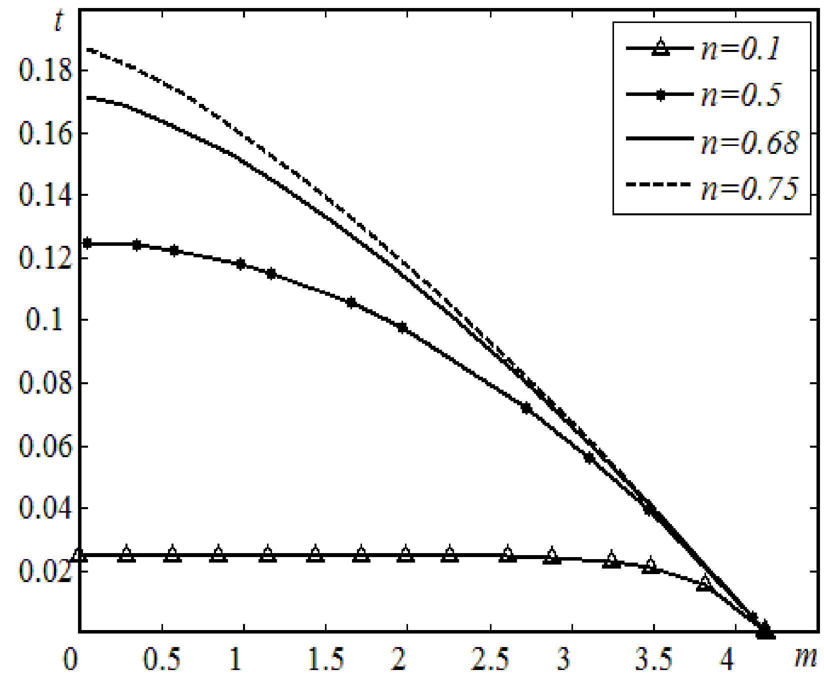
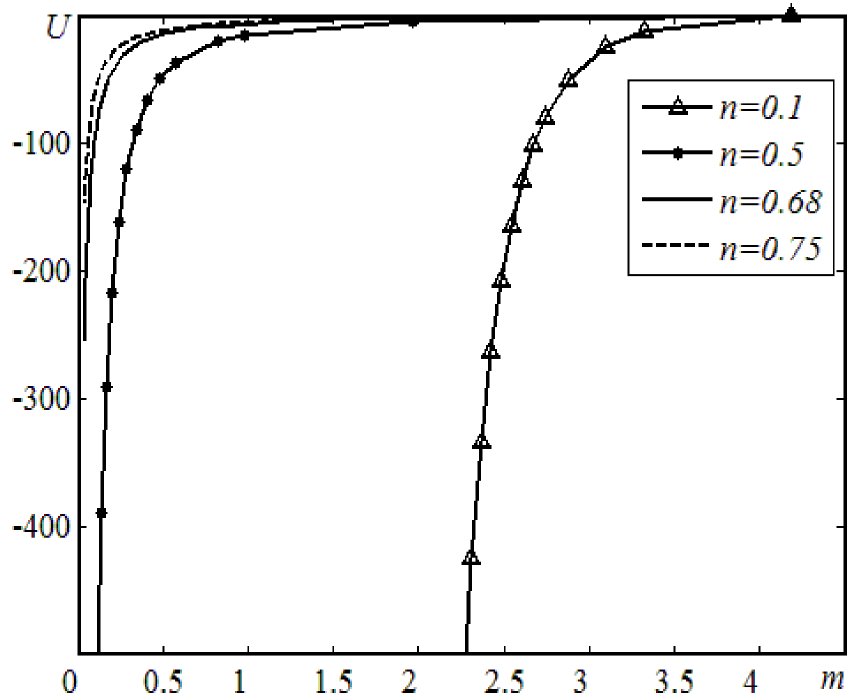


Рис. 1. 1 - траектория УВ,
2 – траектория правой границы
для γ=5/3 и n=0,68.

Рис. 2. Траектория УВ для γ=5/3
и четырех значений
n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75.



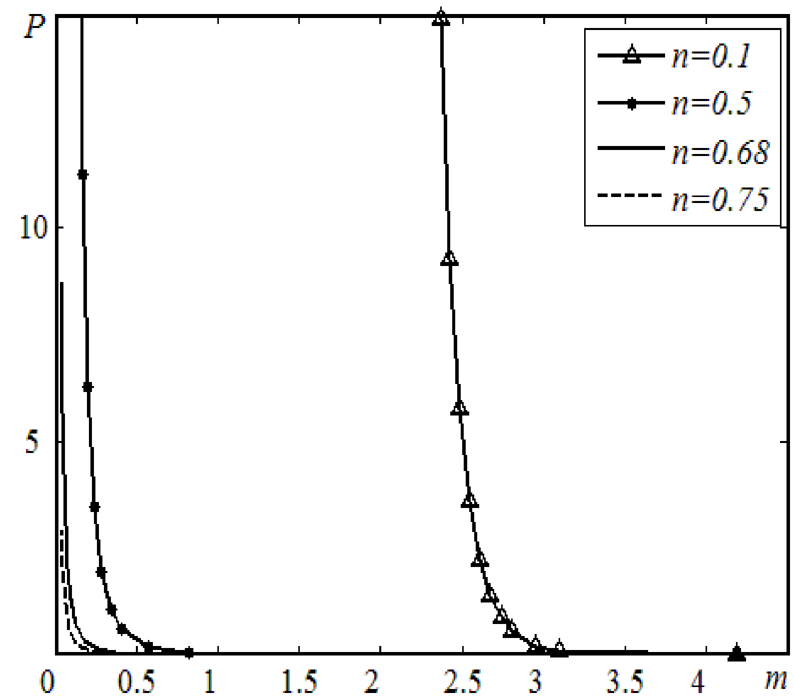
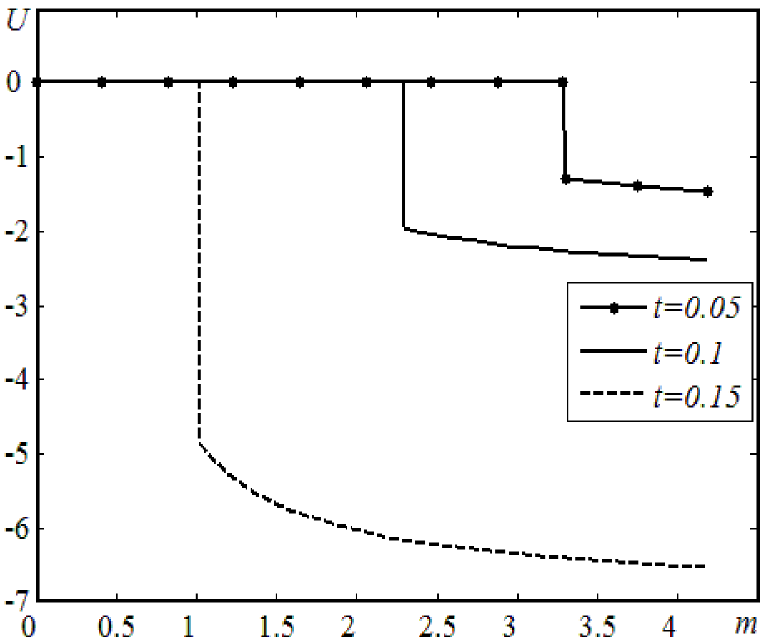
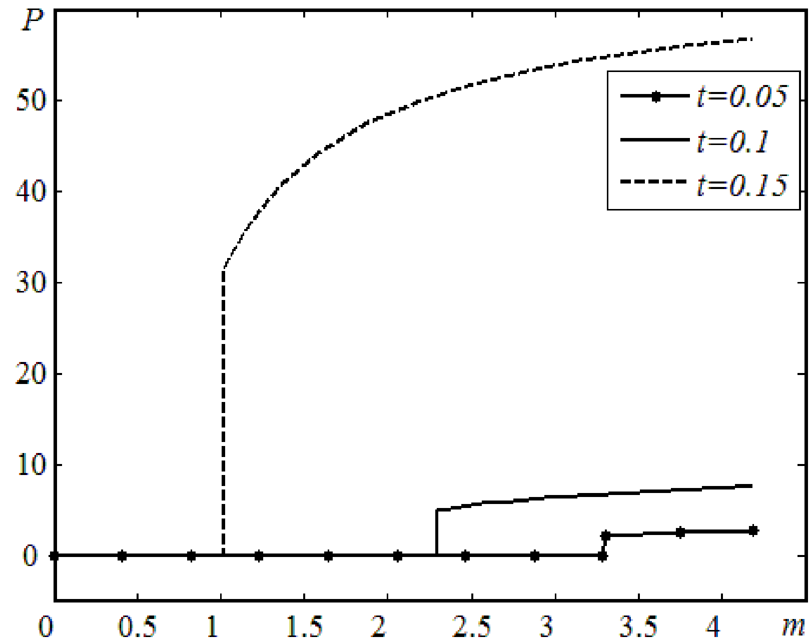


Рис. 3. Фрагмент зависимости скорости на фронте УВ от лагранжевой координаты для γ=5/3 и четырех значений n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75.

Рис. 4. Фрагмент зависимости давления на фронте УВ от лагранжевой координаты для γ=5/3 и четырех значений n=0,1; 0,5; 0,68; 0,75.





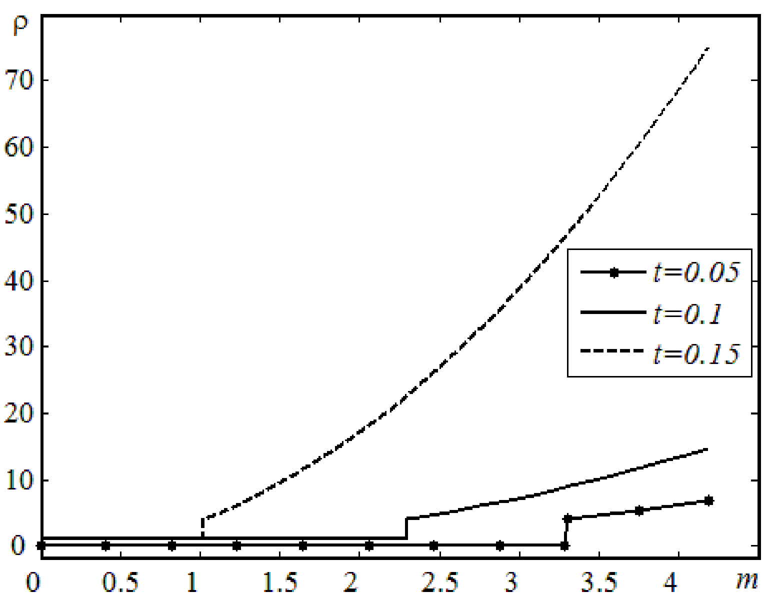
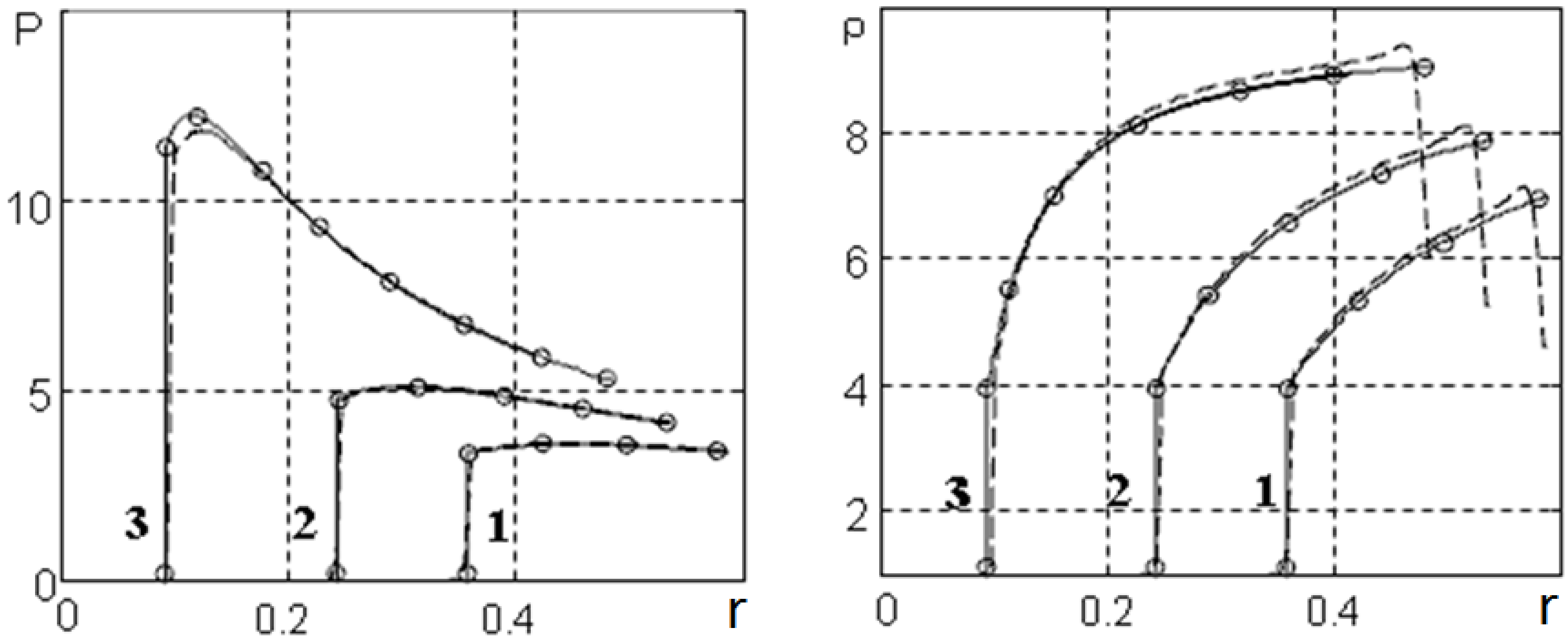


Рис. 5. Зависимости скорости, давления и плотности от лагранжевой координаты для $\gamma=5/3$, n=0,68 и трех моментов времени t=0,05; 0,1; 0,15.



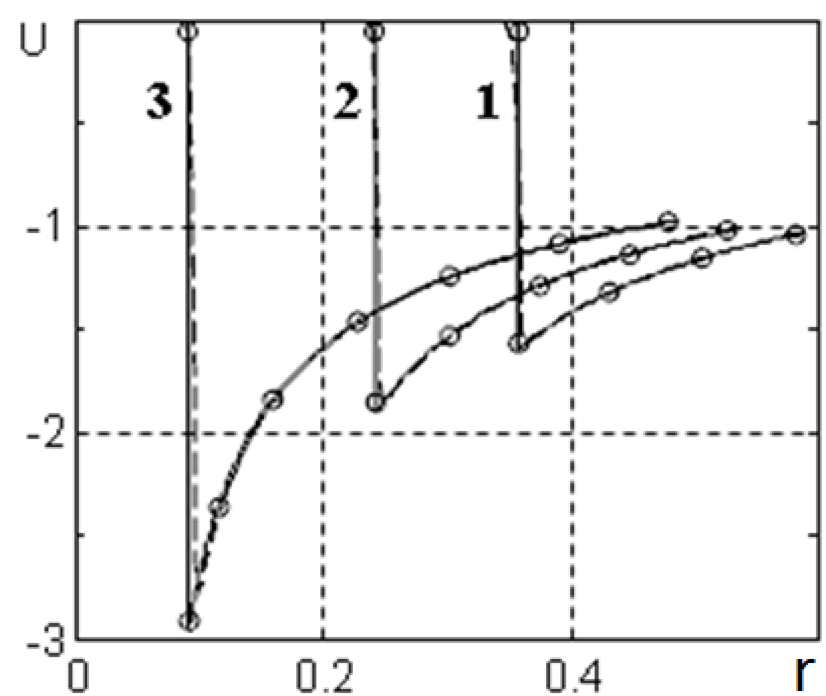
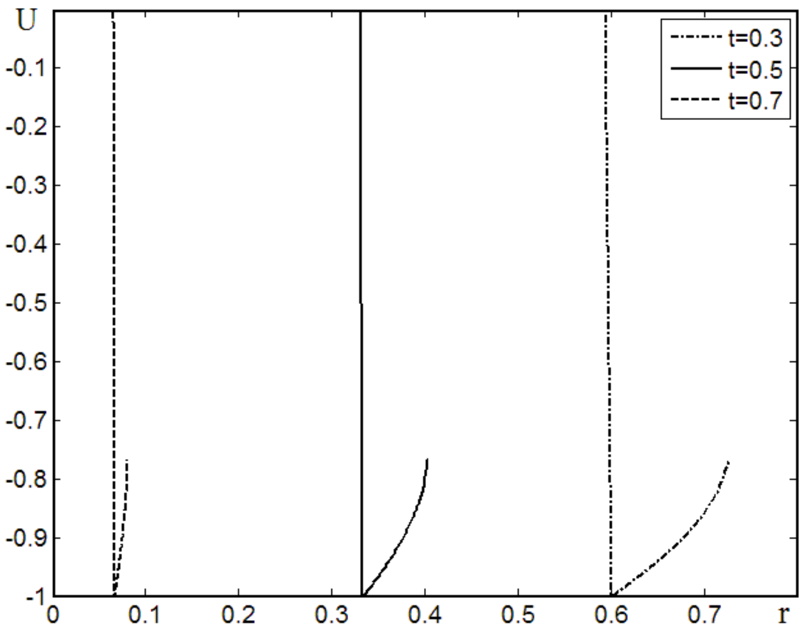
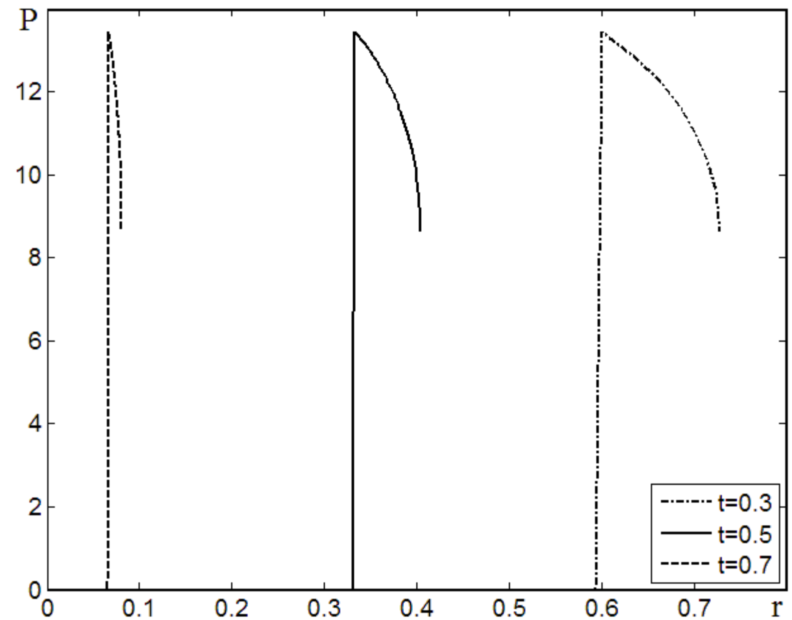


Рис. 6. Зависимости давления, плотности и скорости от эйлеровой координаты r для $\gamma=5/3$, $n=n_{*}=2{,}065135$ и трех моментов времени 1 – t=0,4; 2 – t=0,45; 3 – t= 0,5. Сплошная линия – аналитическое решение данной работы, –o– – расчёты по программе ВОЛНА с выделением разрывов, ----- – расчёты по программе ВОЛНА без выделения разрывов.





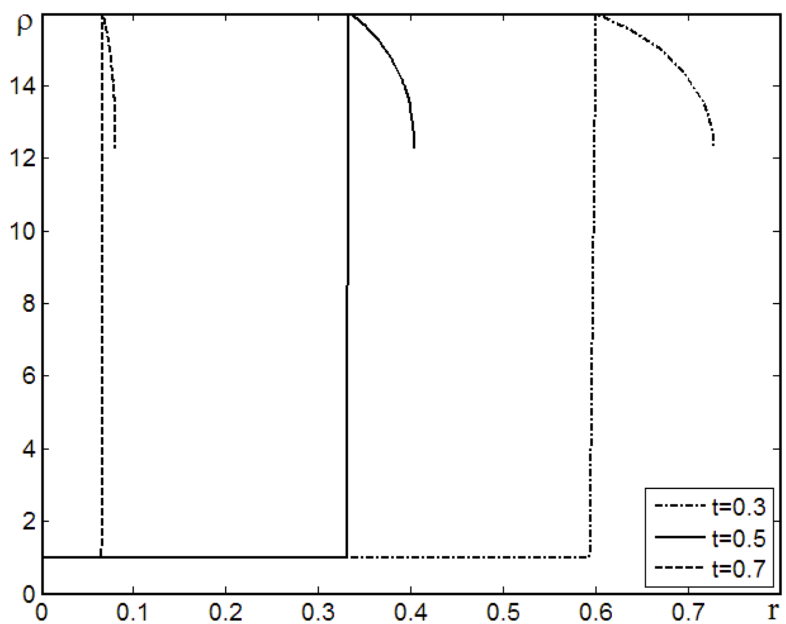


Рис. 7. Зависимости скорости, давления и плотности от эйлеровой координаты r между ударной волной и характеристикой для $\gamma=5/3$, n=3 и трех моментов времени t=0,3; 0,5; 0,7.

Спасибо за внимание!