

---

## СЕКЦИЯ 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, АЛГОРИТЫ,  
ПРОГРАММЫ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

## SECTION 6

NUMERICAL METHODS, ALGORITHMS,  
CODES AND ACCURATE SOLUTIONS

---

### СОДЕРЖАНИЕ

#### **Новый метод MMALE, основанный на инновационном методе жидких объемов**

*Боцзяо Ша<sup>1</sup>, \*, Цзупэн Цзя<sup>2</sup>, \*\**

<sup>1</sup>Высшая школа при Китайской академии технической физики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

#### **A new MMALE method based on a novel VoF method**

*Bojiao Sha<sup>1</sup>, \*, Zupeng Jia<sup>2</sup>, \*\**

<sup>1</sup>Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, China

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

#### **Моделирование стохастического переноса излучения в хаотических смесях**

*Цунчжан Гао, Ц.-Ф. Фань, Цз.-В. Инь, П. Ван, Цз.-Г. Ван*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, КНР

#### **Modelling stochastic radiative transfer in random mixtures**

*C.-Z. Gao, Z.-F. Fan, J.-W. Yin, P. Wang, J.-G. Wang*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

#### **Новый, разрывный лагранжев метод Галеркина для решения уравнений упруго-пластического течения с заданием величин в центре ячейки**

*Паньюй Нью<sup>1</sup>, \*, Чэн Ван<sup>1</sup>, \*\*, Ванли Ван<sup>1</sup>, \*\*\*, Фан Цин<sup>2</sup>, \*\*\*\*, Цзупэн Цзя<sup>3</sup>, \*\*\*\*\**

<sup>1</sup>Главная государственная лаборатория взрывных исследований и технологий, Пекинский технологический институт, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Факультет математики и статистики, Хунаньский первый педагогический университет, Чанша, Китай

<sup>3</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

#### **A new cell-centered Lagrangian discontinuous Galerkin method for solving elastic-plastic flows**

*Panyu Niu<sup>1</sup>, \*, Cheng Wang<sup>1</sup>, \*\*, Wanli Wang<sup>1</sup>, \*\*\*, Fang Qing<sup>2</sup>, \*\*\*\*, Zupeng Jia<sup>3</sup>, \*\*\*\*\**

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing, China

<sup>2</sup>School of Mathematics and Statistics, Hunan First Normal University, Changsha, China

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

#### **Теоретическое исследование собственных кислородных дефектов поверхностей UO<sub>2</sub> (111) и PuO<sub>2</sub> (111)**

*В. Т. Лв<sup>1</sup>, Б. Сунь<sup>1</sup>, П. Ф. Гуань<sup>2</sup>, Ю. Янг<sup>1</sup>, \**

<sup>1</sup>Лаборатория вычислительной физики, Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Пекинский научно-исследовательский центр вычислительных наук, Пекин, Китай

## Theoretical investigation of the intrinsic oxygen defects in UO<sub>2</sub> (111) and PuO<sub>2</sub> (111) surfaces

W. T. Lv<sup>1</sup>, B. Sun<sup>1</sup>, P. F. Guan<sup>2</sup>, Y. Yang<sup>1</sup>, \*

<sup>1</sup>LCP, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

<sup>2</sup>Beijing Computational Science Research Center, Beijing, China

## TensorKMC: моделирование 50 триллионов атомов на основе кинетического метода Монте-Карло с помощью глубокого обучения на суперкомпьютере Sunway нового поколения

С. Чэнь, Х.-Ф. Сун

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, КНР

## TensorKMC: kinetic Monte-Carlo simulation of 50 trillions of atoms driven by deep learning on a new generation of Sunway supercomputer

X. Chen, H.-F. Song

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

## Концептуальное исследование нейтроники на примере гибридного blankets китайского термоядерного испытательного реактора

С. Ши<sup>1</sup>, С. Ван<sup>2</sup>, Г.-М. Цинь<sup>1</sup>, Ж. Ли<sup>2</sup>, Л. Дэн<sup>1</sup>, С.-Ц. Пэн<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Центр программного обеспечения для высокопроизводительного численного моделирования Китайской академии инженерной физики (КАИФ), Пекин, Китай

## Neutronics conceptual research on a hybrid blanket of China fusion engineering test reactor

X. Shi<sup>1</sup>, X. Wang<sup>2</sup>, G.-M. Qin<sup>1</sup>, R. Li<sup>2</sup>, L. Deng<sup>1</sup>, X.-J. Peng<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

<sup>2</sup>CAEP Software Center for High Performance Numerical Simulation, Beijing, China

## Схема на основе метода конечного объема с сохранением положительности и фиксированными трафаретами для задач диффузии излучения на общих многогранных сетках

Ч.-М. Гао

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

## The positivity-preserving finite volume scheme with fixed stencils for radiation diffusion problems on general polyhedral meshes

Z.-M. Gao

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

## Эффективный, обладающий высоким разрешением метод жидкостей-призраков на основе обобщенной задачи Римана для двумерных потоков сжимаемых жидкостей в разных средах

Чжисинь Хо<sup>1</sup>, \*, Цзецюань Ли<sup>2</sup>, \*\*, Цзупэн Цзя<sup>3</sup>, \*\*\*

<sup>1</sup>Аспирантура Китайской академии инженерной физики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Академия мультидисциплинарных исследований, Столичный педагогический университет, Пекин, Китай

<sup>3</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

## A GRP-based high resolution and efficient ghost fluid method for two-dimensional compressible multimediuum flows

Zhixin Huo<sup>1</sup>, \*, Jiequan Li<sup>2</sup>, \*\*, Zupeng Jia<sup>3</sup>, \*\*\*

<sup>1</sup>Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, China

<sup>2</sup>Academy of Multidisciplinary Studies, Capital Normal University, Beijing, China

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

## **Два новых контактных 3D-алгоритма для решения задач лагранжевой гидродинамики с сеткой расчетной схемы, в которой переменные распределяются по узлам и ячейкам**

*Цзупэн Цзя*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

## **Two new three-dimensional contact algorithms for staggered Lagrangian Hydrodynamics**

*Zupeng Jia*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

## **Применение метода регуляризации для обработки кривых малоуглового рентгеновского рассеяния, полученных на порошковом дифрактометре**

*А. Р. Бакиров, А. В. Станкевич 26*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Regularization method for processing small-angle X-ray scattering curves obtained using X-ray powder diffraction system**

*A. R. Bakirov, A. V. Stankevich*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **Применение сходящихся тригонометрических рядов для решения системы нелинейных уравнений с частными производными**

*С. П. Баутин, О. А. Карелина*

Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, Россия

## **Application of convergent trigonometric series for solving a system of nonlinear partial differential equations**

*S. P. Bautin, O. A. Karelina*

Snezhinsky Institute of Physics and Technology of NRU MEPhI, Snezhinsk, Russia

## **Численное моделирование теплового и напряженного состояния контейнера и массива окружающих пород**

*И. О. Боровский*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Numerical simulation of the thermal and stressed state of a container and surrounding rock massif**

*I. O. Borovskiy*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **Бикомпактные схемы и их приложение к численному моделированию динамики идеальных и вязких газов**

*М. Д. Брагин*

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

## **Bicompact schemes and their application to numerical modeling in dynamics of ideal and viscous gases**

*M. D. Bragin*

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

## **Численное моделирование восходящих закрученных потоков линеаризованной системой уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса**

*А. А. Бугаенко<sup>1, 2</sup>, И. Ю. Крутова<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, Россия

## **Numerical simulation of rising skewed streams by linearized hydrodynamics equations with Coriolis force**

*A. A. Bugaenko<sup>1, 2</sup>, I. Y. Krutova<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>MEPI National Nuclear Research University's Snezhinsk Physicotechnical Institute, Snezhinsk, Russia

## **О работах профессора А. Д. Гаджиева в РФЯЦ – ВНИИТФ**

*Э. М. Вазиев, С. Ю. Кузьмин, С. Н. Лебедев, Е. М. Романова, Л. В. Соколов, А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Professor A. D. Gadzhiev's research work at RFNC – VNIITF**

*E. M. Vaziev, S. Y. Kuzmin, S. N. Lebedev, E. M. Romanova, L. V. Sokolov, A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **Вывод дифференциальных уравнений расчета идеального каскада для разделения многокомпонентной смеси**

*О. Е. Александров<sup>1</sup>, В. М. Гадельшин<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup>Уральский Федеральный Университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург, Россия

## **Derivation of differential equations for calculation of the "ideal" cascade for multicomponent mixture separation**

*O. E. Aleksandrov<sup>1</sup>, V. M. Gadelshin<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup>Ural Federal University B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia

<sup>2</sup>Institute of Industrial Ecology UB RAS, Yekaterinburg, Russia

## **О стабилизации явной схемы решения системы уравнений лучистого теплообмена в диффузионном приближении**

*Б. Н. Четверушкин<sup>1</sup>, О. Г. Ольховская<sup>1</sup>, В. А. Гасилов<sup>1</sup>, Р. Д. Москаленко<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup>Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

## **On the stabilization of the explicit scheme for solving the system of radiant heat transfer equations in the diffusion approximation**

*B. N. Chetverushkin<sup>1</sup>, O. G. Olkhovskaya<sup>1</sup>, V. A. Gasilov<sup>1</sup>, R. D. Moskalenko<sup>1, 2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics. Keldysh RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

## **Алгоритмы и особенности программной реализации в пакете УРС-ОФ полуэмпирической модели широкодиапазонных уравнений состояния РОСА-МФИ**

*А. С. Данилов, Д. Г. Гордеев, О. Н. Шумилина, И. Н. Арапов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

**Algorithms and features of software implementation in the URS-OF package of a semi-empirical model of wide-range equations of state ROSA-MFI**

*A. S. Danilov, D. G. Gordeev, O. N. Shumilina, I. N. Arapov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Сопряжение численных методов в рамках единого комплекса программ**

*С. А. Дьячков, Р. В. Муратов, С. Ю. Григорьев*

ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

**Coupling of numerical methods in a unified computer program**

*S. A. Dyachkov, R. V. Muratov, S. Yu. Grigoryev*

Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia

**Возможности построения поверхностных сеток в рамках подготовки расчетных моделей при решении задач аэро- и гидродинамики в пакете программ «Логос»**

*Е. О. Евстифеева, О. Н. Борисенко, Д. М. Панкратов, Т. В. Цалко, А. И. Шавхитдинова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

**Surface Mesh Generation for CFD Computation Models Preparation in "Logos" Software Package**

*E. O. Evstifeeva, O. N. Borisenko, D. M. Pankratov, T. V. Tsalko, A. I. Shavkhidinova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**О регуляризованных уравнениях газовой динамики и их приложениях к численным расчетам**

*Т. Г. Елизарова*

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**About the regularised gas dynamic equations and its implementations to numerical calculations**

*T. G. Elizarova*

Keldysh institute of applied mathematics RAS, Moscow, Russia

**Расчетное моделирование воздействия ударно-волнового нагружения от подрыва цилиндрического заряда внутри буровой трубы**

*В. В. Доценко, Е. Ю. Емельянова, А. Г. Нескин, М. В. Никульшин, Д. В. Петров*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Numerical study to simulate the effect of shock wave loading by cylindrical charge initiated inside the well bore tube**

*V. V. Dotsenko, E. Yu. Emelyanova, A. G. Neskin, M. V. Nikulshin, D. V. Petrov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**К 100-летию К. К. Крупникова. Ударное взаимодействие жесткого ударника и мишени со сверхзвуковой скоростью**

*В. В. Доценко, Е. Ю. Емельянова, М. В. Никульшин*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**To the 100th anniversary of the birth of K. K. Krupnikov. Shock interaction between a rigid impactor and a target at supersonic speed**

*V. V. Dotsenko, E. Yu. Emelyanova, M. V. Nikulshin*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Адаптация программы ЭГИДА-ТЕСТ к счету на GPU**

*Е. А. Сизов, А. М. Ерофеев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

**Adapting the EGIDA-TEST code to computations on GPUs**

*E. A. Sizov, A. M. Erofeev*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Численное моделирование газодинамических задач полуаналитическим методом в эйлеровых координатах**

*А. П. Яловец, Н. Л. Клиначева, М. С. Жарылканова*

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

**Numerical simulation of gas dynamic problems by semi-analytical method in eulerian coordinates**

*A. P. Yalovec, N. L. Klinacheva, M. S. Zharylkanova*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

**Стохастическая методика численного моделирования радиационных поясов Земли**

*А. Н. Залялов, А. Е. Широков, Н. В. Иванов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

**A stochastic method for numerical simulation of Van Allen radiation belts**

*A. N. Zalyalov, A. E. Shirokov, N. V. Ivanov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Применение модификации метода SPH (метода Price) для численного моделирования процессов газодинамики с детонацией в двумерном случае**

*И. В. Залялова, О. К. Линник, Д. М. Линник, Т. И. Жильников, Е. А. Куликова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

**Use of the SPH method modification (Price method) for 2D numerical simulation of gas dynamic processes with detonation**

*I. V. Zalyalova, O. K. Linnik, D. M. Linnik, T. I. Zhilnikov, E. A. Kulikova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Многомерные аналоги уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко**

*С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин, Н. С. Новиков*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

**Multidimensional analogues of the Gelfand–Levitan–Krein–Marchenko equations**

*S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, N. S. Novikov*

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

**Гибридный интеллект и самообучающиеся системы**

*А. А. Карандеев, В. П. Осипов*

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

**Hybrid intelligence and self-learning systems**

*A. A. Karandeev, V. P. Osipov*

Institute of Applied Mathematics named after M. V. Keldysh of the RAS, Russia, Moscow

**Возможности квазигазодинамического (КГД) алгоритма при его реализации в OpenFOAM**

*М. А. Кирюшина<sup>1</sup>, Т. Г. Елизарова<sup>1</sup>, А. С. Епихин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия, Москва

<sup>2</sup>Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Россия, Москва

**Capabilities of the quasi-gas dynamic (QGD) algorithm when implementing in OpenFOAM**

*M. A. Kiryushina<sup>1</sup>, T. G. Elizarova<sup>1</sup>, and A. S. Epikhin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ivannikov Institute for System Programming, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Математическое моделирование взаимодействия различных сред, описываемых лагранжевыми и эйлеровыми переменными**

*Н. Л. Клиначева, М. С. Жарылканова, Е. С. Шестаковская, А. П. Яловец*

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

**Mathematical modeling of the interaction of various media described by Lagrangian and Eulerian variables**

*N. L. Klinacheva, M. S. Zhariilkanova, E. S. Shestakovskaya, A. P. Yalovec*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

**Кинетическая теория разлета многокомпонентной плазмы в планарном вакуумном диоде**

*В. Ю. Кожевников, Н. С. Семенюк, А. О. Коковин, А. В. Козырев*

Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск, Россия

**Kinetic theory of the expansion of a multicomponent plasma in a planar vacuum diode**

*V. Yu. Kozhevnikov, N. S. Semeniuk, A. O. Kokovin, A. V. Kozyrev*

Institute of High Current Electronics SB RAS, Tomsk, Russia

**Визуализация начальных течений воздуха при организации продува вверх**

*С. Н. Кононов<sup>1, 2</sup>, Э. С. Левунина<sup>1, 3</sup>*

<sup>1</sup>СФТИ НИЯУ МИФИ, Снежинск, Россия

<sup>2</sup>Южно-Уральский государственный университет, Озёрск, Россия

<sup>3</sup>ФГУП «ПО «Маяк», Озерск, Россия

**Visualization of the initial air flows during the organization of blowing up**

*S. N. Kononov<sup>1, 2</sup>, E. S. Levunina<sup>1, 3</sup>*

<sup>1</sup>MEPhI, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>SUSU, Ozersk, Russia

<sup>3</sup>FSUE «ПО «Маяк», Ozersk, Russia

**Моделирование анизотропии холодной и тепловой частей давления**

*М. Н. Кривошеина<sup>1, 2</sup>, Е. В. Туч<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

<sup>2</sup>Томский государственный университет, Томск, Россия

**Simulation of the anisotropy of the cold and thermal parts of pressure**

*M. N. Krivosheina<sup>1, 2</sup>, E. V. Tuch<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS, Tomsk, Russia

<sup>2</sup>Tomsk State University, Tomsk, Russia

**Аналитическое и численное моделирование течений в придонных частях восходящих закрученных потоков при учете действия сил тяжести и Кориолиса**

*А. А. Бугаенко, А. О. Казачинский, И. Ю. Крутова, О. В. Опрышко 73*

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

**Analytical and numerical modeling of the flows in the lower parts of ascending vortex flows**

*A. A. Bugaenko, A. O. Kazachinsky, I. Yu. Krutova, O. V. Opryshko*

Snezhinsky Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI", Snezhinsk, Russia

**Методы анализа качества неструктурированных сеток из произвольных многогранников для моделирования задач аэро- и гидродинамики в пакете программ Логос**

*М. В. Кузьменко, О. Н. Борисенко, К. А. Блажнова, Т. Е. Тимаева*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

**Methods to analyze the quality of unstructured meshes of random polyhedrons to simulate aero- and hydro-dynamic problems in Logos software package**

*M. V. Kuzmenko, O. N. Borisenko, K. A. Blazhnova, T. E. Timaeva*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Моделирование динамики океана с усвоением данных наблюдений**

*К. П. Беляев<sup>1</sup>, А. А. Кулешов<sup>2</sup>, И. Н. Смирнов<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

**Numerical simulation of ocean dynamics in conjunction with data assimilation method**

*K. P. Belyaev<sup>1</sup>, A. A. Kuleshov<sup>2</sup>, I. N. Smirnov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

**Применение неоднородного шага по времени в методе Куропатенко при моделировании газодинамических процессов в эйлеровых координатах**

*Д. А. Мастюк<sup>1</sup>, П. Е. Беляев<sup>1,2</sup>, И. Р. Макеева<sup>1,2</sup>, Т. А. Куприянец<sup>1</sup>, Е. Е. Пигасов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>Южно-Уральский государственный университет (Научно исследовательский университет), Челябинск, Россия

**Application of the inhomogeneous time step in the Kuropatenko method for modeling gas-dynamic processes in eulerian coordinates**

*D. A. Mastyuk<sup>1</sup>, P. E. Belyaev<sup>1,2</sup>, I. R. Makeyeva<sup>1,2</sup>, T. A. Kupriyanets<sup>1</sup>, E. E. Pigasov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

**Двумерная задача об опрокидывании волны при выходе цунами на берег**

*С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев*

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

**Two-dimensional problem of overturning a wave when a tsunami comes ashore***S. L. Deryabin, A. V. Mezentsev*

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia

**Использование динамической адаптации сетки для расчетов неустойчивости Рэлея–Тейлора***Н. А. Михайлов, И. В. Глазырин, Н. В. Глазырина, М. А. Писклова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**An application of the dynamic mesh refinement to model Rayleigh–Taylor instability***N. A. Mikhaylov, I. V. Glazyrin, N. V. Glazyrina, M. A. Pisklova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Сравнительный анализ критериев локальной сеточной адаптации***Р. В. Муратов, А. А. Серёжкин*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

**Comparison of various criteria of adaptive mesh refinement***R. V. Muratov, A. A. Serezhkin*

FSUE "N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics", Moscow, Russia

**Численное решение двумерных задач с фазовыми переходами на адаптивно-встраиваемых сетках***А. М. Мустафин, Н. Н. Веселова, С. Н. Лебедев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Numerical solution of 2D problems with phase transitions on adaptive meshes***A. M. Mustafin, S. N. Lebedev, N. N. Veselova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Автомодельная волна разрежения в упругопластическом материале (точное решение и численные расчеты)***В. Н. Ногин, Н. С. Жилыева*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**A self-similar rarefaction wave in elastoplastic material (exact solution and numerical calculations)***V. N. Nogin, N. S. Zhilayeva*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Численное моделирование разрушения тропических циклонов с применением разумных энергетических затрат***С. П. Баутин<sup>1</sup>, В. Е. Замыслов<sup>2</sup>, А. Г. Обухов<sup>3</sup>*<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, Россия<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, Россия<sup>3</sup>ФГАОУ В «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия

## **Numerical simulation of destruction tropical cyclones with the use of reasonable energy costs**

*S. P. Bautin<sup>1</sup>, V. E. Zamislov<sup>2</sup>, A. G. Obukhov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Snezhinsky Institute of Physics and Technology of the National Research Nuclear University MEPhI», Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>Ural State University of Railway Transport», Ekaterinburg, Russia

<sup>3</sup>Tyumen Industrial University», Tyumen, Russia

## **Выявление малых слагаемых временного ряда**

*Г. В. Орлов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Identification of small terms of a time series**

*G. V. Orlov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **Конкретные конфигурации сильного сжатия газа и некоторые рекомендации по мишеням для ЛТС**

*С. П. Баутин<sup>1</sup>, Ю. В. Николаев<sup>1</sup>, Е. И. Понькин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «СФТИ НИЯУ МИФИ», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГУП «ПО «Маяк», Озёрск, Россия

## **Specific Strong Gas Compression Configurations and Some Recommendations on LTF Targets**

*S. P. Bautin<sup>1</sup>, Y. V. Nikolaev<sup>1</sup>, E. I. Ponkin<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Snezhinsk Engineering and Technological Institute of National Research Nuclear University MEPhI, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>FSUE "Mayak Production Association" State Enterprise "Rosatom", Ozersk, Russia

## **Генератор неструктурированных многогранных сеток для тонкостенных конструкций при решении задач аэро- и гидродинамики в пакете программ «Логос»**

*Н. В. Попова, О. Н. Борисенко, А. Г. Гиниятуллина, Е. О. Евтифеева, М. В. Кузьменко, В. В. Лазарев, Д. М. Панкратов, Т. В. Цалко, Е. Ю. Арапова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

## **Thin mesher in cfd "Logos" software package**

*N. V. Popova, O. N. Borisenko, A. G. Giniyatullina, A. O. Evstifeeva, M. V. Kuzmenko, V. V. Lazarev, D. M. Pankratov, T. V. Tsalko, E. Yu. Arapova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

## **Конвективные сдвиговые течения вязких жидкостей с учетом моментных напряжений**

*Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвирыков*

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова, УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

## **Convective shear flows of viscous fluids with couple stresses**

*N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov*

Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russia

Department of Information Technologies and Control Systems, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

## **Разрешимость системы уравнений для описания неоднородных изотермических течений с вертикальной скоростью**

*Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвирыков*

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова, УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

**Convective shear flows of viscous fluids with couple stresses**

*N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov*

Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russia  
Department of Information Technologies and Control Systems, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

**Повышение точности метода SPH типа Годунова путем линейной реконструкции значений на контакте частиц для моделирования вязких и упругопластических сред**

*Г. Д. Рублев, С. А. Дьячков, А. Н. Паршиков*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

**Enhancing the accuracy of the Godunov-type SPH method using linear reconstruction of the values at interparticle contacts for modeling viscous and elastic-plastic media**

*G. D. Rublev, S. A. Dyachkov, A. N. Parshikov*

FSUE "N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics", Moscow, Russia

**Подсеточное восполнение разрывных решений с использованием алгоритмов машинного обучения**

*А. А. Серёжкин, С. А. Дьячков, Р. В. Муратов*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

**Sub-cell reconstruction of discontinuous solutions with using machine learning algorithms**

*A. A. Serezhkin, S. A. Dyachkov, R. V. Muratov*

FSUE «N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics», Moscow, Russia

**Асимптотические решения уравнения Больцмана и турбулентность**

*С. А. Серов*

Институт теоретической и математической физики, ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

**Asymptotic solutions of the Boltzmann equation and turbulence**

*S. A. Serov*

Institute of Theoretical and Mathematical Physics, FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Влияние максимума плотности воды на темпы охлаждения водонасыщенных пористых сред**

*О. А. Симонов<sup>1,3</sup>, Л. Н. Филимонова<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Тюменский Научный Центр СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>2</sup>Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>3</sup>Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

**Effect of the maximum density of water on cooling rates of water-saturated porous media**

*O. A. Simonov<sup>1,3</sup>, L. N. Filimnova<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Tyumen Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>2</sup>Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>3</sup>Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

**Современные тенденции теории интенсивных униполярных и биполярных пучков заряженных частиц и их практические приложения**

*М. А. Завьялов, В. А. Сыровой*

Всероссийский электротехнический институт – филиал ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Москва, Россия

## **Up-to-date tendencies of intense unipolar and bipolar beams of charged particles theory**

*M. A. Zav'yalov, V. A. Syrovoy*

All-Russian Electro-Engineering Institute – Branch of FSUE «Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All – Russia Research Institute of Technical Physics», Moscow, Russia

## **Исследование прочности элементов конструкции гермопроходника**

*И. В. Минаев<sup>1</sup>, А. В. Мкртумян<sup>1,3</sup>, М. В. Никульшин<sup>1</sup>, О. С. Путилин<sup>1</sup>, В. В. Сергодеев<sup>1</sup>,  
А. А. Табатчиков<sup>1</sup>, Н. Н. Тулаева<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет», Челябинск, Россия

<sup>3</sup>ФГОУ ВО «Снежинский государственный физико-технический институт НИЯУ МИФИ», Снежинск, Россия

## **Investigation into the strength of the hermetic adapter construction elements**

*I. V. Minaev<sup>1</sup>, A. V. Mkrtumyan<sup>1,3</sup>, M. V. Nikulshin<sup>1</sup>, O. S. Putilin<sup>1</sup>, V. V. Sergodeev<sup>1</sup>,  
A. A. Tabatchikov<sup>1</sup>, N. N. Tulaeva<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>FSAEI of HE «South Ural State University», Chelyabinsk, Russia

<sup>3</sup>FSEI of HE «Snezhinsk State Institute of Physics and Technology», Snezhinsk, Russia

## **Исследование энергии границ зерен различных типов в алюминии методами машинного обучения**

*Е. В. Фомин*

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

## **Investigation the energy of various type grain boundaries in aluminum by machine learning methods**

*E. V. Fomin*

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

## **Результаты исследований переноса рентгеновского излучения в задачах ИТС для мишеней с непрямым воздействием**

*В. А. Лыков, И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Results of research on X-ray transport in ICF problems for indirectly driven targets**

*V. A. Lykov, I. S. Chubaresheko, A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **50 лет задачам Флека**

*А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

## **Fleck's problems turned 50**

*A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

## **Аналитические тесты для исследования корректирующих коэффициентов метода квазипереноса**

*А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Analytical tests to investigate correcting coefficients in the quasi-transport method***A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Об устойчивости разностных схем TVDR***A. A. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Stability of the TVDR difference schemes***A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Применение поправочных методов для моделирования задач переноса теплового излучения***A. A. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Application of correction methods for solving radiative heat transfer***A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Точные решения стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае***A. A. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Exact solutions of multidimensional stationary radiation and energy transfer equations***A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Учет кинетических эффектов в приближении лучистой теплопроводности для расчета задач переноса излучения***Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Kinetic effects in radiative heat transfer approximation for solving radiation transport***D. A. Koshutin, A. A. Shestakov*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Динамика размножения нейтронов в слоях стационарной системы***В. М. Шмаков, С. А. Орлова, Л. Ф. Гордейчук*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

**Dynamics of neutron multiplication in layers of a stationary system***V. M. Shmakov, S. A. Orlov, L. F. Gordeychuk*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics", Snezhinsk, Russia

**Анизотропная модель замыкания уравнений упругопластики многокомпонентной среды в смешанных ячейках**

*Ю. В. Янилкин, А. Л. Стадник, О. О. Топорова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

**Anisotropic model of closing elasoplasticity equations for multi-material medium in mixed cells**

*Yu. V. Yanilkin, A. L. Stadnik, O. O. Toporova*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Метод расчета газодинамических течений с твердым телом, граница которого проходит внутри неподвижных ячеек**

*О. М. Войтенко, Ю. В. Янилкин*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

**A computational method for gas dynamic flows with a rigid body having an interface inside motionless cells**

*О. М. Voytenko, Yu. V. Yanilkin*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

**Модификация схемы типа «крест» для устранения «шахматной» погрешности**

*Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. М. Ерофеев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

**The "krest" type scheme modification to eliminate the "staggered" error**

*Yu. V. Yanilkin, O. O. Toporova, A. M. Erofeev* 135

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics", Sarov, Russia

## НОВЫЙ МЕТОД MMALE, ОСНОВАННЫЙ НА ИННОВАЦИОННОМ МЕТОДЕ ЖИДКИХ ОБЪЕМОВ

*Боцзяо Ша<sup>1, \*</sup>, Цзупэн Цзя<sup>2, \*\*</sup>*

<sup>1</sup>Высшая школа при Китайской академии технической физики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

E-mail: 1737889401@qq.com<sup>\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*</sup>

Метод жидких объемов широко используется для определения границ раздела при численном моделировании жидкостного потока из нескольких материалов. К настоящему времени выполнен большой объем работ с целью повышения его точности и эффективности, в частности, разработка аналитических методов восстановления. Однако для практического применения требуется дополнительно повысить точность, эффективность и надежность метода жидких объемов. В традиционном методе жидких объемов для вычисления нормального вектора границы раздела в каждой ячейке, содержащей несколько материалов, требуются данные о соседних ячейках. В данной работе мы представляем инновационный метод жидких объемов – простой, точный и надежный метод для восстановления границы раздела. Для данного метода не требуются данные о соседних ячейках, и он имеет точность второго порядка. Он также может применяться для восстановления границ раздела в ячейках, содержащих три материала. По сравнению с традиционными методами жидких объемов, данный инновационный метод жидких объемов является простым для кодирования и реализации. На основе данного метода, а также модели релаксации давления Типтона для замыкания ячеек, содержащих несколько материалов, был разработан новый метод MMALE с центрированием на ячейке, который является в высокой степени надежным. Численные результаты показывают, что новый метод жидких объемов имеет точность второго порядка, и его можно сравнить с методом «момента жидкости». Результаты также показывают, что разработанный метод MMALE является более надежным, чем существующие методы MMALE.

## A NEW MMALE METHOD BASED ON A NOVEL VOF METHOD

*Bojiao Sha<sup>1, \*</sup>, Zupeng Jia<sup>2, \*\*</sup>*

<sup>1</sup>Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, China

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

E-mail: 1737889401@qq.com<sup>\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*</sup>

The VoF (Volume of Fluid) method is a widely used tool for interface capturing in numerical simulation of multi-material fluid flow. So far, many efforts have contributed to improve its accuracy and efficiency, such as developing analytic reconstruction methods. However, the accuracy, efficiency and robustness of the VoF method need to be further improved in practical applications. In the traditional VoF method, information of neighboring cells are needed to compute the normal vector of the interface in each multimaterial cell. In this talk, we present a novel VoF method. It is a simple, accurate and robust VoF interface reconstruction method. It does not need information from neighboring cells, and has nearly second-order accuracy. It is also applicable for interface reconstruction in multimaterial cells containing three materials. This new VoF method is easy to code and implement compared to the traditional VoF methods. Based on this novel VoF method, we develop a new cell-centered MMALE method which is very robust. The new MMALE method uses Tipton's pressure relaxation model for the closure of multimaterial cells, and uses the new VoF method to perform interface reconstruction. Numerical results demonstrate that the new VoF method is of second-order accuracy, and is comparable to Moment of Fluid (MoF) method. The results also show that the robustness of this new MMALE method is superior to existing MMALE methods.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ХАОТИЧЕСКИХ СМЕСЯХ

*Цунчжан Гао, Ц.-Ф. Фань, Цз.-В. Инь, П. Ван, Цз.-Г. Ван*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, КНР

Email: gao\_congzhang@iapcm.ac.cn

Стохастические смеси состоят из двух и более хаотически смешанных несмешиваемых материалов, что повсеместно встречается в турбулентных смесях, таких как межзвездные молекулярные облака, земные облака и термоядерные мишени. В течение последних десятилетий неуклонно растет интерес к исследованию переноса излучения в хаотических смесях в широком спектре областей исследований, таких как астрофизика и физика плазмы. Применение традиционных детерминированных подходов и/или методов Монте–Карло, используемых для изучения переноса излучения в однородной среде, может оказаться невозможным применительно к хаотическим смесям, поскольку состав хаотических смесей известен лишь статистически по объемной доле в заданном положении в любой момент времени. В данном контексте моделирование переноса излучения через хаотические смеси является сложной задачей.

В настоящей работе мы исследовали стохастический перенос излучения в стационарных и активных хаотических смесях [1, 2]. Для стационарных хаотических смесей мы разработали статистическую модель для расчета усредненного по ансамблю пропускания излучения через бинарную хаотическую смесь, которая численно моделируется как для марковских, так и для немарковских смесей. Полученные нами результаты показали, что статистика смешивания влияет на усредненные по ансамблю интенсивности в основном благодаря распределению кумулятивной функции плотности вероятности (PDF) на малой оптической глубине. Размерный эффект частиц становится значимым, если длина корреляции смесей сравнима со средней длиной свободного пробега фотонов. Для активных хаотических смесей мы использовали случайную выборку смесей вместе с детерминированным решением нестационарного уравнения переноса излучения, сопряженного с уравнением температуры вещества. Предлагая стационарную модель стохастического переноса, мы обнаружили, что механизм пропускания излучения зависит от расстояния, что тесно связано со средней длиной свободного пробега фотонов  $l_p$ . Кроме того, мы предположили, что именно зависимость между  $l_p$  и  $L$  (шириной хаотической среды) определяет влияние хаотической смеси на перенос стохастического излучения, что подтверждается в ходе дополнительного моделирования в широком диапазоне параметров. Объединив предлагаемое простое отношение и одномерное моделирование, мы смогли разрешить существующий спорный вопрос о влиянии хаотической смеси, обсуждавшийся в предыдущих работах по многомерному моделированию, и показали, что результаты многомерного моделирования в целом согласуются, и что наблюдаемое слабое или значительное влияние хаотической смеси в основном обусловлено очевидными различиями зависимостей  $l_p$  и  $L$ . Ожидается, что наша работа обеспечит лучшее понимание стохастического переноса излучения в реалистичных физических сценариях.

### Литература

1. **Gao, C.-Z.** Stochastic radiative transfer in random media: Pure absorbing cases [Text] / C.-Z. Gao et al. // Phys. Rev. E. – 2020. – Vol. 102. – P. 022111.
2. **Gao, C.-Z.** Stochastic radiative transfer in random media: II. Coupling of radiation to material [Text] / C.-Z. Gao et al. // Phys. Rev. E. – 2022. – Vol. 105. – P. 014131.

# MODELLING STOCHASTIC RADIATIVE TRANSFER IN RANDOM MIXTURES

*C.-Z. Gao, Z.-F. Fan, J.-W. Yin, P. Wang, J.-G. Wang*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

Email: gao\_congzhang@iapcm.ac.cn

Stochastic mixtures consist of two or more randomly mixed immiscible materials, which is ubiquitous in turbulent mixtures, such as interstellar molecular clouds, terrestrial clouds, and fusion pellets. Over the past decades, the interest in studying the transport of radiation in random mixtures has been growing in a broad range of research fields such as astrophysics and plasma physics. Traditional deterministic and/or Monte-Carlo radiation transport approaches for a homogeneous medium may be inapplicable in random mixtures, since the composition of random mixtures is only known statistically by the volume fraction at a specified position at any time. In this context, it is a challenge to model the radiation transport through random mixtures.

In this contribution, we investigated stochastic radiative transfer in stationary and participating random mixtures [1, 2]. For stationary random mixtures, we developed a statistical model to calculate the ensemble-averaged transmission for a binary random mixture, which is numerically simulated for both Markovian and non-Markovian mixtures. Our results show that mixing statistics affects the ensemble-averaged intensities mainly due to the distribution of cumulative PDF at small optical depths. The effect of the particle size is substantial when the mixtures' correlation length is comparable to the mean free path of photons. For participating random mixtures, we used a random sampling of mixtures combined with a deterministic solution of the time-dependent radiation transport equation coupled to a material temperature equation. By proposing a steady-state stochastic transport model, it is found that the mechanism of transmission of radiation is distance dependent, which is closely related to the mean free path of photons  $l_p$ . Moreover, we suggest that it is the relationship between  $l_p$  and  $L$  (the width of random medium) that determines the impact of random mixture on the stochastic radiation transport, which is further corroborated by additional simulations in a wide range of parameters. Combining the proposed simple relationship and 1D simulations, we have resolved the existing disputable issue of the impact of random mixture in previous multidimensional works, showing that multidimensional results are essentially consistent and the observed weak or remarkable impact of random mixture is mainly due to the distinctly different relationship between  $l_p$  and  $L$ . Our work is expected to improve the understanding of stochastic radiative transfer in realistic physical scenarios.

## References

1. **Gao, C.-Z.** Stochastic radiative transfer in random media: Pure absorbing cases [Text] / C.-Z. Gao et al. // Phys. Rev. E. – 2020. – Vol. 102. – P. 022111.
  2. **Gao, C.-Z.** Stochastic radiative transfer in random media: II. Coupling of radiation to material [Text] / C.-Z. Gao et al. // Phys. Rev. E. – 2022. – Vol. 105. – P. 014131.
-

## НОВЫЙ, РАЗРЫВНЫЙ ЛАГРАНЖЕВ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ С ЗАДАНИЕМ ВЕЛИЧИН В ЦЕНТРЕ ЯЧЕЙКИ

*Паньюй Ню<sup>1,\*</sup>, Чэн Ван<sup>1,\*\*</sup>, Ваньли Ван<sup>1,\*\*\*</sup>, Фан Цин<sup>2,\*\*\*\*</sup>, Цзупэн Цзя<sup>3,\*\*\*\*\*</sup>*

<sup>1</sup>Главная государственная лаборатория взрывных исследований и технологий, Пекинский технологический институт, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Факультет математики и статистики, Хунаньский первый педагогический университет, Чанша, Китай

<sup>3</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай  
E-mail: 3120215179@bit.edu.cn<sup>\*</sup>, wangcheng@bit.edu.cn<sup>\*\*</sup>, lingwenjiana@163.com<sup>\*\*\*</sup>,  
qingfang46@126.com<sup>\*\*\*\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*\*\*\*</sup>

Представлен новый разрывный лагранжев метод Галеркина для решения уравнений упруго-пластического течения с применением гипоупругой определяющей модели и критерия пластичности Мизеса с заданием величин в центре ячейки. Сначала, начиная с основного уравнения в эйлеровой системе координат, выводится интегральная слабая форма в лагранжевой системе координат. Затем для пространственной дискретизации используется разрывный метод Галеркина. Основные функции Тэйлора, определенные в начальных координатах, дают кусочно-полиномиальное разложение переменных. После этого скорости в вершинах вычисляются согласованно с помощью узлового решателя, использующего аппроксимирующий решатель Римана типа HLLC, а ограничитель используется для подавления нефизических числовых осцилляций на разрывах. В заключение выполняется согласование по времени с использованием класса TVD-методов Рунге–Кутта. Представлены результаты нескольких численных экспериментов для демонстрации точности и надежности данной схемы.

## A NEW CELL-CENTERED LAGRANGIAN DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR SOLVING ELASTIC-PLASTIC FLOWS

*Panyu Niu<sup>1,\*</sup>, Cheng Wang<sup>1,\*\*</sup>, Wanli Wang<sup>1,\*\*\*</sup>, Fang Qing<sup>2,\*\*\*\*</sup>, Zupeng Jia<sup>3,\*\*\*\*\*</sup>*

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing, China

<sup>2</sup>School of Mathematics and Statistics, Hunan First Normal University, Changsha, China

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China  
E-mail: 3120215179@bit.edu.cn<sup>\*</sup>, wangcheng@bit.edu.cn<sup>\*\*</sup>, lingwenjiana@163.com<sup>\*\*\*</sup>,  
qingfang46@126.com<sup>\*\*\*\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*\*\*\*</sup>

A new cell-centered Lagrangian discontinuous Galerkin method for solving elastic-plastic flows with the hypo-elastic constitutive model and von Mises' yielding condition is presented. First, starting from the governing equation in the Euler framework, the integral weak form in the Lagrangian framework is derived. Then, the discontinuous Galerkin method is used for spatial discretization. The Taylor basis functions defined in reference coordinates provide the piecewise polynomial expansion of the variables. Next, vertex velocities are computed consistently through the nodal solver equipped with HLLC-type approximate Riemann solver, and a limiter is used to suppress the non-physical numerical oscillation at the discontinuity. Finally, the time marching is implemented by a class of TVD Runge–Kutta type methods. Results of some numerical tests are presented to demonstrate the accuracy and robustness of the scheme.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КИСЛОРОДНЫХ ДЕФЕКТОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ $\text{UO}_2$ (111) И $\text{PuO}_2$ (111)

*В. Т. Лв<sup>1</sup>, Б. Сунь<sup>1</sup>, П. Ф. Гуань<sup>2</sup>, Ю. Янг<sup>1,\*</sup>*

<sup>1</sup>Лаборатория вычислительной физики, Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Пекинский научно-исследовательский центр вычислительных наук, Пекин, Китай

\*Email: wt\_lv0508@163.com

В данной работе представлено теоретическое исследование закономерностей образования и распределения собственных кислородных дефектов поверхностей  $\text{UO}_2$  (111) и  $\text{PuO}_2$  (111), выполненное с помощью метода Хаббардовской коррекции (теории функционала плотности) (метод DFT+U) и метода первопринципной атомистической термодинамики. Согласно результатам вычислений, в  $\text{UO}_2$  преобладают междоузельные кислородные дефекты ( $\text{O}_i$ ), а в  $\text{PuO}_2$  могут сосуществовать как дефекты  $\text{O}_i$ , так и кислородные вакансии ( $\text{O}_v$ ). Возможно, это явление обусловлено различными электронными свойствами элементов U и Pu. В запрещенной зоне  $\text{UO}_2$   $\text{O}_v$  в качестве легирующего элемента  $n$ -типа вызывает состояние дефекта на глубоком уровне, тогда как  $\text{O}_i$ , действуя как легирующий элемент  $p$ -типа, вызывает дефектное состояние на поверхностном уровне вблизи потолка валентной зоны  $\text{PuO}_2$ . Что касается  $\text{O}_v$ , характерные для него электронные состояния обеспечивают гибридизацию с атомами урана и незначительно меняют зонную структуру  $\text{UO}_2$ . Междоузельный атом кислорода, в свою очередь, вызывает дефектное состояние на глубоком уровне в запрещенной зоне  $\text{PuO}_2$ . Кроме того, оказывается, что энергия образования  $\text{O}_v$  зависит от глубины поверхности, и  $\text{O}_v$  свойственно оставаться в подповерхностном слое как в  $\text{UO}_2$ , так и в  $\text{PuO}_2$ . При этом энергия образования  $\text{O}_i$  не зависит от глубины поверхности. Деформационный эффект энергии образования, в основном, усиливается за счет локального структурного искажения, а не за счет гибридизации электронных орбиталей. Выполненные термодинамические расчеты позволили построить деформационно-модулированные фазовые диаграммы энергии образования кислородных дефектов в большом диапазоне значений температуры и давления и могут быть использованы для разработки подхода к определению типов и концентраций собственных кислородных дефектов в  $\text{UO}_2$  и  $\text{PuO}_2$ . Представленное исследование расширяет существующие знания о механизмах рассматриваемых процессов и влиянии кислородных дефектов на особенности реакции окисления актиноидных металлов.

## THEORETICAL INVESTIGATION OF THE INTRINSIC OXYGEN DEFECTS IN $\text{UO}_2$ (111) AND $\text{PuO}_2$ (111) SURFACES

*W. T. Lv<sup>1</sup>, B. Sun<sup>1</sup>, P. F. Guan<sup>2</sup>, Y. Yang<sup>1,\*</sup>*

<sup>1</sup>LCP, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

<sup>2</sup>Beijing Computational Science Research Center, Beijing, China

\*Email: wt\_lv0508@163.com

We studied the formation and distribution behavior of intrinsic oxygen defects in (111) surfaces of  $\text{UO}_2$  and  $\text{PuO}_2$  by density functional theory (DFT)+U combined with the first principle atomistic thermodynamic method. The calculated results indicate that the oxygen interstitial ( $\text{O}_i$ ) defects are dominant in  $\text{UO}_2$ , while the oxygen vacancy ( $\text{O}_v$ ) and  $\text{O}_i$  defects can coexist in  $\text{PuO}_2$ . This can be attributed to the different electronic properties of U and Pu elements. An  $\text{O}_v$  introduces a deep-level defect state in the band gap of  $\text{UO}_2$  acting as a  $n$ -type doping, while introduces a shallow-level defect state near the valence-band-maximum (VBM) of  $\text{PuO}_2$  as a  $p$ -type doping. For an  $\text{O}_i$ , its electronic states hybridize with neighboring uranium atoms and results in negligible changes in the band structure of  $\text{UO}_2$ . Comparatively an interstitial oxygen atom introduces a

deep-level defect state in the band gap of  $\text{PuO}_2$ . Moreover, the formation energy of  $\text{O}_i$  is found to be sensitive to the surface depth, and  $\text{O}_i$  prefer to exist on the sub-surface layer in both  $\text{UO}_2$  and  $\text{PuO}_2$ . The formation of  $\text{O}_i$  is insensitive to the surface depth. The strain effect of formation energy is mainly contributed from the local structural distortion, rather than the electronic hybridization. Through thermodynamic calculation, the strain-modulated formation energy phase diagrams of the oxygen defects have been established over a wide range of temperature and pressure, providing the potential strategy for controlling the type and concentration of intrinsic oxygen defects in  $\text{UO}_2$  and  $\text{PuO}_2$ . The present study deepens our mechanistic understanding of the role of oxygen defects in the oxidation properties of actinide metals.

6-5

## **TENSORKMC: МОДЕЛИРОВАНИЕ 50 ТРИЛЛИОНОВ АТОМОВ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОГО МЕТОДА МОНТЕ–КАРЛО С ПОМОЩЬЮ ГЛУБОКОГО ОБУЧЕНИЯ НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ SUNWAY НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ**

*С. Чэнь, Х.-Ф. Сун*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, КНР

Метод атомной динамики Монте-Карло (АДМК) занимает важное место в многомасштабном физическом моделировании, так как он соединяет микро- и макромиры. Однако вследствие эмпирических потенциалов точность такого метода ограничена. В связи с этим в настоящей работе предлагаются алгоритм тройного кодирования и механизм кеширования пустых значений с целью эффективного интегрирования исходных моделей потенциала нейронной сети (NNP) и метода АДМК и их применения в программе TensorKMC. Данная программа переносится на процессор SW26010-pro, при этом обновляются алгоритм вычислений распределённых объектов и стратегия большого синтеза моделей NNP для новых блоков гетерогенных вычислений Sunway. Далее оптимизируется использование памяти. Благодаря таким улучшениям, программа TensorKMC позволяет моделировать до 50 триллионов атомов и получать отличные характеристики сильного и слабого масштабирования до 24 960 000 ядер.

### **Литература**

1. **Shang, H.-H.** TensorKMC: Kinetic Monte–Carlo Simulation of 50 Trillion Atoms Driven by Deep Learning on a New Generation of Sunway Supercomputer [Text] / H.-H. Shang, X. Chen, X.-Y. Gao, R.-F. Lin, L.-F. Wang, F. Li, Q. Xiao, et al. // The International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC'21).

## **TENSORKMC: KINETIC MONTE-CARLO SIMULATION OF 50 TRILLIONS OF ATOMS DRIVEN BY DEEP LEARNING ON A NEW GENERATION OF SUNWAY SUPERCOMPUTER**

*X. Chen, H.-F. Song*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

The atomic dynamics Monte Carlo method plays an important role in multi-scale physical simulations because it bridges the micro and macro worlds. However, its accuracy is limited by empirical potentials. We therefore propose herein a triple-encoding algorithm and vacancy-cache mechanism to efficiently integrate ab initio neural network potentials (NNPs) with AKMC and implement them in our TensorKMC codes. We port our program to SW26010-pro and innovate a distributed feature calculation algorithm and a big fusion

strategy for the NNPs for the new Sunway heterogeneous computing units. We further optimize the memory usage. With these improvements, TensorKMC can simulate up to 50 trillion atoms and achieve excellent strong and weak scaling performance up to 24 960 000 cores.

### References

Shang, H.-H. TensorKMC: Kinetic Monte-Carlo Simulation of 50 Trillion Atoms Driven by Deep Learning on a New Generation of Sunway Supercomputer [Text] / H.-H. Shang, X. Chen, X.-Y. Gao, R.-F. Lin, L.-F. Wang, F. Li, Q. Xiao, et al. // The International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC'21).

6-6

## КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЙТРОНИКИ НА ПРИМЕРЕ ГИБРИДНОГО БЛАНКЕТА КИТАЙСКОГО ТЕРМОЯДЕРНОГО ИСПЫТАТЕЛЬНОГО РЕАКТОРА

С. Шу<sup>1</sup>, С. Ван<sup>2</sup>, Г.-М. Цинь<sup>1</sup>, Ж. Ли<sup>2</sup>, Л. Дэн<sup>1</sup>, С.-Ц. Пэн<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Центр программного обеспечения для высокопроизводительного численного моделирования  
Китайской академии инженерной физики (КАИФ), Пекин, Китай

E-mail: sxm\_shi@qq.com

В настоящее время ведутся исследования в области инженерной концепции Китайского термоядерного испытательного реактора. В нашей работе в качестве альтернативы традиционным концепциям с использованием бланкета только для синтеза предложена схема с использованием гибридного бланкета для синтеза и деления. Такая схема позволит самостоятельно закрывать потребности в тритии и уменьшить его первоначальный запас. Конструкция гибридного бланкета предполагает использование в качестве топлива природный уран, легкую воду – в качестве охладителя и  $\text{Li}_4\text{SiO}_4$  – в качестве размножителя трития. В нашем исследовании используется программный код для расчета выгорания MCORGS, а также программные коды MCNP и ORIGENS. Во-первых, чтобы получить максимальный коэффициент воспроизводства трития (КВТ) и умеренное увеличение энергии (М), была создана и оптимизирована одномерная конструкция. Затем в концептуальных исследованиях бланкета использовалась 3D модель нейтроники Китайского термоядерного испытательного реактора мощностью 200 МВт, созданная с помощью программы детального технического проектирования CAD. В начале активной зоны коэффициент воспроизводства трития 3D (КВТ) равен 1,26. Это значение больше максимально возможного КВТ бланкета только для синтеза (около 1,15), значение М соответствует 3,18. Это связано с тем, что первоначальный запас трития будет в 3 раза меньше, чем при использовании бланкета только для синтеза, в случае если тепловая мощность бланкета будет постоянной. После 12-летнего периода выгорания при уровне термоядерной энергии 200 МВт значения КВТ и М составляют 1,28 и 4,05, соответственно. Гибридная система находится в глубоко подкритическом состоянии, константа эффективного воспроизводства ядерного топлива варьируется в диапазоне 0,161–0,227. Если природный уран в зоне деления заменить отработанным топливом или низкообогащенным ураном, можно получить большие значения КВТ и М. Кроме того, для верификации расчетов КВТ использовался универсальный программный код на основе метода Монте-Карло для расчета переноса нейтронов, фотонов и электронов (код JMCT), разработанный Институтом прикладной физики и вычислительной математики. Данные результаты хорошо согласуются с результатами, полученными с использованием программного кода MCNP.

Ключевые слова: Китайский термоядерный испытательный реактор, самообеспечение тритием, гибридная схема синтеза и деления, бланкет

## Литература

1. **Wan, Y. X.** Overview of the present progress and activities on the CFETR [Text] / Y. X. Wan, J. G. Li, Y. Liu, et al. // Nucl. Fusion. – 2017. – Vol. 57, No. 10. – P. 102009.
2. **Abdou, M.** Blanket/first wall challenges and required R&D on the pathway to DEMO [Text] / M. Abdou, N. B. Morley, S. Smolentsev, et al. // Fusion Eng. Des. – 2015. – Vol. 100. – P. 2–43.
3. **Deng, L.** 3-D Monte Carlo neutron-photon transport code JMCT and its algorithms [Text] / L. Deng, T. Ye, G. Li, et al. // PHYSOR-2014; Kyoto, Japan, September 28 – October 3. – 2014.
4. **Shia, X.-M.** Neutronics conceptual research on a hybrid blanket of china fusion engineering test reactor [Text] / X.-M. Shia, X. Wang, G.-M. Qin, et al. // Fusion Eng. Des. 156(2020) 111715.

## NEUTRONICS CONCEPTUAL RESEARCH ON A HYBRID BLANKET OF CHINA FUSION ENGINEERING TEST REACTOR

*X. Shi<sup>1</sup>, X. Wang<sup>2</sup>, G.-M. Qin<sup>1</sup>, R. Li<sup>2</sup>, L. Deng<sup>1</sup>, X.-J. Peng<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

<sup>2</sup>CAEP Software Center for High Performance Numerical Simulation, Beijing, China

E-mail: [sxm\\_shi@qq.com](mailto:sxm_shi@qq.com)

The engineering concept research of China Fusion Engineering Test Reactor (CFETR) is underway. In order to achieve tritium self sufficiency and lower tritium startup inventory, a fusion fission hybrid blanket scheme is proposed in this paper as a backup for the traditional pure fusion blanket concepts. In the hybrid blanket design, natural uranium is used as fuel, light water as coolant and  $\text{Li}_4\text{SiO}_4$  as tritium breeder. MCORGS, a burnup code coupled by MCNP and ORIGENS, is used in the research. One dimensional design and optimization is firstly made to obtain maximum Tritium Breeding Ratio (TBR) and a moderate energy Multiplication (M). A 3D neutronics model of the 200MW CFETR based on detailed CAD design is then used in the blanket conceptual research. At the beginning of the core, TBR3D is 1.26 which is bigger than the max achievable TBR for pure fusion blanket (around 1.15), M is 3.18 which means the tritium startup inventory will be 3 times lower than the pure fusion blanket in case of a fixed blanket thermal power. After 12 years burnup with 200MW fusion power, TBR and M will be 1.28 and 4.05 respectively. The hybrid system is in a ultra deep subcritical state, the effective multiplication constant varies from 0.161 to 0.227. If the natural uranium in fission zone is replaced by spent fuel or LEU, more higher TBR and M will be obtained. In addition, JMCT which is a general purpose Joint Monte Carlo neutron photon-electron Transport code developed by IAPCM, is used to verify the TBR calculation and shows good agreement with MCNP.

Keywords: CFETR, Tritium self-sufficiency, Fusion fission hybrid, Blanket

## References

1. **Wan, Y. X.** Overview of the present progress and activities on the CFETR [Text] / Y. X. Wan, J. G. Li, Y. Liu, et al. // Nucl. Fusion. – 2017. – Vol. 57, No. 10. – P. 102009.
2. **Abdou, M.** Blanket/first wall challenges and required R&D on the pathway to DEMO [Text] / M. Abdou, N. B. Morley, S. Smolentsev, et al. // Fusion Eng. Des. – 2015. – Vol. 100. – P. 2–43.
3. **Deng, L.** 3-D Monte Carlo neutron-photon transport code JMCT and its algorithms [Text] / L. Deng, T. Ye, G. Li, et al. // PHYSOR-2014; Kyoto, Japan, September 28 – October 3. – 2014.
4. **Shia, X.-M.** Neutronics conceptual research on a hybrid blanket of china fusion engineering test reactor [Text] / X.-M. Shia, X. Wang, G.-M. Qin, et al. // Fusion Eng. Des. 156(2020) 111715.

6-7

## **СХЕМА НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА С СОХРАНЕНИЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ И ФИКСИРОВАННЫМИ ТРАФАРЕТАМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИФФУЗИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОБЩИХ МНОГОГРАННЫХ СЕТКАХ**

*Ч.-М. Гао*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

E-mail: gao@iapcm.ac.cn

Диффузионный процесс является очень важным для множества связанных систем в таких реальных областях применения, как гидродинамика излучения, физика плазмы, пластовое моделирование и т. д. Дискретизация таких систем методом конечных объемов широко используется учеными и инженерами, так как предложенный метод обладает полезными свойствами, например локальной консервативностью. Схема конечного объема часто обладает такой важной особенностью как неотрицательность дискретного решения. К нарушению этого свойства сохранения положительности могут приводить сильно искаженные сетки (которые зачастую имеют место при моделировании ядерного синтеза с инерционным удержанием плазмы) и высоко анизотропные среды (при пластовом моделировании). Построение таких схем уравнений диффузии методом конечных объемов с сохранением положительности, которые обладают приблизительно точностью второго порядка на сильно искаженных сетках в случае, если тензор диффузии считается высоко анизотропным, периодически неоднородным и/или прерывистым, является объектом исследования многих ученых.

В рамках данной работы предлагаются два вида нелинейных схем на основе метода конечных объемов с сохранением положительности, центрированных на ячейке, для задач диффузии излучения на общих трехмерных многогранных сетках. Сначала при помощи фиксированного трафарета всех вершин выполняется дискретизация одностороннего потока на гранях элементарной ячейки. Затем посредством нелинейной двухточечной аппроксимации потока методом исключения вспомогательных неизвестных вершин получаем схему дискретизации, центрированную на ячейке. На этом основании с целью исключения вспомогательных неизвестных вершин в схеме строится новый явный взвешенный интерполяционный алгоритм вершин второго порядка для произвольных многогранных сеток. Кроме того, для нелинейной итерации применяется усовершенствованный алгоритм ускорения Андерсона. В заключение, сходимость и свойство сохранения положительности двух схем дискретизации подтверждаются при помощи нескольких контрольных примеров.

## **THE POSITIVITY-PRESERVING FINITE VOLUME SCHEME WITH FIXED STENCILS FOR RADIATION DIFFUSION PROBLEMS ON GENERAL POLYHEDRAL MESHES**

*Z.-M. Gao*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

E-mail: gao@iapcm.ac.cn

Diffusion process is very important in many coupled systems for real life applications such as radiation hydrodynamics, plasma physics, reservoir modelling and so on. Finite volume discretizations of such systems are very popular among the scientists and engineers due to their nice properties such as local conservation. In many situations, one of the significant features of the finite volume scheme is that the discrete solution should be non-negative. The severely distorted meshes (often occur in the simulation of inertial confinement fusion) and highly anisotropic media (in reservoir modelling) may result in the violation of positivity-preserving property. Many scientists have made great efforts on the construction of positivity-preserving finite volume schemes of diffusion equation that approximately have a second-order accuracy on

severely distorted grids in case that the diffusion tensor is taken to be highly anisotropic, at times heterogeneous, and/or discontinuous.

In this talk, two kinds of nonlinear cell-centered positivity-preserving finite volume schemes are proposed for radiation diffusion problems on general three-dimensional polyhedral meshes. Firstly, the one-sided flux on the cell-faces is discretized using the fixed stencil of all vertices. Then by using the nonlinear two-point flux approximation, the cell-centered discretization scheme is obtained by eliminating the vertex auxiliary unknowns. On this basis, a new explicit weighted second-order vertex interpolation algorithm for arbitrary polyhedral meshes is designed to eliminate the vertex auxiliary unknowns in the scheme. In addition, an improved Anderson acceleration algorithm is adopted for the nonlinear iteration. Finally, some benchmark examples are given to verify the convergence and positivity-preserving property of the two discretization schemes.

---

6-8

## ЭФФЕКТИВНЫЙ, ОБЛАДАЮЩИЙ ВЫСОКИМ РАЗРЕШЕНИЕМ МЕТОД ЖИДКОСТЕЙ-ПРИЗРАКОВ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ПОТОКОВ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В РАЗНЫХ СРЕДАХ

*Чжисинь Хо<sup>1,\*</sup>, Цзецюань Ли<sup>2,\*\*</sup>, Цзупэн Цзя<sup>3,\*\*\*</sup>*

<sup>1</sup>Аспирантура Китайской академии инженерной физики, Пекин, Китай

<sup>2</sup>Академия мультидисциплинарных исследований, Столичный педагогический университет, Пекин, Китай

<sup>3</sup>Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай  
E-mail: huozhixin20@giscaep.ac.cn<sup>\*</sup>, jiequan@cnu.edu.cn<sup>\*\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*\*</sup>

Состояния жидкостей-призраков, определяемые методом жидкостей-призраков (метод GFM) на основе задачи Римана, являются непрерывно распределенными, т. е. их пространственные производные по нормали к границе раздела материалов равны нулю. Такой недостаток создает много проблем, например, ошибки рассогласования по нормали к границе раздела, что не позволяет отразить влияние основных членов (речь идет о тангенциальных членах преобразованных уравнений). Чтобы устранить данный недостаток, мы разработали метод GFM на основе обобщенной задачи Римана, который позволяет получить своего рода линейно распределенные состояния жидкости-призрака. В нашем новом методе состояния реальной жидкости вблизи границы раздела заменяются на промежуточные состояния из задачи Римана, соответствующей локальной обобщенной задаче Римана для двух сред по направлению нормали, а их пространственные производные заменяются на углы наклона промежуточных состояний в локальной обобщенной задаче Римана для двух сред. Исходные линейно распределенные состояния в локальной обобщенной задаче Римана для двух сред получаем путем подгонки методом взвешенных наименьших квадратов, используя состояния жидкости в ячейках, полностью расположенных в областях с реальной жидкостью. Затем доопределим измененные состояния жидкости и их пространственные производные, перенеся их на области с жидкостью-призраком, применив, соответственно, линейную и константную экстраполяцию. Если сравнивать с методом GFM на основе задачи Римана, наш метод GFM на основе обобщенной задачи Римана имеет следующие преимущества:

1) поскольку углы наклона промежуточных состояний в локальной обобщенной задаче Римана для двух сред получают в условиях сохранения непрерывности нормальных материальных производных давления и нормальной скорости, ошибок рассогласования вблизи границы раздела удастся практически полностью избежать (даже в том случае, когда моделирование продолжается очень долго);

2) исходные состояния и промежуточные состояния в задаче Римана непрерывно распределены и не могут отражать влияние основных членов, в то время как исходные состояния и промежуточные состояния в обобщенной задаче Римана являются линейно распределенными и могут отражать влияние основных членов;

3) наш метод GFM на основе обобщенной задачи Римана лучше описывает термодинамические свойства сжимаемых сред, что позволяет снизить ошибки, связанные с перегревом и недостаточным нагревом.

Более того, традиционным методом доопределения состояний жидкости-призрака является решение уравнений эйконала итерационным методом, при котором приходится пересекать ячейки в областях с жидкостью-призраком по 20–30 раз за один временной шаг, что приводит к очень низкой эффективности вычислений. В нашем методе GFM, в основе которого лежит обобщенное уравнение Римана, напротив, доопределение состояний жидкости-призрака и их пространственных производных осуществляется с помощью константной и линейной экстраполяции, что предполагает однократное пересечение ячейки в областях с жидкостью-призраком за временной шаг и, следовательно, существенно повышает эффективность вычислений. Результаты нескольких типовых испытаний продемонстрировали точность, надежность и эффективность нашего нового метода.

### Литература

1. **Zhixin Huo.** A GRP-based high resolution ghost fluid method for compressible multi-medium fluid flows I: one-dimensional case [Text] / Zhixin Huo, Jiequan Li // *Applied Mathematics and Computation*. – 2023. – Vol. 437. – P. 127506.
2. **Zhixin Huo.** A GRP-based high resolution and efficient ghost fluid method for two-dimensional compressible multi-medium flows [Text] / Zhixin Huo, Jiequan Li and Zupeng Jia // передано на рассмотрение в журнал «Communications in Computational Physics».

## A GRP-BASED HIGH RESOLUTION AND EFFICIENT GHOST FLUID METHOD FOR TWO-DIMENSIONAL COMPRESSIBLE MULTIMEDIUM FLOWS

*Zhixin Huo*<sup>1,\*</sup>, *Jiequan Li*<sup>2,\*\*</sup>, *Zupeng Jia*<sup>3,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing, China

<sup>2</sup>Academy of Multidisciplinary Studies, Capital Normal University, Beijing, China

<sup>3</sup>Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

E-mail: huozhixin20@gceaep.ac.cn<sup>\*</sup>, jiequan@cnu.edu.cn<sup>\*\*</sup>, zpjia@iapcm.ac.cn<sup>\*\*\*</sup>

The ghost fluid states defined by the Riemann problem (RP)-based ghost fluid method (GFM) are constantly distributed, in other words, the spatial derivatives of them along the normal direction of the material interface are zero. This drawback results in many problems, such as mismatch errors along the normal direction of the interface, and the effects of the source terms (i. e., the tangential terms of the transformed equations) can't be reflected. In order to remedy this drawback, we develop a generalized Riemann problem (GRP)-based GFM to provide a kind of linearly distributed ghost fluid states. In our new method, the real fluid states near the interface are revised by the middle states of the associated RP of a local double-medium GRP along the normal direction, and the spatial derivatives of them are revised by the slopes of the middle states of the local double-medium GRP. The initial linearly distributed states of the local double-medium GRP are obtained by weighted least squares fitting using the fluid states of the cells fully contained in the real fluid regions. Then we extend the revised fluid states and the spatial derivatives of them to the ghost fluid regions by linear and constant extrapolation, respectively. Compared with the RP-based GFM, the advantages of our GRP-based GFM are as follows.

1) As the slopes of the middle states of the local double-medium GRP are obtained by the continuity of the normal material derivatives of pressure and normal velocity, so the mismatch errors near the interface are nearly eliminated, even for long time simulation.

2) The initial states and middle states of a RP are constantly distributed, and they can't reflect the effects of the source terms, while the initial states and middle states of a GRP are linearly distributed, and they can reflect the effects of the source terms.

3) Our GRP-based GFM can better reflect the thermodynamical properties of compressible mediums, thus reduce the overheating and underheating errors.

What's more, the traditional way to extend the ghost fluid states are solving the Eikonal equations iteratively, which has to traverse the cells in the ghost fluid regions 20 to 30 times per time step, so the computational efficiency is very low. On the contrary, in our GRP-based GFM the ghost fluid states and the spatial derivatives of them are extended using the constant and linear extrapolation respectively, which only have to traverse the cells in the ghost fluid regions once per time step, thus the computational efficiency is improved substantially. The results of several typical tests demonstrate the accuracy, robustness and efficiency of our new method.

### References

1. **Zhixin Huo.** A GRP-based high resolution ghost fluid method for compressible multi-medium fluid flows I: one-dimensional case [Text] / Zhixin Huo, Jiequan Li // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 437. – P. 127506.
2. **Zhixin Huo.** A GRP-based high resolution and efficient ghost fluid method for two-dimensional compressible multi-medium flows [Text] / Zhixin Huo, Jiequan Li and Zupeng Jia // submitted to Communications in Computational Physics.

---

6-9

## ДВА НОВЫХ КОНТАКТНЫХ 3D-АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛАГРАНЖЕВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ С СЕТКОЙ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ, В КОТОРОЙ ПЕРЕМЕННЫЕ РАСПРЕДЕЛЯЮТСЯ ПО УЗЛАМ И ЯЧЕЙКАМ

*Цзупэн Цзя*

Институт прикладной физики и вычислительной математики, Пекин, Китай

E-mail: zpjia@iapcm.ac.cn

В 2014 году в «Журнале вычислительной физики» была опубликована работа Цзупэн Цзя и соавторов [1], посвященная двум новым контактными 3D-алгоритмам (дискретный точный метод согласования и дискретный метод множителей Лагранжа) для решения задач лагранжевой гидродинамики с сеткой расчетной схемы, в которой переменные распределяются по узлам и ячейкам. В качестве основы для этих контактных алгоритмов использовался универсальный контактный алгоритм поиска контакта. Контактные сегменты всех возможных контактных поверхностей рассматриваются как одно множество. Новые методы были разработаны на базе одной общей идеи. Во-первых, все контактные сегменты должны быть разбиты на треугольные грани. Далее в каждой паре двух треугольных граней, которые соответствуют «ударяющему» узлу и «целевому» узлу, две треугольные грани проецируются на одну плоскость, а потом рассчитывается область пересечения этих граней. Узловые массы и узловые силы «ударяющего» узла и «целевого» узла распределяются по частям области пересечения этих двух треугольных граней в зависимости от соотношения области пересечения и соответствующей узловой области. Исходя из дискретного точного метода согласования, массы и силы частей области пересечения этих двух треугольных граней добавляются к соответствующим контактным узлам каждой из них, затем корректируются значения ускорения и скорости контактных узлов. Согласно дискретному методу множителей Лагранжа, части области пересечения двух указанных треугольных граней рассматриваются в качестве одномерной контактной пары в перпендикулярном направлении, кон-

тактная сила которой рассчитывается в явном виде методом множителей Лагранжа для одномерной контактной пары одной точки «ударяющего» узла и одной точки «целевого» узла. Далее контактная сила добавляется к соответствующим контактным узлам. Новые контактные алгоритмы оценивались в нескольких численных исследованиях на трехмерных структурированных и неструктурированных сетках. Полученные результаты подтверждают точность и надежность этих новых методов.

### Литературы

1. **Zupeng Jia.** Two new three-dimensional contact algorithms for staggered Lagrangian Hydrodynamics [Text] / Zupeng Jia, Xiangfei Gong, Shudao Zhang, Jun Liu // Journal of Computational Physics. – 2014. – Vol. 267. – P. 247–285.

## TWO NEW THREE-DIMENSIONAL CONTACT ALGORITHMS FOR STAGGERED LAGRANGIAN HYDRODYNAMICS

*Zupeng Jia*

Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing, China

E-mail: zpjia@iapcm.ac.cn

In 2014, Zupeng Jia et al presented two new three-dimensional contact algorithms for staggered Lagrangian Hydrodynamics, named discrete accurate matching method and discrete Lagrangian multiplier method [1]. These new contact algorithms utilize the unified contact algorithm for contact searching. Contact segments from all potential contact surfaces are treated as a single set. The basic idea of these new methods is to partition all contact segments into triangular facets firstly; then for each pair of two triangular facets which correspond to a hitting node and a target node respectively, these two triangular facets are projected to one plane and their intersection area is calculated; the nodal masses and nodal forces of the hitting node and the target node are distributed to the intersection portions of these two triangular facets respectively according to the proportion of the intersection area to corresponding nodal area. In the discrete accurate matching method, the masses and forces of the intersection portions of these two triangular facets are added to corresponding contact nodes of each other, then the accelerations and velocities of the contact nodes are updated; while in the discrete Lagrangian multiplier method, the intersection portions of these two triangular facets are considered as a 1D contact pair in the normal direction for which the contact force is explicitly calculated by the Lagrangian multiplier method for a 1D contact pair of one hitting point and one target point, then the contact force is added to corresponding contact nodes. These new contact algorithms are assessed through several numerical tests performed on three-dimensional structured and unstructured meshes. The results of these tests show the accuracy and robustness of these new methods.

### References

1. **Zupeng Jia.** Two new three-dimensional contact algorithms for staggered Lagrangian Hydrodynamics [Text] / Zupeng Jia, Xiangfei Gong, Shudao Zhang, Jun Liu // Journal of Computational Physics. – 2014. – Vol. 267. – P. 247–285.
-

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ОБРАБОТКИ КРИВЫХ МАЛОУГЛОВОГО РЕНТГЕНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ПОРОШКОВОМ ДИФРАКТОМЕТРЕ

*А. Р. Бакиров, А. В. Станкевич*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В настоящее время метод малоуглового рентгеновского рассеяния используется для решения целого ряда задач, начиная от определения структуры белков, заканчивая исследованием процессов горения и детонации. Общепринятым оборудованием для проведения данных экспериментов являются малоугловые дифрактометры и станции на синхротронных источниках излучения (СИ), где соблюдаются все требования для регистрации кривых МУРР.

Обработка данных МУРР сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1]:

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) y(s) ds.$$

Уравнение для системы полидисперсных частиц одинаковой формы,

$$I(s) = \int_0^\infty V^2(R) i_0(sR) D_N(R) dr,$$

где  $V(R)$  – объем частицы;  $i_0(sR)$  – формфактор частицы;  $D_N(R)$  – искомая объемная функция распределения частиц по размерам.

Так как регистрируемая кривая  $I(s)$  содержит погрешности, в виде ошибок измерений, коллимационных искажений, решение данного уравнения представляет собой типичную некорректную задачу и требует регуляризации решения.[2]

Подходы [2, 3] были применены для анализа кривых рассеяния в работе [4] для подтверждения достоверности полученных результатов обработки. Рассчитанные функции распределения неоднородностей пористых стекол в достаточной степени соответствуют результатам работы.

Проведены исследования порошков различных форм углеродных материалов на лабораторном дифрактометре. Метод регуляризации позволил устранить фоновое рассеяние, недостатки геометрии регистрации данных, получить функции распределения неоднородностей.

### Литература

1. **Тихонов, А. Н.** Методы решения некорректных задач [Текст]: 2-е изд. / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979.
2. **Свергун, Д. И.** Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние [Текст] / Д. И. Свергун, Л. А. Фейгин. – М. : Наука, 1986. – 279 с.
3. **ГОСТ Р 8.698-2010.** Государственная система обеспечения единства измерений (ГСИ). Размерные параметры наночастиц и тонких пленок. Методика выполнения измерений с помощью малоуглового рентгеновского дифрактометра [Текст].
4. **Dawidowicz, A. L.** Application of smallangle x-ray scattering (SAXS) method to the investigation of heterogeneity in porous glasses [Text] / A. L. Dawidowicz, S. Pikus // Applications of Surface Science. – 1983. – Vol. 17. – P. 45–52.

# REGULARIZATION METHOD FOR PROCESSING SMALL-ANGLE X-RAY SCATTERING CURVES OBTAINED USING X-RAY POWDER DIFFRACTION SYSTEM

*A. R. Bakirov, A. V. Stankevich*

FSUE "Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics",  
Snezhinsk, Russia

The small-angle X-ray scattering (SAXS) method is currently used to solve a number of problems starting from determination of protein structure through investigation into combustion and detonation processes. Small-angle diffraction systems and stations based on synchrotron radiation sources are commonly used to conduct such experiments since they offer opportunity to comply with all the requirements to record SAXS curves.

The SAXS data are processed by solving the Fredholm integral equation of first kind [1]:

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)y(s) ds.$$

The equation for a system of polydisperse particles of similar shape is as follows:

$$I(s) = \int_0^\infty V^2(R)i_0(sR)D_N(R)dr,$$

where  $V(R)$  is the particle volume,  $i_0(sR)$  is the particle form-factor, and  $D_N(R)$  is the desired bulk function of particle distribution by size.

Since the recorded curve  $I(s)$  contains errors as measurement errors and collimation distortions, the solution of this equation represents a typical incorrect problem requiring a regularized solution [2].

The approaches [2, 3] have been applied to analyze the scattering curves from [4] to validate the obtained processing results. The calculated functions of heterogeneity distribution in porous glasses are in a sufficiently good agreement with the results presented in the above paper.

The powders made of carbon materials of different forms have been analyzed using the laboratory diffraction system. The regularization method has allowed eliminating background scattering and shortcomings in data recording geometry, as well as obtaining heterogeneity distribution functions.

## References

1. **Tikhonov, A. N.** Methods of solving incorrect problems [Text] : 2nd edition / A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin. – M. : Nauka, 1979 (in Russian).
  2. **Svergun, D. I.** Small-angle X-ray and neutron scattering [Text] / D. I. Svergun, I. A. Feigin. – M. : Nauka, 1986. – 279 p. (in Russian).
  3. **GOST R 8.698-2010.** State system for ensuring the uniformity of measurements. Dimensional parameters of nanoparticles and thin films. Method of measurement by means of a small-angle X-ray scattering diffractometer [Text] (in Russian).
  4. **Dawidowicz, A. L.** Application of smallangle x-ray scattering (SAXS) method to the investigation of heterogeneity in porous glasses [Text] / A. L. Dawidowicz, S. Pikus // Applications of Surface Science. – 1983. – Vol. 17. – P. 45–52.
-

## ПРИМЕНЕНИЕ СХОДЯЩИХСЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*С. П. Баутин, О. А. Карелина*

Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск, Россия

Более двухсот лет назад Ж. Б. Ж. Фурье предложил решать линейное уравнение теплопроводности с помощью сходящегося тригонометрического ряда. В последующие годы этот метод решения линейных уравнений с частными производными стал очень востребованным. К сожалению эффективность тригонометрических рядов Фурье и более поздних обобщений этого подхода имеет место только при решении линейных задач. В этом случае бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых коэффициентов перед гармониками расщепляется и для каждого коэффициента получается одно свое уравнение. Оно обычно решается в явном виде, что позволяет построить все бесконечное разложение и доказать его сходимости.

Чуть более десяти лет назад, то есть после двухсотлетнего перерыва после работ Ж. Б. Ж. Фурье, методика применения бесконечных тригонометрических рядов была эффективно применена для математического моделирования одномерных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа при построении решений нелинейной системы уравнений с частными производными смешанного типа [1]. Однако доказать сходимости построенных тригонометрических рядов тогда не удавалось. Недавно удалось доказать сходимости тригонометрических рядов, решающих одно нелинейное уравнение с частными производными – уравнение Бюргерса [2]. В данной работе предложенная методика представлений решений нелинейных уравнений в виде бесконечных тригонометрических рядов применена для описания решений системы из двух нелинейных уравнений с двумя независимыми пространственными переменными – уравнений движения сплошной среды. После подстановки используемых представлений в исходную систему уравнений движения и последующего проецирования двух получившихся уравнений на тригонометрический базис получается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для искомых коэффициентов рядов, зависящих от времени. Система записана в нормальной форме и в правые части каждого уравнения из этой бесконечной системы входит бесконечное число искомых функций. Благодаря конкретным свойствам решений полученных бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказана теорема о сходимости бесконечных тригонометрических рядов в некоторой окрестности точки  $t = 0$  и при всех значениях независимых переменных  $x, y$ . Также доказана теорема о кратных частотах в рассматриваемом случае двух независимых пространственных переменных. Теорема о кратных частотах не имеет места в случае представления с помощью тригонометрических рядов решений линейных уравнений, поскольку в решении линейных уравнений при  $t > 0$  присутствуют только те гармоники, которые есть в начальных условиях при  $t = 0$ . Новые гармоники в решениях линейных уравнений не возникают. В случае нелинейных систем уравнений с частными производными в решении при  $t > 0$  появляются гармоники с новыми частотами, не совпадающими с частотами гармоник в начальных условиях. Доказанная теорема о кратных частотах установила по сравнению с одномерным случаем более сложную зависимость между частотами гармоник, присутствующих в начальных условиях, и частотами гармоник, входящих в решение при  $t > 0$ . Из теоремы следует, что в данном случае частоты разделены как по независимым переменным, так и по направлениям распространения гармоник. Новая теорема о кратных частотах не отменяют, а только еще раз подтверждает наличие так называемого «немного аккорда», имеющего места в музыкальных произведениях.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа [Текст] / С. П. Баутин, В. Е. Замыслов, П. П. Скачков. – Новосибирск : Наука, 2014.

2. **Баутин, С. П.** Сходимость бесконечных тригонометрических рядов, решающих уравнение Бюргера [Текст] / С. П. Баутин, В. Е. Замыслов. – Снежинск : СФТИ, 2022.

## APPLICATION OF CONVERGENT TRIGONOMETRIC SERIES FOR SOLVING A SYSTEM OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

*S. P. Bautin, O. A. Karelina*

Snezhinsky Institute of Physics and Technology of NRU MEPhI, Snezhinsk, Russia

More than two hundred years ago, J. B. J. Fourier proposed to solve the linear equation of thermal conductivity using a convergent trigonometric series. In the following years, this method of solving linear partial differential equations became very popular. Unfortunately, the effectiveness of trigonometric Fourier series and later generalizations of this approach takes place only when solving linear problems. In this case, an infinite system of ordinary differential equations for the desired coefficients before harmonics is split and one equation is obtained for each coefficient. It is usually solved explicitly, which makes it possible to construct the entire infinite decomposition and prove its convergence.

A little more than ten years ago, that is, after a two-hundred-year break after the work of J. B. J. Fourier, the technique of using infinite trigonometric series was effectively applied for mathematical modeling of one-dimensional flows of compressible viscous heat-conducting gas in the construction of solutions to a nonlinear system of partial differential equations of mixed type [1]. However, it was not possible to prove the convergence of the constructed trigonometric series at that time. Recently, it was possible to prove the convergence of trigonometric series solving one nonlinear partial differential equation – the Burgers equation [2]. In this paper, the proposed method of representing solutions of nonlinear equations in the form of infinite trigonometric series is used to describe solutions of a system of two nonlinear equations with two independent spatial variables – equations of motion of a continuous medium. After substituting the representations used into the original system of equations of motion and then projecting the two resulting equations onto a trigonometric basis, an infinite system of ordinary differential equations for the desired time-dependent series coefficients is obtained. The system is written in normal form and the right-hand sides of each equation from this infinite system include an infinite number of desired functions. Due to the specific properties of the solutions of the obtained infinite systems of ordinary differential equations, the theorem on the convergence of infinite trigonometric series in some neighborhood of the point  $t = 0$  and for all values of the independent variables  $x, y$  is proved. The theorem on multiple frequencies in the considered case of two independent spatial variables is also proved. The multiple frequency theorem does not hold in the case of representing solutions of linear equations using trigonometric series, since only those harmonics that exist in the initial conditions at  $t = 0$  are present in the solution of linear equations at  $t > 0$ . New harmonics do not arise in solutions of linear equations. In the case of nonlinear systems of partial differential equations, harmonics with new frequencies that do not coincide with the frequencies of harmonics in the initial conditions appear in the solution at  $t > 0$ . The proved theorem on multiple frequencies established, in comparison with the one-dimensional case, a more complex relationship between the frequencies of harmonics present in the initial conditions and the frequencies of harmonics included in the solution at  $t > 0$ . It follows from the theorem that in this case the frequencies are separated both by independent variables and by the directions of propagation of harmonics. The new theorem on multiple frequencies does not cancel, but only once again confirms the presence of the so-called “silent chord” that has a place in musical works.

### References

1. **Bautin, S. P.** Mathematical modeling of trigonometric series of one-dimensional flows of viscous heat-conducting gas [Text] / S. P. Bautin, V. E. Zamyslov, P. P. Skachkov. – Novosibirsk : Nauka, 2014.
2. **Bautin, S. P.** Convergence of infinite trigonometric series solving the Burgers equation [Text] / S. P. Bautin, V. E. Zamyslov. – Snezhinsk : SFTI, 2022.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНТЕЙНЕРА И МАССИВА ОКРУЖАЮЩИХ ПОРОД

*И. О. Боровский*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В настоящее время для изоляции радиоактивных отходов от биосферы рассматривается их размещение в пунктах глубинного захоронения (ПГЗРО). Целью создания объекта окончательной изоляции является экологически безопасное и экономически приемлемое окончательное удаление долгоживущих радиоактивных отходов (РАО) от переработки отработанного ядерного топлива (ОЯТ), которые будут размещаться в контейнерах в подземных вертикальных скважинах, на глубине от 450 до 525 м (рис. 1).

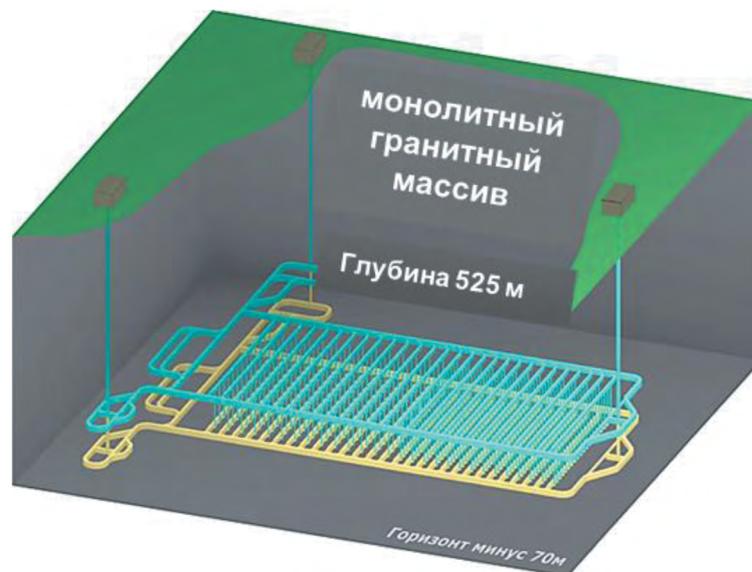


Рис. 1. Схема расположения РАО в ПГЗРО

В процессе хранения ограниченный отвод тепла от РАО приводит к разогреву контейнеров и вмещающей породы [1–5]. Предварительные численные расчеты теплового состояния массива вмещающих пород в процессе заполнения камер показали, что максимальная температура достигается в период (50–70) лет с начала заполнения ПГЗРО и наблюдается в центральных скважинах 8-й камеры [6].

Для уточнения теплового и напряженного состояния в области данной скважины разработана конечно-элементная модель контейнера с детальным описанием всех инженерных барьеров. В результате сделан переход от большой модели, не учитывающей особенности геометрии контейнера, к подмодели, учитывающей особенности конструкции контейнера.

По результатам расчетов, сделан вывод, что инженерные барьеры контейнера обладают достаточным запасом прочности.

### Литература

1. **Татаринов, В. Н.** Влияние температуры на изоляционные свойства породных массивов при захоронении радиоактивных отходов [Текст] / В. Н. Татаринов, В. Н. Морозов, А. И. Каган, В. А. Пятюгин // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2015. – № 8. – С. 338–344.

2. **Jobmann, M.** Site-specific evaluation of safety issues for high-level waste disposal in crystalline rocks: Final report [Text] / M. Jobmann, J. Flügge, J. Hammer et al. – TEC-28-2015-AB. – 2016. – P. 181.
3. **Дробышевский, Н. И.** Трехмерное численное моделирование теплового состояния пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов в Нижнеканском массиве горных пород [Текст] / Н. И. Дробышевский, Е. В. Моисеенко, Р. А. Бутов, Ю. Н. Токарев // Радиоактивные отходы. – 2017. – № 1. – С. 64–73.
4. **Морозов, В. Н.** Подземная исследовательская лаборатория и сейсмические аспекты безопасности [Текст] / В. Н. Морозов, В. Н. Татаринев, В. И. Кафтан, А. И. Маневич // Радиоактивные отходы. – 2018. – № 3 (4). – С. 16–29.
5. **Мартынов, К. В.** Анализ локализации и сценария эволюции ПГЗРО на участке «Енисейский» [Текст] / К. В. Мартынов, Е. В. Захарова // Радиоактивные отходы. – 2018. – № 2 (3). – С. 52–62.
6. **Абрамов, А. В.** Аналитическое и численное моделирование теплового и напряженного состояния пункта глубинного захоронения радиоактивных отходов [Текст] / А. В. Абрамов, А. П. Бекетов, Г. Н. Рыкованов, А. Н. Хрулев, А. О. Чернявский // Препринт № 261. – Снежинск: Изд-во РФЯЦ – ВНИИТФ, 2019. – С. 36.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE THERMAL AND STRESSED STATE OF A CONTAINER AND SURROUNDING ROCK MASSIF

*I. O. Borovskiy*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

Currently, storage of radioactive waste (RW) in geological repositories is considered as an efficient way to isolate RW from the biosphere. The purpose of creating an ultimate RW isolation facility is the environmentally safe and cost-effective ultimate disposal of long-lived radioactive waste resulting from the reprocessing of spent nuclear fuel (SNF), which will be stored in containers in underground vertical wells at the depth of 450–525 m (Fig. 1).

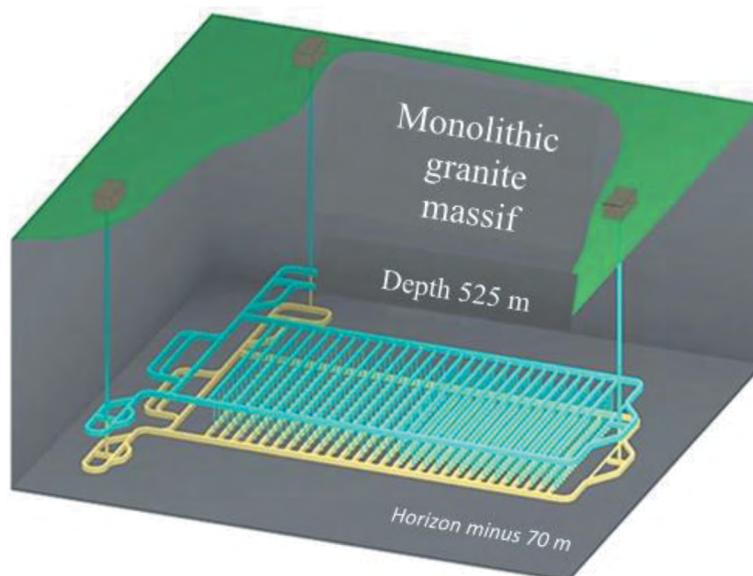


Fig. 1. Layout of RW storage in geological repositories

During storage, limited heat removal from RW leads to heating of containers and the surrounding rock formations [1–5]. The preliminary numerical calculations of the thermal state of the surrounding rock massif

in the process of filling the storage cells with RW show that the maximum temperature is reached in the period of 50–70 years from the beginning of filling the geological repositories and is observed in the central wells of the 8th storage cell [6].

To refine the data on the thermal and stressed state in the area of the considered well, a finite-element model of a container with a detailed description of all engineering barriers has been developed. As a result, a transition has been made from a large-scale model that does not take into account the features of the container geometry to a submodel that accounts for the specific features of the container design.

Based on the results calculations, it was concluded that the engineering barriers of the container have a sufficient safety factor.

### References

1. **Tatarinov, V. N.** Influence of temperature on isolating properties of rock massifs during the burial of radioactive waste [Text] / V. N. Tatarinov, V. N. Morozov, A. I. Kagan, V. A. Pyatygin // Mining information and analytical bulletin (scientific and technical journal). – 2015. – No. 8. – P. 338–344.
2. **Jobmann, M.** Site-specific evaluation of safety issues for high-level waste disposal in crystalline rocks: Final report [Text] / M. Jobmann, J. Flügge, J. Hammer et al. – TEC-28-2015-AB. – 2016. – P. 181.
3. **Drobyshevsky, N. I.** 3D numerical simulation of the thermal state of the RW geological repository in the Nizhnekamenskii rock massif [Text] / N. I. Drobyshevsky, E. V. Moiseenko, R. A. Butov, Yu. N. Tokarev // Radioactive Waste. – 2017. – No. 1. – P. 64–73.
4. **Morozov, V. N.** Underground research laboratory and seismic aspects of safety [Text] / V. N. Morozov, V. N. Tatarinov, V. I. Kaftan, A. I. Manevich // Radioactive Waste. – 2018. – No. 3 (4). – P. 16–29.
5. **Martynov, K. V.** Analysis of the localization and the evolution scenario of RW geological repositories at the “Yeniseiskii” site [Text] / K. V. Martynov, E. V. Zakharova // Radioactive Waste. – 2018. – No. 2 (3). – P. 52–62.
6. **Abramov, A. V.** Analytical and numerical simulation of the thermal and stressed state of a RW geological repository [Text] / A. V. Abramov, A. P. Beketov, G. N. Rykovanov, A. N. Khrulyov, A. O. Chernyavskii // Preprint No. 261. – Snezhinsk : RFNC – VNIITF Press, 2019. – P. 36.

---

6-13

## БИКОМПАКТНЫЕ СХЕМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНЫХ И ВЯЗКИХ ГАЗОВ

*М. Д. Брагин*

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

Бикомпактные схемы – это конечно-объемные-конечно-разностные схемы с компактной аппроксимацией пространственных производных на шаблоне, включающем два целых узла по каждому измерению. Высокий порядок аппроксимации по пространству (четвертый, шестой, восьмой) достигается за счет введения дополнительных искомым функций. Эти сеточные функции определяются в исходных целых узлах [1] либо во вспомогательных дробных узлах [2]. Для замыкания системы разностных уравнений привлекаются конечно-разностные аппроксимации дифференциальных следствий решаемого уравнения (или системы уравнений) в частных производных. Само же оно дискретизируется методом конечных объемов. В рамках метода прямых аппроксимации по времени и пространству строятся независимо друг от друга. Для интегрирования по времени применяются методы Рунге–Кутты.

Бикомпактные схемы обладают несколькими достоинствами: устойчивость в широком диапазоне чисел Куранта (за счет неявной аппроксимации по времени); экономичность (благодаря реализации двухточечными прогонками); совпадение числа граничных условий в дифференциальной и разностной постановках задачи (из-за минимального шаблона); лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими компактными схемами [3].

В докладе представлен обзор результатов, полученных при тестировании бикомпактных схем на задачах механики газа. Описываются основные принципы построения бикомпактных схем для гиперболических [4] и параболических [5] уравнений. Приводятся результаты расчетов многомерных задач для уравнений Эйлера, в том числе о взаимодействующих ударных волнах [6]. Демонстрируются возможности бикомпактных схем при расчетах задач о распространении детонационных волн в невязком газе [7]. Рассматриваются бикомпактные схемы для уравнений Навье–Стокса (с учетом сжимаемости и теплопроводности). Анализируется качество этих схем при моделировании течений, в которых ударные волны и вихри присутствуют одновременно и взаимодействуют между собой. Проводится сравнение с другими современными схемами высокого порядка. Обсуждаются преимущества бикомпактных схем.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 21-11-00198).

### Литература

1. **Рогов, Б. В.** О сходимости компактных разностных схем [Текст] / Б. В. Рогов, М. Н. Михайловская // Матем. моделирование. – 2008. – Т. 20, № 1. – С. 99–116.
2. **Рогов, Б. В.** Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа [Текст] / Рогов Б. В., Михайловская М. Н. // Матем. моделирование. – 2011. – Т. 23, № 12. – С. 65–78.
3. **Rogov, B. V.** Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicomcompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations [Text] // Appl. Numer. Math. – 2019. – Vol. 139. – P. 136–155.
4. **Bragin, M. D.** Conservative limiting method for high-order bicomcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations [Text] / M. D. Bragin, B. V. Rogov // Appl. Numer. Math. – 2020. – Vol. 151. – P. 229–245.
5. **Bragin, M. D.** High-order bicomcompact schemes for the quasilinear multidimensional diffusion equation [Text] // Appl. Numer. Math. – 2022. – Vol. 174. – P. 112–126.
6. **Брагин, М. Д.** Неявно-явные бикомпактные схемы для гиперболических систем законов сохранения [Текст] // Матем. моделирование. – 2022. – Т. 34, № 6. – С. 3–21.
7. **Брагин, М. Д.** Высокоточные бикомпактные схемы для численного моделирования течений многокомпонентных газов с несколькими химическими реакциями [Текст] / М. Д. Брагин, Б. В. Рогов // Матем. моделирование. – 2020. – Т. 32, № 6. – С. 21–36.

## BICOMPACT SCHEMES AND THEIR APPLICATION TO NUMERICAL MODELING IN DYNAMICS OF IDEAL AND VISCOUS GASES

*M. D. Bragin*

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

Bicomcompact schemes are finite-volume-finite-difference schemes with a compact approximation of spatial derivatives on a template that includes two integer nodes in each dimension. A high order of approximation in space (fourth, sixth, eighth) is achieved by introducing additional sought functions. These grid functions are defined at original integer nodes [1] or at auxiliary fractional nodes [2]. To close the system of difference equations, finite-difference approximations of the differential consequences of the governing partial differential equation (or system of equations) are added. It itself is discretized by the finite-volume method.

Within the method of lines framework, approximations in time and space are constructed independently. Runge–Kutta methods are used for time integration.

Bicompact schemes have several advantages: stability over a wide range of Courant numbers (due to implicit time stepping); efficiency (due to the implementation by two-point sweeps); the same number of boundary conditions in the differential and discrete formulations of the problem (due to the minimal template); better spectral resolution compared to classical compact schemes [3].

An overview of the results obtained in testing bicompact schemes on problems of gas mechanics is presented. The main principles of constructing bicompact schemes for hyperbolic [4] and parabolic [5] equations are described. The results for calculations of multidimensional problems for Euler equations, including those for interacting shock waves [6], are presented. Capabilities of bicompact schemes are demonstrated on problems of detonation wave propagation in an inviscid gas [7]. Bicompact schemes for Navier–Stokes equations are considered (with compressibility and heat conductivity taken into account). The quality of these schemes is analyzed when modeling flows in which shock waves and vortices are present simultaneously and interact with each other. A comparison is made with other modern high-order schemes. Superiorities of bicompact schemes are discussed.

This study was supported by a grant from the RSF (project no. 21-11-00198).

### References

1. **Rogov, B. V.** On the convergence of compact difference schemes [Text] / B. V. Rogov, M. N. Mikhailovskaya // *Math. Models Comput. Simul.* – 2009. – Vol. 1, No. 1. – P. 91–104.
2. **Rogov, B. V.** Monotone high-precision compact scheme for quasilinear hyperbolic equations [Text] / B. V. Rogov, M. N. Mikhailovskaya // *Math. Models Comput. Simul.* – 2012. – Vol. 4, No. 4. – P. 375–384.
3. **Rogov, B. V.** Dispersive and dissipative properties of the fully discrete bicompact schemes of the fourth order of spatial approximation for hyperbolic equations [Text] // *Appl. Numer. Math.* – 2019. – Vol. 139. – P. 136–155.
4. **Bragin, M. D.** Conservative limiting method for high-order bicompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations [Text] / M. D. Bragin, B. V. Rogov // *Appl. Numer. Math.* – 2020. – Vol. 151. – P. 229–245.
5. **Bragin, M. D.** High-order bicompact schemes for the quasilinear multidimensional diffusion equation [Text] // *Appl. Numer. Math.* – 2022. – Vol. 174. – P. 112–126.
6. **Bragin, M. D.** Implicit-explicit bicompact schemes for hyperbolic systems of conservation laws [Text] // *Math. Models Comput. Simul.* – 2023. – Vol. 15, No. 1. – P. 1–12.
7. **Bragin, M. D.** High-order bicompact schemes for numerical modeling of multispecies multi-reaction gas flows [Text] / M. D. Bragin, B. V. Rogov // *Math. Models Comput. Simul.* – 2021. – Vol. 13, No. 1. – P. 106–115.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА

*А. А. Бугаенко<sup>1,2</sup>, И. Ю. Крутова<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, Россия

Природные восходящие закрученные потоки (ВЗП): торнадо, тропические циклоны, огненные вихри представляют собой сложные и еще достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надежное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики (СУГД) при учете действия сил тяжести и Кориолиса [1]. В силу нелинейности СУГД построение ее решений является достаточно трудоемким. Это и послужило причиной линеаризации СУГД на ее точных решениях [2].

В докладе приведена линеаризованная на этом точном решении СУГД при учете силы Кориолиса. Численное решение системы при соответствующих начальных и граничных условиях, проводилось в расчетной области в виде прямоугольного параллелепипеда, размеры которого соответствуют размерам среднего по интенсивности циклона [3]. Его нижняя грань совпадает с поверхностью Земли. Через квадратное отверстие в центре верхней грани расчетной области моделируется вертикальный плавный продув воздуха.

За начальные условия принимаются соотношения, описывающие покоящийся атмосферный воздух, которые являются точным аналитическим решением линеаризованной системы.

Граничные условия для искомых 4 функций выбираются в предположении, что газ из расчетной области может выходить только через ту часть верхней грани, где осуществляется продув, а входит только через боковые грани.

Все компоненты вектора скорости на четырех боковых гранях рассчитываются из условия непрерывности. Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчетной области.

В докладе анализируется поведение скорости звука и трех компонент вектора скорости газа на различных высотах и в разные моменты времени.

Вблизи геометрического центра расчетной области возникают встречные и разведенные в пространстве потоки газа, что равносильно возникновению вокруг вертикальной оси закрученного в положительном направлении движения частиц газа.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2020. – 400 с.
2. **Баутин, С. П.** Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова. – Снежинск : СФТИ, 2019. – 60 с.
3. **Баутин, С. П.** Скорость звука в многокомпонентной покоящейся среде [Текст] // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 3. – С. 35–44.

## NUMERICAL SIMULATION OF RISING SKEWED STREAMS BY LINEARIZED HYDRODYNAMICS EQUATIONS WITH CORIOLIS FORCE

*A. A. Bugaenko<sup>1,2</sup>, I. Y. Krutova<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>MEPI National Nuclear Research University’s Snezhinsk Physicotechnical Institute, Snezhinsk, Russia

The naturally rising skewed streams – tornado, tropical cyclones, or fire whirls – are sophisticated and still poorly understood phenomena as to their initiation and duration. A sound theoretical consideration of these phenomena is only possible through the use of a system of hydrodynamics equations which include gravity and Coriolis force [1]. The system is nonlinear and hence difficult to solve. Just this is the reason for our linearization of the system on the basis of its exact solutions [2].

The paper presents a linearized system of hydrodynamics equations with Coriolis force. The system with appropriate initial and boundary conditions was solved in a domain defined as a box whose size

corresponded to that of a cyclone of a moderate intensity [3]. The lower plane of the box coincides with the Earth surface. Its upper plane has a square hole through which the air is vertically blown.

The initial conditions are relationships which describe atmospheric air at rest; they are the exact analytical solution of the linearized system.

The boundary conditions for the sought 4 functions are chosen from the assumption that gas leaves the box only through the hole in its upper plane and enters it only through its side planes.

All velocity vector components on the four side planes are calculated from the continuity condition. This means that air is allowed to pass through all side boundaries.

We analyze the behavior of the sound velocity and three components of the gas velocity vector at different altitudes and times.

Near the geometrical center of the domain, there appear counter and spatially separated gas flows, which is equivalent to the formation of a positively skewed stream of gas around the vertical axis.

### References

1. **Bautin, S. P.** Hydrodynamics of skewed upward streams [Text] / S. P. Bautin, I. Y. Krutova, and A. G. Obukhov. – Yekaterinburg : Ural State University Press, 2020. – 400 p.
2. **Bautin, S. P.** A linearized system of hydrodynamics equations with Coriolis force [Text] / S. P. Bautin, and I. Y. Krutova. – Snezhinsk : Engineering Physics Institute, 2019. – 60 p.
3. **Bautin, S. P.** Sound velocity in multicomponent media at rest [Text] // J. Applied Mechanics and Engineering Physics. – 2008. – Vol. 49, No. 3. – P. 35–44.

---

6-15

## О РАБОТАХ ПРОФЕССОРА А. Д. ГАДЖИЕВА В РФЯЦ – ВНИИТФ

*Э. М. Вазиев, С. Ю. Кузьмин, С. Н. Лебедев, Е. М. Романова, Л. В. Соколов, А. А. Шестаков*  
ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Доклад посвящен восьмидесятипятилетнему юбилею профессора А. Д. Гаджиева и содержит краткий обзор его работ. Ахмед Далгатович Гаджиев проработал в РФЯЦ – ВНИИТФ более 60 лет, с 1960 по 2022 годы. За это время под его руководством и при его непосредственном участии было создано множество численных методик и комплексов программ, предназначенных для решения уравнений математической физики.

Первые работы А. Д. Гаджиева были посвящены решению уравнения переноса нейтронов (см., например, [1]). Затем появились работы, связанные с решением уравнений газовой динамики, теплопроводности [2–7] и переноса излучения в различных приближениях [8–11]. В большинстве работ используются схемы «ромбического» типа, которые занимают особое место в работах А. Д. Гаджиева.

За время работы в РФЯЦ – ВНИИТФ А. Д. Гаджиевым в соавторстве с учениками было написано около 200 научных работ, посвященных созданию численных методов и обоснованию их свойств. Порядка 40 работ было опубликовано в различных журналах. Значительная часть созданных методов продолжает использоваться и развиваться в математическом отделении РФЯЦ – ВНИИТФ.

### Литература

1. **Гаджиев, А. Д.** О численном решении двумерного уравнения переноса в криволинейных координатах [Текст] / А. Д. Гаджиев, О. С. Широковская. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1976. – Т. 16, № 6. – С. 1605–1609; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1976. – Vol. 16, No. 6. – P. 222–226.
2. **Гаджиев, А. Д.** Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. Н. Писарев // Ж. вычисл. матем.

и матем. физ. – 1979. – Т. 19, № 5. – С. 1288–1303; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1979. – Vol. 19, No. 5. – P. 202–219.

3. **Гаджиев, А. Д.** Метод расчета двумерных задач теплопроводности на неортогональных сетках [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. Н. Писарев, А. А. Шестаков // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1982. – Т. 22, № 2. – С. 339–347; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1982. – Vol. 22, No. 2. – P. 91–100.

4. **Гаджиев, А. Д.** Явно неявный метод РИД расчета задач газовой динамики [Текст] / А. Д. Гаджиев, С. Н. Лебедев // ВАНТ. – 1987. – Вып. 1. – С. 49–53.

5. **Гаджиев, А. Д.** Неявный конечно-разностный метод РОМБ для решения двумерных уравнений газовой динамики [Текст] / А. Д. Гаджиев, С. Ю. Кузьмин, С. Н. Лебедев, В. Н. Писарев // ВАНТ. – 2001. – Вып. 4. – С. 11–21.

6. **Вазиев, Э. М.** Неявный конечно-объемный метод Ромб для численного решения двумерных уравнений газовой динамики на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек [Текст] / Э. М. Вазиев, А. Д. Гаджиев, С. Ю. Кузьмин // ВАНТ. – 2006. – Вып. 4. – С. 15–28.

7. **Гаджиев, А. Д.** Неявный конечно-объемный метод Ромб для численного решения двумерных уравнений теплопроводности на нерегулярных сетках из треугольных и четырехугольных ячеек [Текст] / А. Д. Гаджиев, С. А. Новаковская, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2007. – Вып. 1. – С. 3–13.

8. **Гаджиев, А. Д.** Метод «Ромб» для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P1 приближении [Текст] / А. Д. Гаджиев, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 1989. – Вып. 3. – С. 66–70.

9. **Гаджиев, А. Д.** Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. Н. Селезнев, Е. М. Романова, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2001. – Вып. 4. – С. 48–59.

10. **Гаджиев, А. Д.** Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов [Текст] / А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, В. Н. Писарев, О. И. Стародумов, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2003. – Вып. 4. – С. 13–24.

11. **Гаджиев, А. Д.** DS<sub>n</sub>-метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. Н. Селезнев, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2003. – Вып. 4. – С. 33–46.

## PROFESSOR A. D. GADZHIEV'S RESEARCH WORK AT RFNC – VNIITF

*E. M. Vaziev, S. Y. Kuzmin, S. N. Lebedev, E. M. Romanova, L. V. Sokolov, A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

The paper celebrates the eighty-fifth jubilee of Professor A. D. Gadzhiev. It gives a brief overview of his research work. Akhmed Gadzhiev worked more than 60 years at RFNC – VNIITF, from 1960 to 2022. During those years he participated in and guided the development of numerous techniques and codes for solving equations of mathematical physics.

Akhmed Gadzhiev started with neutron transport (see, for example, [1]) and then went on to hydrodynamics and radiative heat transfer [2–7] in different approximations [8–11]. Most of his developments are based on diamond-type schemes which take a particular place in his research work.

During his work at RFNC – VNIIT, Gadzhiev published in co-authorship with his fellows about 200 scientific papers devoted to the development of numerical techniques and validation of their properties. About 40 papers were published in different journals. Many of these techniques are still in use and further development at the mathematical division of RFNC – VNIITF.

### References

1. **Gadzhiev, A. D.** Numerical solution of a 2D transport equation in curvilinear coordinates [Text] / A. D. Gadzhiev, and O. S. Shirokovskaya // J. Comp. Math. and Math. Phys. – 1976. – Vol. 16, No. 6. – P. 1605–1609; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1976. – Vol. 16, No. 6. – P. 222–226.

2. **Gadzhiev, A. D.** An implicit finite-difference method ROMB for solving hydrodynamics and heat transfer equations [Text] / A. D. Gadzhiev, and V. N. Pisarev // J. Comp. Math. and Math. Phys. – 1979. – Vol. 19, No. 5. – P. 1288–1303; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1979. – Vol. 19, No. 5. – P. 202–219.
3. **Gadzhiev, A. D.** A method for solving 2D heat transfer on non-orthogonal meshes [Text] / A. D. Gadzhiev, V. N. Pisarev, and A. A. Shestakov // J. Comp. Math. and Math. Phys. – 1982. – Vol. 22, No. 2. – P. 339–347; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1982. – Vol. 22, No. 2. – P. 91–100.
4. **Gadzhiev, A. D.** An explicit-implicit method RID for hydrodynamics equations [Text] / A. D. Gadzhiev, and S. N. Lebedev // VANT. – 1987. – Iss. 1. – P. 49–53.
5. **Gadzhiev, A. D.** An implicit finite-difference method ROMB for solving 2D hydrodynamics equations [Text] / A. D. Gadzhiev, S. Y. Kuzmin, S. N. Lebedev, and V. N. Pisarev // VANT. – 2001. – Iss. 4. – P. 11–21.
6. **Vaziev, E. M.** An implicit finite-volume method ROMB for solving 2D hydrodynamics on unstructured triangular and rectangular meshes [Text] / E. M. Vaziev, A. D. Gadzhiev, and S. Y. Kuzmin // VANT. – 2006. – Iss. 4. – P. 15–28.
7. **Gadzhiev, A. D.** An implicit finite-volume method ROMB for solving 2D heat transfer on unstructured triangular and rectangular meshes [Text] / A. D. Gadzhiev, S. A. Novakovskaya, and A. A. Shestakov // VANT. – 2007. – Iss. 1. – P. 3–13.
8. **Gadzhiev, A. D.** A ROMB method for solving multi-group radiation transport in P1 approximation [Text] / A. D. Gadzhiev, and A. A. Shestakov // VANT. – 1989. – Iss. 3. – P. 66–70.
9. **Gadzhiev, A. D.** A TOM4-KD technique for mathematical modeling of 2D radiation transport equations in a multi-group quasi-diffusion approximation [Text] / A. D. Gadzhiev, V. N. Seleznyov, E. M. Romanova, and A. A. Shestakov // VANT. – 2001. – Iss. 4. – P. 48–59.
10. **Gadzhiev, A. D.** A discrete ordinate method with artificial dissipation (DDAD scheme) for solving neutron transport. VANT [Text] / A. D. Gadzhiev, I. A. Kondakov, V. N. Pisarev, O. I. Starodumov, and A. A. Shestakov // VANT. – 2003. – Iss. 4. – P. 13–24.
11. **Gadzhiev, A. D.** The DS<sub>n</sub> method with artificial dissipation and the VDM iteration acceleration method for solving 2D heat transfer in a kinetic model [Text] / A. D. Gadzhiev, V. N. Seleznyov, and A. A. Shestakov // VANT. – 2003. – Iss.4. – P. 33–46.

## ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАСЧЕТА ИДЕАЛЬНОГО КАСКАДА ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

*О. Е. Александров<sup>1</sup>, В. М. Гадельшин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Уральский Федеральный Университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Разделение смесей с двумя и более компонентами является актуальной задачей современных технологических процессов [1, 2]. Особый интерес в этом вопросе представляют технологии разделения изотопов, важной частью организации которых является построение разделительного каскада. Цель создания каскада, а именно соединения множества единичных разделительных элементов по некоторой схеме, обусловлена малым обогащением при работе одного разделительного элемента и, как следствие, необходимостью многократного повторения процесса разделения для получения желаемой степени обогащения. При этом основным условием выбора схемы соединения каскада становится достижение максимальной эффективности, т. е. получение нужной величины обогащения с помощью минимального числа разделительных элементов. В теории разделения двухкомпонентных, бинарных смесей это условие выполняется для так называемого «идеального» или «несмешивающего» каскада, в котором отсутствует смешение потоков с различной концентрацией.

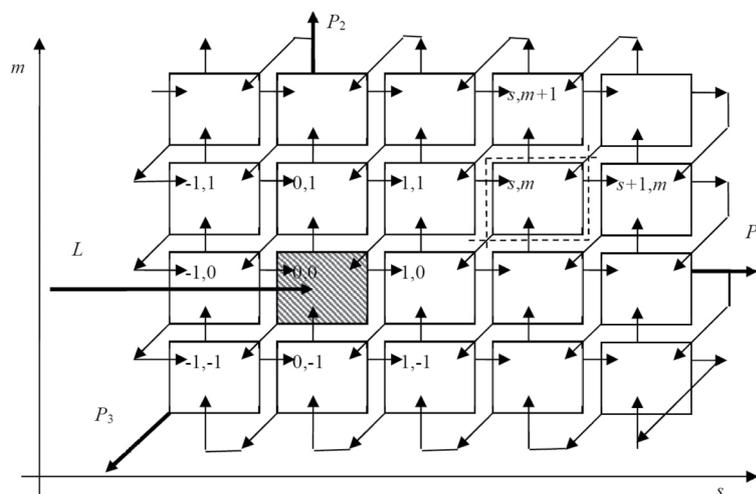


Рис. 1. Схема несмешивающего каскада для разделения трехкомпонентной смеси

Аналогичная концепция «идеального» каскада для разделения многокомпонентной смеси была представлена ранее в работах [3], однако возможность существования такого теоретического объекта все еще обсуждается из-за имеющихся практических ограничений [4]. В докладе будут рассмотрены основные понятия теории разделения в каскадах для многокомпонентной смеси. На примере каскада для разделения трехкомпонентной смеси (рис. 1) представлен вывод основных дифференциальных уравнений расчета концентрации во внутренних потоках каскада, дан анализ соответствия полученных результатов классическому случаю бинарного идеального каскада.

### Литература

1. Орлов, А. А. Математическое моделирование нестационарных разделительных процессов в каскаде газовых центрифуг для разделения изотопов вольфрама [Текст] / А. А. Орлов и др. // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, № 3. – С. 605–614.
2. Белова, В. В. Перспективность использования метода рециркуляционно-противоточной хроматографии для разделения многокомпонентных смесей [Текст] // Хим. технология, 21(8), 2020. – С. 373-378.
3. Гадельшин, В. М. Разработка квазиидеального каскада разделительных элементов с тремя отборами [Текст] / В. М. Гадельшин, О. Е. Александров, Б. В. Шульгин // Перспективные материалы. – 2013. – S14. – С. 65–70.
4. Смирнов, А. Ю. Универсальный разделительный потенциал для многокомпонентных смесей: причины отсутствия [Текст] / А. Ю. Смирнов, Г. А. Сулаберидзе // Журнал Физ. Химии. – 2019. – Т. 93, № 4. – С. 627–631.

## DERIVATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR CALCULATION OF THE “IDEAL” CASCADE FOR MULTICOMPONENT MIXTURE SEPARATION

*O. E. Aleksandrov<sup>1</sup>, V. M. Gadelshin<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Ural Federal University B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia

<sup>2</sup>Institute of Industrial Ecology UB RAS, Yekaterinburg, Russia

The separation of mixtures with two or more components is a relevant task of modern technological processes [1, 2]. Of special interest are the isotope separation technologies, which require a construction of a separating cascade. The purpose of a connection of several single separating elements according to a certain scheme, the cascade, is determined by a small enrichment achieved with one separating element and,

as a consequence, by the necessity to repeat the separation process multiple times till the desired enrichment have been achieved. Moreover, the choice of a cascade scheme is defined by a maximum efficiency, i.e. the achievement of the desired enrichment with a minimum number of separating elements. In the theory of separation of two-component or binary mixtures, the maximum efficiency can be achieved with the so-called “ideal” or “non-mixing” cascade, in which there is no mixing of flows with different concentrations.

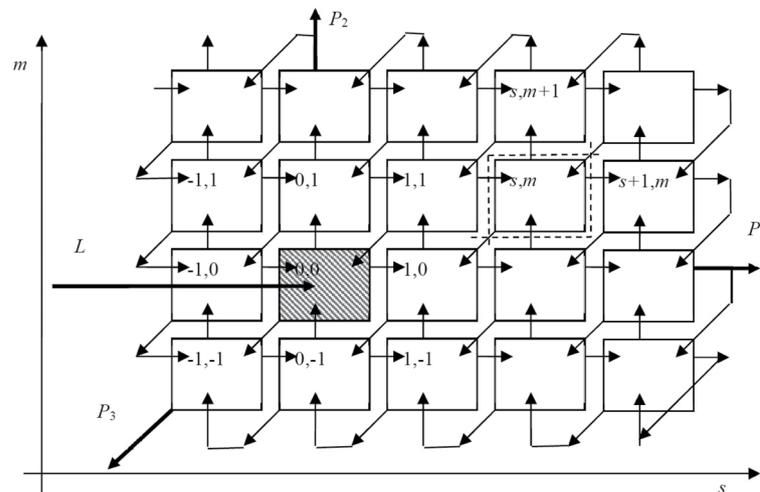


Fig. 1. The scheme of non-mixing cascade for ternary mixture separation

An analogue of the “ideal” cascade for multicomponent mixture separation was introduced earlier in [3], but the nature of such theoretical object is still under discussion due to existing practical limitations [4]. This report is going to describe the main concepts of the cascade theory for multicomponent mixture separation. Based on the case of ternary mixture separation (fig. 1), the derivation of main differential equations for concentration calculations in internal flows of the cascade will be presented, and the analysis of the comparison of obtained results with the binary “ideal” cascade will be given.

### References

1. **Orlov, A. A.** Mathematical modeling of non-stationary separation processes in a cascade of gas centrifuges for the separation of tungsten isotopes [Text] / A. A. Orlov et al. // *Inzhenerno-fizich. Zhurnal.* – 2018. – Vol. 91, No. 3. – P. 605–614.
2. **Belova, V. V.** Prospects of using the method of recirculation-countercurrent chromatography for the separation of multicomponent mixtures [Text] // *Khimicheskaya tekhnologiya.* – 2020. – Vol. 21, No. 8. – P. 373–378.
3. **Gadelshin, V. M.** Development of a quasi-ideal cascade of separating elements with three withdrawals [Text] / V. M. Gadelshin, O. E. Alexandrov, B. V. Shulgin // *Perspektivnye materialy.* – 2013. – S14. – P. 65–70.
4. **Smirnov, A. Yu.** Universal Separation Potential for Multicomponent Mixtures: Reasons for Absence [Text] / A. Yu. Smirnov, G. A. Sulaberidze // *Zhurnal Fizicheskoi Khimii.* – 2019. – Vol. 93, No. 4. – P. 627–631.

## О СТАБИЛИЗАЦИИ ЯВНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА В ДИФфуЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*Б. Н. Четверушкин<sup>1</sup>, О. Г. Ольховская<sup>1</sup>, В. А. Гасилов<sup>1</sup>, Р. Д. Москаленко<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук», Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Москва, Россия

Одним из наиболее популярных подходов к расчету теплового излучения плотной высокотемпературной плазмы является решение уравнения переноса в форме «диффузии» излучения. Модель диффузии наряду с линейной зависимостью потока лучистой энергии от градиента температуры среды включает точное уравнение баланса энергии, что обеспечивает ей широкую область применимости. Возможность использования диффузионной модели обоснована лишь для сред, находящихся в состоянии локального термодинамического равновесия. Распространенные полуэмпирические модификации «градиентного» приближения для потока энергии, известные как коррекция лучистого потока энергии (метод фактора Эддингтона и т. п.) делают диффузионную модель существенно зависимой от конкретных условий. Предлагаемые в научной литературе локальные замыкания чаще всего основаны на монотонных интерполяциях между диффузионным пределом и пределом, соответствующим малой оптической толщины. Корректирующие факторы, как правило, нелинейно зависят от параметров излучающей среды, и вычисляются в соответствии с локальными параметрами ввиду чего решение соответствующих уравнений лучистого теплообмена требует применения итерационных процедур. Сходимость такого рода итераций во многих случаях с трудом поддается теоретическому обоснованию. Кроме того, как отмечалось в литературе по данной проблеме, нелинейная коррекция лучистого потока может приводить к нефизическим «скачкам» параметров в течении излучающей среды.

Преследуя цель разработки параллельных алгоритмов и программного обеспечения решения задач радиационной гидродинамики, в частности, физики плазмы высокой плотности энергии, в условиях сильно меняющейся излучательной способности и прозрачности плазменной среды, целесообразен поиск альтернативных подходов к регуляризации диффузионных моделей. Один из таких подходов предлагается в настоящей работе. Основу его составляет модификация диффузионной модели путем введения гиперболизирующей поправки. Этот прием ранее с успехом применялся для регуляризации решения уравнения теплообмена в приближении лучистой теплопроводности. На этом пути возможно построение явной схемы, удобной для реализации в виде параллельной методики. Рассмотрены примеры решения ряда модельных задач для сред с существенно меняющейся оптической плотностью. Выполнен ряд вычислительных экспериментов, в которых сравнивались различные методики ограничения. Проведены сравнения разработанной методики с различными методами линейной и нелинейной коррекции лучистого потока, подтверждающие вычислительную эффективность.

Работа поддержана грантом РФФИ 21-11-00362.

## ON THE STABILIZATION OF THE EXPLICIT SCHEME FOR SOLVING THE SYSTEM OF RADIANT HEAT TRANSFER EQUATIONS IN THE DIFFUSION APPROXIMATION

*B. N. Chetverushkin<sup>1</sup>, O. G. Olkhovskaya<sup>1</sup>, V. A. Gasilov<sup>1</sup>, R. D. Moskalenko<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Applied Mathematics. Keldysh RAS, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

One of the most popular approaches to calculating the thermal radiation of a dense high-temperature plasma is the solution of the transport equation in the form of radiation “diffusion”. The diffusion model, along with the linear dependence of the radiant energy flux on the medium temperature gradient, includes an exact energy balance equation, which provides it with a wide range of applicability. The possibility of using the diffusion model is justified only for media that are in a state of local thermodynamic equilibrium. Common semi-empirical modifications of the “gradient” approximation for the energy flux, known as the correction of the radiant energy flux (Eddington factor method, etc.) make the diffusion model significantly dependent on specific conditions. The local closures proposed in the scientific literature are most often based on monotonic interpolations between the diffusion limit and the limit corresponding to a small optical thickness. Correcting factors, as a rule, depend nonlinearly on the parameters of the radiating medium, and are calculated in accordance with local parameters, which is why the solution of the corresponding radiant heat transfer equations requires the use of iterative procedures. The convergence of such iterations in many cases is difficult to justify theoretically. In addition, as noted in the literature on this problem, a nonlinear correction of the radiant flux can lead to non-physical “jumps” of parameters in the flow of the radiating medium. Pursuing the goal of developing parallel algorithms and software for solving problems of radiation hydrodynamics, in particular, high-energy plasma physics, under conditions of strongly changing emissivity and transparency of the plasma medium, it is advisable to search for alternative approaches to the regularization of diffusion models. One such approach is proposed in this paper. It is based on the modification of the diffusion model by introducing a hyperbolic correction. This technique was previously successfully used to regularize the solution of the heat transfer equation in the approximation of radiative heat conduction. On this path, it is possible to construct an explicit scheme, which is convenient for implementation in the form of a parallel technique. Examples of solving a number of model problems for media with significantly varying optical density are considered. A number of computational experiments were carried out in which various methods of limitation were compared. Comparisons of the developed method with various methods of linear and nonlinear correction of the radiant flux were carried out, confirming the computational efficiency.

This work was supported by the Russian Science Foundation grant 21-11-00362.

6-18

## АЛГОРИТМЫ И ОСОБЕННОСТИ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ В ПАКЕТЕ УРС-ОФ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ШИРОКОДИАПАЗОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ РОСА-МФИ

*A. С. Данилов, Д. Г. Гордеев, О. Н. Шумилина, И. Н. Арапов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

Для решения многих прикладных задач, связанных с моделированием движения сжимаемых сред, необходимы уравнения состояния (УРС), описывающие поведение этих сред, как в однофазных областях фазовой диаграммы, так и при фазовых переходах, в областях, где вещество находится в виде смеси фаз.

В докладе приводится описание алгоритмов, реализующих вычисление термодинамических функций (ТДФ) для полуэмпирической модели широкодиапазонных УРС РОСА-МФИ, и особенностей их программной реализации в пакете УРС-ОФ [1–3]. Модель РОСА-МФИ представляет собой развитие ранее созданной модели УРС РОСА-МИ [4–5] и дополнительно учитывает изменение термодинамических функций при фазовом переходе твердое тело–жидкость (плавлении). Возможности модели по описанию ТДФ в области плавления показаны на примере УРС меди [6].

В РОСА-МФИ выделены две отдельные функциональные зависимости для описания термодинамических свойств твердой и жидкой (в том числе парообразной) фаз вещества. Разработаны алгоритмы вычисления ТДФ для переменных плотность–температура, плотность–удельная внутренняя энергия и плотность–давление.

Для описания равновесных фазовых переходов жидкость–пар и твердое тело–жидкость используется отдельный программный модуль («двухфазный модуль»), алгоритмы которого не зависят от формы модели УРС и позволяют рассчитывать ТДФ на границах и внутри фазовых переходов с использованием функциональных зависимостей, описывающих свойства фаз вещества.

Программная реализация модели УРС РОСА-МФИ и «двухфазного модуля» выполнена на языке программирования FORTRAN с использованием векторизуемых конструкций в мультиархитектурном эталонном формате (МЭФ). Эквивалентные преобразования МЭФ в программы, учитывающие особенности вычислителей MIMD, SIMD и GPGPU-архитектур, выполняются с использованием специально разработанного препроцессора.

### Литература

1. **Гордеев, Д. Г.** Современное состояние пакета программ УРС-ОФ для расчета термодинамических и механических свойств веществ [Текст] / Д. Г. Гордеев, Е. Ф. Голубкова, Л. Ф. Гударенко, В. Г. Куделькин, О. В. Сапронова // XII Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование»: сб. науч. тр. / под. ред. Р. М. Шагалиева. – Саров : ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ». – 2010. – С. 115–118.
2. **Гордеев, Д. Г.** Современное состояние пакета программ УРС-ОФ для расчета термодинамических и механических свойств веществ [Электронный ресурс] / Д. Г. Гордеев, Е. Ф. Голубкова, Л. Ф. Гударенко, В. Г. Куделькин, О. В. Сапронова // Труды международной конференции «XI Забабахинские научные чтения». – 2012. – Режим доступа: <http://www.vniitf.ru/images/zst/2012/s6/6-17.pdf>
3. **Гордеев, Д. Г.** Библиотека программ «УРС-ОФ» расчета свойств веществ, адаптированная для вычислительных систем с возможностью параллельных и векторизованных вычислений [Текст] / Д. Г. Гордеев, Н. Н. Жильникова, Д. Н. Кидямкина, В. Г. Куделькин, М. В. Куликова, О. Н. Шумилина // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2022. – Вып. 1. – С. 27–39.
4. **Гордеев, Д. Г.** Модель уравнения состояния металлов с эффективным учетом ионизации. Уравнения состояния Та, W, Al, Be [Текст] / Д. Г. Гордеев, Л. Ф. Гударенко, А. А. Каякин, В. Г. Куделькин // Физика горения и взрыва. – 2013. – № 1. – С. 106–120.
5. **Каякин, А. А.** Уравнение состояния соединений изотопов лития с изотопами водорода [Текст] / А. А. Каякин, Л. Ф. Гударенко, Д. Г. Гордеев // Физика горения и взрыва. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 109–122.
6. **Арапов, И. Н.** Полуэмпирическое широкодиапазонное уравнение состояния меди в форме модели РОСА-МФИ [Текст] / И. Н. Арапов, А. А. Каякин, А. С. Данилов, Д. Г. Гордеев, Л. Ф. Гударенко // Сборник тезисов докладов международной конференции «XVI Забабахинские научные чтения». – 2023.

# ALGORITHMS AND FEATURES OF SOFTWARE IMPLEMENTATION IN THE URS-OF PACKAGE OF A SEMI-EMPIRICAL MODEL OF WIDE-RANGE EQUATIONS OF STATE ROSA-MFI

*A. S. Danilov, D. G. Gordeev, O. N. Shumilina, I. N. Arapov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov,  
Russia

To solve many applied problems related to modeling the motion of compressible media, equations of state (EOS) are needed that describe the behavior of these media, both in single-phase regions of the phase diagram and during phase transitions, in the regions where the substance is in the form of a mixture of phases.

The report describes the algorithms that implement the calculation of thermodynamic functions (TDF) for the semi-empirical model of wide-range ROSA-MFI EOSs, and the features of their software implementation in the URS-OF package. The ROSA-MFI model is a development of the previously created ROSA-MI EOS model and additionally takes into account the change in thermodynamic functions during the solid-liquid phase transition (melting). The capabilities of the model for describing TDF in the melting region are shown using the EOS of copper as an example.

In ROSA-MFI, two separate functional dependencies are distinguished to describe thermodynamic properties of the solid and liquid (including vaporous) phases of a substance. Algorithms have been developed for calculating TDF for such variables as density-temperature, density-specific internal energy and density-pressure.

To describe the liquid-vapor and solid-liquid equilibrium phase transitions, a separate software module (“a two-phase module”) is used, the algorithms of which do not depend on the shape of the EOS model and allow calculating the TDF at the boundaries and inside phase transitions using functional dependencies that describe the properties of the phases substances.

The software implementation of the ROSA-MFI model and of the “two-phase module” is carried out in the FORTRAN programming language using vectorizable structures in the multiarchitecture etalon format (MEF). Equivalent transformations of the MEF into programs that take into account the features of MIMD, SIMD, and GPGPU architecture computers are performed using a specially developed pre-processor.

## References

1. **Gordeev, D. G.** The current state of the URS-OF software package for calculating the thermodynamic and mechanical properties of substances [Text] / D. G. Gordeev, E. F. Golubkova, L. F. Gudarenko, V. G. Kudelkin, O. V. Saprionova // XII International Conference “Supercomputing and Mathematical Modeling”: col. of sc. p. / ed. by R. M. Shagaliev. – Sarov : FSUE «RFNC – VNIIEF». –2010. – P. 115-118.
2. **Gordeev, D. G.** The current state of the URS-OF software package for calculating the thermodynamic and mechanical properties of substances [Electronic resource] / D. G. Gordeev, E. F. Golubkova, L. F. Gudarenko, V. G. Kudelkin, O. V. Saprionova // Proceedings of the international conference “Zababakhin Scientific Readings”. – 2012. – URL: <http://www.vniitf.ru/images/zst/2012/s6/6-17.pdf>
3. **Gordeev, D. G.** Library of programs “URS-OF” for calculating the properties of substances, adapted for computing systems with the possibility of parallel and vectorized calculations [Text] / D. G. Gordeev, N. N. Zhilnikova, D. N. Kidyamkina, V. G. Kudelkin, M. V. Kulikova, O. V. Shumilina // Questions of atomic science and technology. Series: Mathematical modeling of physical processes. – 2022. – Iss. 1. – P. 27–39.
4. **Gordeev, D. G.** Model of the equation of state of metals with effective allowance for ionization. Equations of state for Ta, W, Al, Be [Text] / D. G. Gordeev, L. F. Gudarenko, A. A. Kayakin, V. G. Kudelkin // Physics of combustion and explosion. – 2013. – No. 1. – P. 106–120.
5. **Kayakin, A. A.** Equation of state for compounds of lithium isotopes with hydrogen isotopes [Text] / A. A. Kayakin, L. F. Gudarenko, D. G. Gordeev // Physics of combustion and explosion. – 2014. – Vol. 50, No. 5. – P. 109–122.

6. **Arapov, I. N.** Semi-empirical wide-range equation of state of copper in the form of the ROSA-MFI model [Text] / I. N. Arapov, A. A. Kayakin, A. S. Danilov, D. G. Gordeev, L. F. Gudarenko // Collection of abstracts of reports of the international conference “Zababkhin Scientific Readings”. – 2023.

6-19

## **СОПРЯЖЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В РАМКАХ ЕДИНОГО КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ**

*С. А. Дьячков, Р. В. Муратов, С. Ю. Григорьев*

ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова»,  
Москва, Россия

Моделирование задач механики сплошной среды потребляет большую часть вычислительных ресурсов современных суперкомпьютеров. Дискретизация континуального представления среды может быть задана в виде статичной сетки из примитивных ячеек (подход Эйлера), между которыми рассчитываются потоки массы, импульса и энергии, а также в виде подвижной деформируемой сетки (подход Лагранжа), где масса ячеек остается постоянной. При решении задач с сильными градиентами давления и потерей сплошности материалов также широко применяется бессеточный лагранжевый метод сглаженных частиц SPH, где дискретизация сплошной среды дается набором материальных точек с заданными в них значениями полевых величин, которые аппроксимируются в окрестности этих точек с помощью компактных сглаживающих функций. Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки и применяется для соответствующего класса задач. Применение этих методик в комплексе может существенно расширить возможности высокопроизводительного моделирования.

Авторами данной работы разработана архитектура программного комплекса, которая позволяет использовать вместе или раздельно сеточные и бессеточные численные методы. В основе алгоритмов сопряжения лежит возможность динамически определять тип элемента дискретизации, а расчет физических величин определяется путем переинтерполяции значений между различными представлениями. Так, для сопряжения между частицами SPH и эйлеровой сеткой используется интерфейс, аналогичный описанному в работе [1], но дополненный возможностью моделирования многоматериальных течений. Сопряжение между методом SPH и лагранжевой сеткой осуществляется с помощью подхода, аналогичного описанному в работе [2]. Схематично интерфейсы сопряжения представлены на рис. 1. В докладе представлены архитектурные решения, позволяющие проводить такого рода сопряжение методик, а также рассмотрен ряд модельных задач. Обсуждаются преимущества и недостатки предложенных алгоритмов сопряжения численных методов.

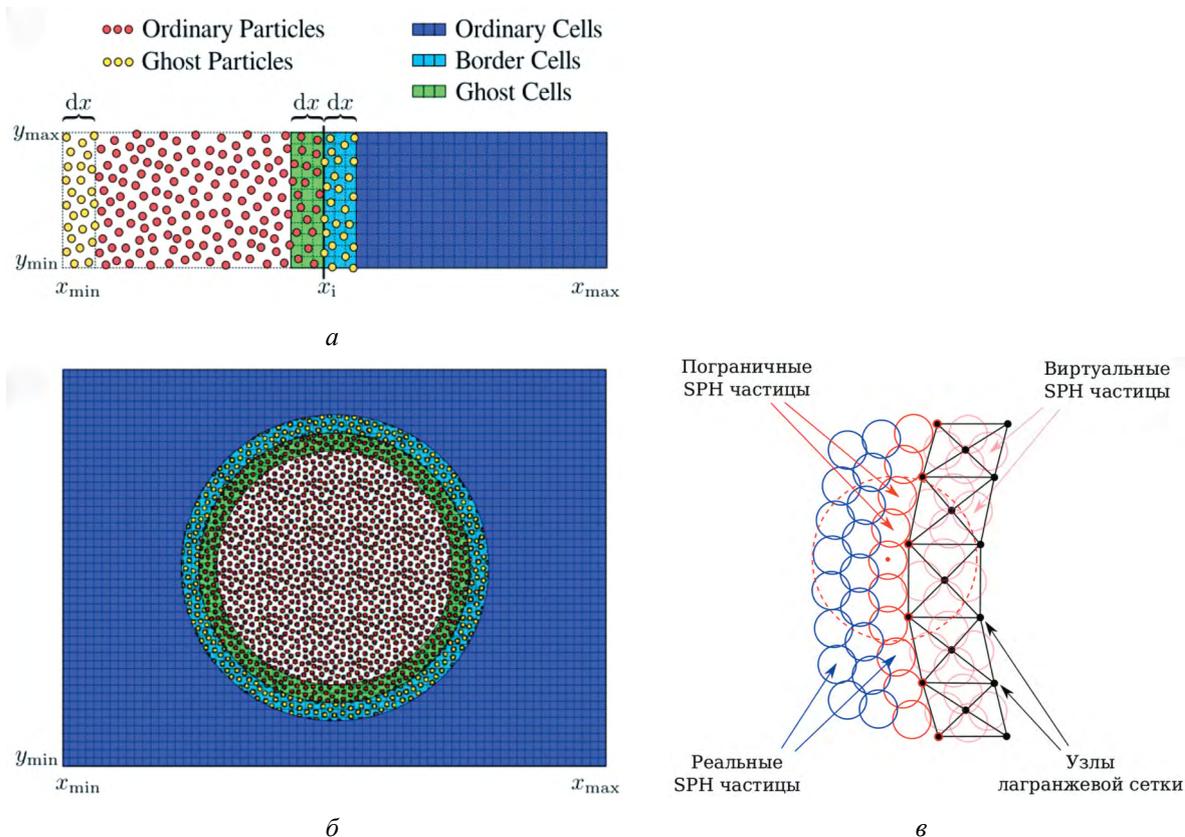


Рис. 1. *а, б* – интерфейс сопряжения сеточной эйлеровой области с методом SPH. В область виртуальных ячеек (ghost cells) происходит переинтерполяция данных частиц (ordinary particles), в то время как в области приграничных ячеек (border cells) возникают виртуальные частицы (ghost particles). *в* – ячейкам лагранжевой сетки вблизи контактной границы приписывают вспомогательные SPH частицы, которые принимают физические свойства этих ячеек, и которые позволяют провести процедуру согласования.

## Литература

1. **Chiron, L.** Coupled SPH-FV method with net vorticity and mass transfer [Text] / L. Chiron, S. Marrone, A. Di Mascio, D. Le Touzé // *Journal of Computational Physics*. – 2018. – Vol. 364. – P. 111–136.
2. **Xiao Yihua.** A coupling algorithm of finite element method and smoothed particle hydrodynamics for impact computations [Text] / Xiao Yihua, Han Xu, Hu Dean // *Computer Materials and Continua*. – 2011. – Vol. 23, No. 1. – P. 9.

## COUPLING OF NUMERICAL METHODS IN A UNIFIED COMPUTER PROGRAM

*S. A. Dyachkov, R. V. Muratov, S. Yu. Grigoryev*

Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia

Modeling of continuum mechanics problems consumes most of the computational resources of modern supercomputers. The discretization of the continuum representation of the medium can be specified in the form of a static grid of primitive cells (Euler approach), between which the mass, momentum, and energy flows are calculated, as well as in the form of a movable deformable grid (Lagrange approach), where masses of cells remain constant. When solving problems with strong pressure gradients and loss of continuity, the meshless smoothed particle Lagrangian method SPH is also widely used, where the discretization of a continuous medium is given by a set of material points with given values of field quantities in them, which are

approximated in the vicinity of these points using compact smoothing functions. Each of the approaches has its advantages and disadvantages and is applied to the corresponding class of problems. The application of these techniques in combination can significantly expand the possibilities of high-performance modeling.

The authors of this study have developed a software architecture that allows using mesh-based and meshless numerical methods together or separately. The coupling algorithms are based on the ability to dynamically determine the type of discretization element, and the calculation of physical quantities is determined by reinterpolating values between different representations. Thus, for the coupling between SPH particles and the Eulerian mesh, an interface similar to that described in [1], but augmented with the ability to simulate multi-material flows, is used. The coupling between SPH and the Lagrangian mesh is done using an approach similar to that described in [2]. The scheme of the coupling interfaces is given in fig. 1. The report presents architectural solutions that allow to carry out this kind of coupling of techniques, and also considers a number of modeling problems. Advantages and disadvantages of the proposed algorithms of numerical methods coupling are discussed.

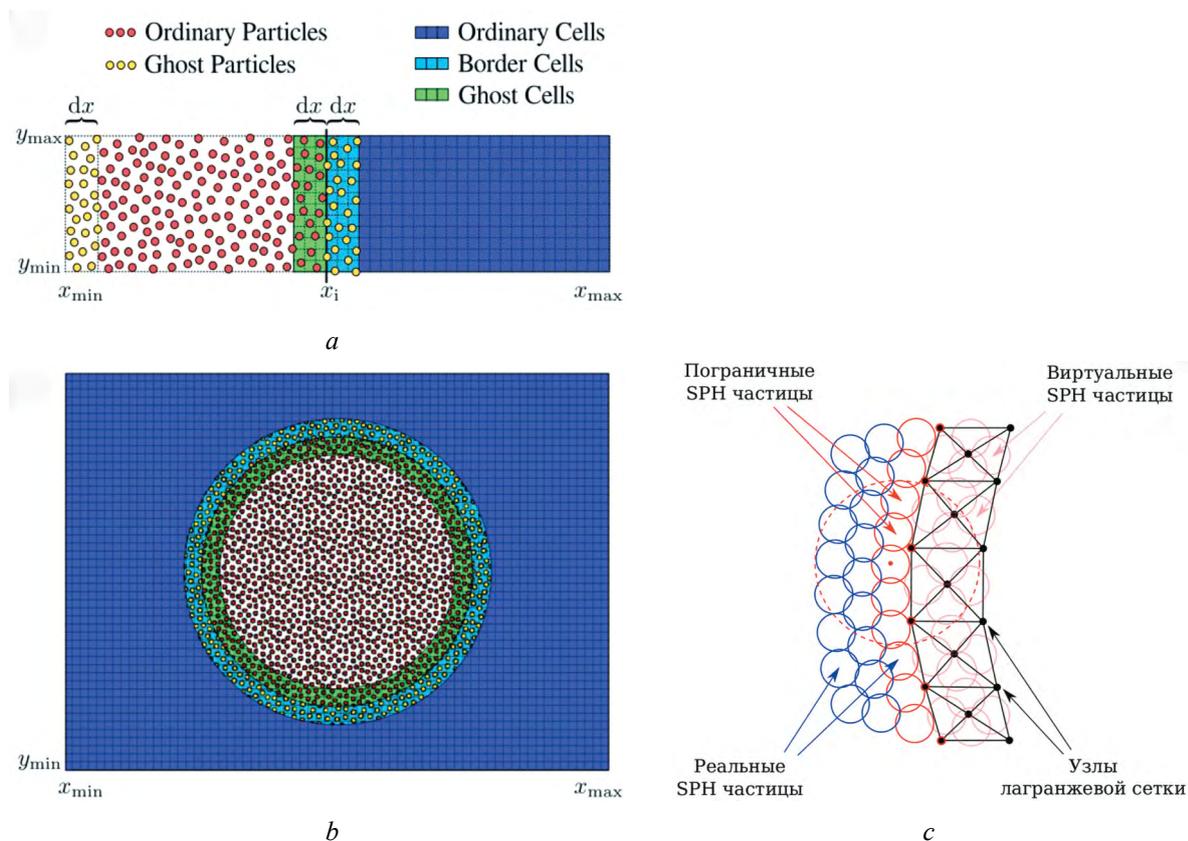


Fig. 1. *a, b* – Interface of the mesh-based finite volume Eulerian method with the SPH method. In the area of virtual cells (ghost cells) these particles (ordinary particles) are re-interpolated, while in the area of boundary cells virtual particles (ghost particles) arise. *c* – Lagrangian grid cells near the contact boundary are assigned with auxiliary SPH particles, which take physical properties of these cells and allow to carry out the matching procedure.

## References

1. **Chiron, L.** Coupled SPH-FV method with net vorticity and mass transfer [Text] / L. Chiron, S. Marrone, A. Di Mascio, D. Le Touzé // *Journal of Computational Physics*. – 2018. – Vol. 364. – P. 111–136.
2. **Xiao Yihua.** A coupling algorithm of finite element method and smoothed particle hydrodynamics for impact computations [Text] / Xiao Yihua, Han Xu, Hu Dean // *Computer Materials and Continua*. – 2011. – Vol. 23, No. 1. – P. 9.

## ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТОК В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ АЭРО- И ГИДРОДИНАМИКИ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ «ЛОГОС»

*Е. О. Евстифеева, О. Н. Борисенко, Д. М. Панкратов, Т. В. Цалко, А. И. Шавхитдинова*  
ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

Подготовка к проведению моделирования физических процессов течения жидкости и газа при решении задач аэро- и гидродинамики [1] состоит из последовательной генерации поверхностной и на ее основе объемной (расчетной) сеток высокого качества. Препроцессор пакета программ «Логос» предоставляет возможности использования автоматических генераторов сеток следующих типов: поверхностных треугольных [2]; объемных методом отсечения [3], тетраэдральных [4], многогранных на основе тетраэдров [5], объемных для моделей с тонкостенными конструкциями.

Генераторы объемных сеток принимают в качестве входных данных поверхностную треугольную сетку и предъявляют к ней определенные требования, соответствие которым необходимо для построения качественной расчетной модели. Поверхностная сетка не должна содержать критичных ошибок, наличие которых прерывает генерацию расчетной сетки. Для формирования консистентной сетки в генераторе поверхностных сеток реализованы возможности для диагностики и исправления ошибок в автоматическом режиме.

В зависимости от типа генератора объемных сеток меняется алгоритмическая технология построения расчетной модели. Данный факт обуславливает необходимость в дополнительной обработке определенных ситуаций при построении поверхностной сетки в контексте ее подготовки для конкретного генератора объемной сетки. Например, при генерации сетки в тонкостенных конструкциях требуется отображение поверхностной сетки в «тонких» зонах для последующего формирования призм методом протягивания; генератор тетраэдральных и многогранных сеток предполагает, что треугольники на близких поверхностях модели будут иметь приблизительно равные размеры; а при построении шаблонной сетки в генераторе методом отсечения могут быть использованы значения кривизн из модуля генератора поверхностной сетки для получения достаточной аппроксимации поверхности.

В работе представлены возможности генератора поверхностных треугольных сеток, реализованные для успешной генерации объемных сеток с различными типами ячеек для произвольных исходных моделей с возможным наличием конструктивных особенностей. Проведен анализ, как качество и размеры элементов поверхностной сетки влияют на построение расчетной сетки и впоследствии на сам расчет.

### Литература

1. **Козелков, А. С.** Параллельная реализация метода SIMPLE на основе многосеточного метода [Текст] / А. С. Козелков, С. В. Лашкин, А. А. Куркин, А. В. Корнев, А. М. Вялых // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 1–22.
2. **Борисенко, О. Н.** Алгоритмы обработки особенностей геометрических моделей при построении поверхностных треугольных сеток в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / О. Н. Борисенко, А. Н. Лукичев, Е. О. Евстифеева, Д. М. Панкратов и др. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2020. – Вып. 3. – С. 40–51
3. **Смолкина, Д. Н.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / Д. Н. Смолкина, О. Н. Борисенко, М. В. Черенкова, А. Г. Гиниятуллина и др. // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2018. – Вып. 2. – С. 25–39.
4. **Попова, Н. В.** Автоматический генератор неструктурированных тетраэдральных сеток с призматическими слоями в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / Н. В. Попова, О. Н. Борисенко,

И. И. Корнеева, Н. В. Чухманов и др. // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2020. – Вып. 1. – С. 43–57.

5. **Попова, Н. В.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток на основе тетраэдральных сеток с призматическими слоями [Текст] // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2021. – Вып. 3. – С. 70–83.

## **SURFACE MESH GENERATION FOR CFD COMPUTATION MODELS PREPARATION IN “LOGOS” SOFTWARE PACKAGE**

*E. O. Evstifeeva, O. N. Borisenko, D. M. Pankratov, T. V. Tsalko, A. I. Shavkhidinova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

Preparation for the simulation of fluid flow physics processes in CFD [1] comprises consecutive surface and volume (computation) mesh generation. Preprocessor of “Logos” software package allows using the following types of automatic generators: surface triangular meshes [2]; volume ones by a cut-off method [3], tetrahedral [4], polyhedral meshes based on tetrahedral and prismatic cells [5], volume meshes for models with thin-walled constructions.

Volume mesh generators use a surface triangular mesh as input data that should satisfy the specific conditions to generate a high-quality computation model. A surface mesh must not contain critical defects – it would interrupt the volume mesh generation. There are tools to find the defects and repair them in the surface mesh generator to produce a consistent mesh without defects.

Algorithmic procedure for the computation model generation depends on the type of the volume mesh generator. That is a condition factor for additional treatment of certain situations within surface mesh generation in the context of its preparation for a specified volume mesh generator. For example, in case of the volume mesh generation in thin-walled structures it is necessary to imprint a surface mesh in “thin” regions to form prismatic cells using an extrusion method; polyhedral and tetrahedral mesh generators imply that triangles in neighboring regions have approximately equal sizes; and curvatures from the surface mesh generation module may be used to generate a template mesh with a generator using a cut-off method to produce a good surface approximation.

The paper describes the possibilities of the surface mesh generator implemented for successful generation of volume meshes with different types of cells for any input models with possible structural features. The quality and the sizes of elements of the surface mesh are analyzed as they influence the volume mesh generation and the computation itself.

### **References**

1. **Kozelkov, A. S.** Parallel realization of SIMPLE method on the basis of a multigrid method [Text] / A. S. Kozelkov, S. V. Lashkin, A. A. Kurkin, A. V. Kornev, A. M. Vialykh // Siberian journal of computational mathematics. – 2020. – Vol. 23, No. 1. – P. 1–22.
2. **Borisenko, O. N.** Algorithms of preprocessing singularities in geometric models to generate surface triangular grids in the “Logos” software package preprocessor [Text] / O. N. Borisenko, A. N. Lukichev, A. O. Evstifeeva, D. M. Pankratov et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2020. – No. 3. – P. 40–52.
3. **Smolkina, D. N.** An automatic generator of unstructured polyhedral grids in the “Logos” software preprocessor [Text] / D. N. Smolkina, O. N. Borisenko, M. V. Cherenkova, A. G. Giniyatullina et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2018. – Vol. 2. – С. 25–39.
4. **Popova, N. V.** Automatic generator of unstructured tetrahedral grids with prismatic layers in the “Logos” software package preprocessor [Text] / N. V. Popova, O. N. Borisenko, I. I. Korneeva, N. V. Chukhmanov et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2020. – Vol. 1. – P. 43–57.
5. **Popova, N. V.** Automatic generator of unstructured polyhedral meshes on the base of tetrahedral meshes with prismatic layers [Text] // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2021. – Vol. 3. – P. 70–83.

## О РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ К ЧИСЛЕННЫМ РАСЧЕТАМ

*Т. Г. Елизарова*

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Система уравнений Навье–Стокса является общепризнанной моделью для решения задач газовой динамики и основой для построения соответствующих вычислительных алгоритмов. В начале девяностых годов прошлого века было построено одно из обобщений классической системы уравнений газовой динамики, которое также как и основная система, является замкнутой системой законов сохранения. Это обобщение первоначально было названо системой квазигазодинамических (КГД) уравнений. Позднее эти уравнения стали называться регуляризованными уравнениями газовой динамики, или системой уравнений газовой динамики при пространственно-временном осреднении [1–3].

В отличие от других многочисленных обобщений уравнений Навье–Стокса, КГД система оказалась эффективной для построения численных алгоритмов для широкого круга задач, начиная от течений вязкой несжимаемой жидкости до высокоскоростных течений газа. Построенные алгоритмы описывают нестационарные пространственные течения флюидов и удобны для распараллеливания на большое число процессоров. Соответствующие алгоритмы реализованы как в виде индивидуальных программ, так и в виде вычислительных ядер в открытом программном комплексе OpenFOAM. Некоторые полученные на основе КГД уравнений результаты имеются, например, по адресу <http://elizarova.imamod.ru>

В докладе будут приведены основные сведения о системе КГД уравнений и о методах ее численного решения, которые иллюстрированы примерами численных расчетов. В заключение будет рассмотрен вопрос о построении регуляризованных уравнений для течения гомогенных газовых смесей. В качестве примера рассмотрена задача о взаимодействии ударной волны с пузырьком газа для различных соотношений плотностей газа и пузырька. Предложенный численный алгоритм позволяет получить неосциллирующее решение задачи в случае компонент смесей с сильно различающимися свойствами.

### Литература

1. **Chetverushkin, B. N.** Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations [Text]. – Barselona : CIMNE, 2008.
2. **Elizarova, T. G.** Quasi-Gas Dynamic Equations [Text]. – Dordrecht : Springer, 2009. IBSN 978-3-642-0029-5.
3. **Шеретов, Ю. В.** Регуляризованные уравнения гидродинамики [Текст]. – Тверь : Тверской государственный университет, 2016.

## ABOUT THE REGULARISED GAS DYNAMIC EQUATIONS AND ITS IMPLEMENTATIONS TO NUMERICAL CALCULATIONS

*T. G. Elizarova*

Keldysh institute of applied mathematics RAS, Moscow, Russia

The system of Navier–Stokes equations is a generally accepted model for solving problems of gas dynamics and the basis for constructing appropriate computational algorithms. In the early nineties of the last century, one of the generalizations of the classical system of equations of gas dynamics was constructed, which, like the main system, is a closed system of conservation laws. This generalization was originally called a system of quasi-gas dynamic (QGD) equations. Later, these equations were called regularized equations of gas dynamics, or a system of equations of gas dynamics with space-time averaging [1–3].

Unlike numerous other generalizations of the Navier–Stokes equations, the QGD system proved to be effective for constructing numerical algorithms for a wide range of problems, ranging from viscous incompressible fluid flows to high-speed gas flows. The constructed algorithms describe nonstationary spatial fluid flows and are convenient for parallelization on a large number of processors. The corresponding algorithms are implemented both in the form of individual programs and in the form of computing cores in the OpenFOAM open software package. Some results obtained on the basis of the QGD equations are available, for example, at <http://elizarova.imamod.ru>

The report will provide basic information about the system of QGD equations and methods of its numerical solution, which are illustrated by examples of numerical calculations. In conclusion, the issue of constructing regularized equations for the flow of homogeneous gas mixtures will be considered. As an example, the problem of the interaction of a shock wave with a gas bubble for different ratios of gas and bubble densities is shown. The proposed numerical algorithm makes it possible to obtain a non-oscillating solution to the problem in the case of components of mixtures with very different molecular properties.

### References

1. **Chetverushkin, B. N.** Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations [Text]. – Barselona : CIMNE, 2008.
2. **Elizarova, T. G.** Quasi-Gas Dynamic Equations [Text]. – Dordrecht : Springer, 2009. ISBN 978-3-642-0029-5.
3. **Sheretov, Yu. V.** Dynamics of continuous media under space-time averaging. – M. : Izevsk, “Regular and Chaotic dynamics”, 2009.

---

6-22

## РАСЧЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ УДАРНО-ВОЛНОВОГО НАГРУЖЕНИЯ ОТ ПОДРЫВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА ВНУТРИ БУРОВОЙ ТРУБЫ

*В. В. Доценко, Е. Ю. Емельянова, А. Г. Нескин, М. В. Никульшин, Д. В. Петров*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

E-mail: M.V.Nikulshin@vniitf.ru

В рамках поиска технологии разрушения буровой трубы с целью последующего ее извлечения из скважины с глубины более 5000 м проводится численное исследование ударно-волнового воздействия на внутреннюю поверхность трубы в результате детонации специального цилиндрического заряда. Рассматриваются два расчетных случая формирования детонации взрывчатого состава (ВС) цилиндрического заряда: детонация с плоским фронтом и режим расходящейся сферической детонации.

Расчетная модель представляет собой слойку, которая включает в себя цилиндрический заряд ВС в медном корпусе, стальную трубу и буровой раствор. Расчет ударно-волнового воздействия на буровую трубу проводится в трехмерной постановке с использованием многокомпонентной эйлеровой формулировки.

По результатам расчетов подтверждена возможность разрушения буровой трубы в области замкового соединения. Показано, что ударно-волновое воздействие в режиме детонации заряда с плоским фронтом по уровню повреждений трубы существенно превосходит воздействие в режиме расходящейся сферической детонации.

По результатам дополнительных исследовательских расчетов определена минимальная длина заряда, достаточная для разрушения буровой трубы.

## NUMERICAL STUDY TO SIMULATE THE EFFECT OF SHOCK WAVE LOADING BY CYLINDRICAL CHARGE INITIATED INSIDE THE WELL BORE TUBE

*V. V. Dotsenko, E. Yu. Emelyanova, A. G. Neskin, M. V. Nikulshin, D. V. Petrov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

E-mail: M.V.Nikulshin@vniitf.ru

In search of technology to destroy the well bore tube in order to extract it out of the well bore from the depth of 5000 meters, a numerical study was performed to simulate how a shock wave generated inside this tube due to the detonation of a special-purpose cylindrical charge affects the tube’s inner surface. Two simulation cases are studied, namely, when detonation developed under initiation of a cylindrical charge explosive compound is characterized by a plane detonation front and represents the mode of diverging spherical detonation.

The simulation model describes a layered structure that includes a cylindrical charge with explosive compound in a copper case, a steel tube, and a boring fluid. To predict how shock wave affects the well bore tube, a 3D mesh was applied using a multi-material Eulerian finite element formulation.

The predictions proved the capability to destroy the tube in the region of its joint and demonstrated that the tube-damaging effect of shock wave in the mode of plane-front detonation is considerably superior to that observed in the mode of diverging spherical detonation.

Further computations helped determine the minimum charge length sufficient to destroy the well bore tube.

---

6-23

## К 100-ЛЕТИЮ К. К. КРУПНИКОВА. УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОГО УДАРНИКА И МИШЕНИ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

*В. В. Доценко, Е. Ю. Емельянова, М. В. Никульшин*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

E-mail: M.V.Nikulshin@vniitf.ru

В докладе приводится аналитическое решение задачи ударного взаимодействия жесткого ударника с металлическим стержнем (мишень) со сверхзвуковой скоростью, которое получил К. К. Крупников в представлениях волновой динамики. Материал мишени описывается уравнением состояния (УРС) Я. Б. Зельдовича.

Верификация результатов численных расчетов, выполненных явным методом интегрирования, с аналитическим решением выявила особенность определения модуля объемного сжатия, который совместно с ударной адиабатой является исходными данными для расчета. Ввиду того, что УРС Я. Б. Зельдовича в расчетном коде не поддерживается, применялся альтернативный способ задания – табулированный УРС на сжатие. При этом модуль объемного сжатия, определяемый, согласно руководству пользователя программы, как  $K = P/\mu$  приводит к заниженным значениям давления. Более высокий порядок точности решения обеспечивает модуль объемного сжатия, определенный К. К. Крупниковым, как производная  $\partial P$  по  $\partial \mu$ .

Полученный по итогам верификации табулированный УРС на сжатие, представленный в виде численного массива (ударная адиабата и модуль объемного сжатия), может иметь широкое практическое

кое применение, так как в качестве исходных данных используются имеющиеся экспериментальные ударные адиабаты для разного рода материалов, а также любые параметрические УРСы.

## **TO THE 100TH ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF K. K. KRUPNIKOV. SHOCK INTERACTION BETWEEN A RIGID IMPACTOR AND A TARGET AT SUPERSONIC SPEED**

*V. V. Dotsenko, E. Yu. Emelyanova, M. V. Nikulshin*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

E-mail: M.V.Nikulshin@vniitf.ru

The report presents an analytical solution to the problem of shock interaction between a rigid impactor and a metal rod (target) at supersonic speed obtained by K. K. Krupnikov in the wave dynamics representation. The target material is described by the Ya. B. Zel’dovich’s equation of state (EOS).

Verification of the results of numerical calculations performed by the explicit integration method against the analytical solution revealed a peculiar feature of determining the bulk modulus, which, together with the Hugoniot, represents the initial data for calculations. Since the Zel’dovich’s EOS is not supported in the computational code, an alternative representation was used, namely, a tabulated EOS for compression. In this case, the bulk modulus determined according to the user’s manual as  $K = P/\mu$  leads to underestimated pressure values. A higher order of accuracy of the solution is achieved by using the bulk modulus defined by K. K. Krupnikov as the derivative of  $\partial P$  with respect to  $\partial\mu$ .

The tabulated EOS for compression obtained as a result of verification, presented as a numerical array (Hugoniot and bulk modulus), can have a wide practical application, since the available experimental Hugoniot for various materials, as well as any parametric EOSs, are used as initial data.

---

6-24

## **АДАПТАЦИЯ ПРОГРАММЫ ЭГИДА-ТЕСТ К СЧЕТУ НА GPU**

*Е. А. Сизов, А. М. Ерофеев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

В докладе представлены результаты работ по адаптации к счету на графических ускорителях (GPU) методики ЭГАК, реализованной в прикладной методической программе ЭГИДА-ТЕСТ, включенной в систему тестов РФЯЦ – ВНИИЭФ для исследования параметров высокопроизводительных систем [1].

При помощи кода ЭГИДА-ТЕСТ моделируются процессы газовой динамики, используя ALE-подход, при котором аппроксимация уравнений происходит в два шага. На первом решаются уравнения газодинамики в лагранжевых переменных, а на втором производится аппроксимация конвективных членов уравнений. При этом активно используется программа «типовой схемы», определяющая и организующая порядок расчета ячеек и обмен данными между ячейками разных MPI-процессов [2]. Помимо этого, в адаптированную для счета на GPU программу ЭГИДА-ТЕСТ введена возможность ведения счета на адаптивно-встраиваемой дробной сетке, что вносит элемент нерегулярности как в расчетную сетку, так и в структуры данных. Программа ЭГИДА-ТЕСТ адаптирована для счета на GPU фирм NVIDIA и AMD.

В докладе представлены описание и решение проблем, встреченных в процессе адаптации программы к счету на GPU. Приведены пути решения проблемы использования нескольких GPU и проблемы задействования для расчета простаивающих ядер центрального процессора (схема

счета MPIxCUDA+MPIxOMP). Продемонстрирована единая «типовая схема» для CPU и GPU, а также пример ее использования для прямых пересылок данных между устройствами GPU. В результате выполненной адаптации программ на тестовых задачах на различных устройствах GPU получено ускорение от использования GPU до 8 раз при эффективности не ниже 80%.

### Литература

1. **Алексеев, А. В.** Методические прикладные тесты РФЯЦ–ВНИИЭФ для численного исследования параметров высокопроизводительных систем [Текст] / А. В. Алексеев, С. П. Беляев, А. И. Бочков, А. Н. Быков, М. В. Ветчинников и др. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. – 2020. – №. 2. – С. 86–100.
2. **Колобянин, В. Ю.** Двухуровневое распараллеливание явных разностных схем методики ЭГАК [Текст] / В. Ю. Колобянин, А. А. Фёдоров, Н. Р. Антипина // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. – 2017. – №. 3. – С. 62–69.

## ADAPTING THE EGIDA-TEST CODE TO COMPUTATIONS ON GPUS

*E. A. Sizov, A. M. Erofeev*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

The report presents results of efforts on adapting the EGAK code implemented in the methodological application code EGIDA-TEST, which is a part of the RFNC – VNIIEF set of tests for the examination of the HPC system parameters [1], to computations on graphical accelerators (GPUs).

The EGIDA-TEST code is used to simulate the gas dynamics processes with the ALE approach, in which equations are approximated in two stages. In the first stage the CFD equations are solved in Lagrangian variables and in the second stage the convective terms of these equations are approximated. The “standard scheme” program, which governs and arranges the order of calculating cells and data transfers between cells of different MPI processes [2], is intensively used. Besides, the EGIDA-TEST code adapted to GPUs allows performing computations on an adaptively nested refined mesh and this induces an element of irregularity both in the computational mesh and in data structures. The EGIDA-TEST code is adapted to the NVIDIA and AMD GPUs.

The report describes the problems faced when adapting the program to GPUs and presents the solutions found. It describes the ways of resolving the problem of using several GPUs and the problem of enabling the idle CPU cores (MPIxCUDA+MPIxOMP scheme). A unified “standard scheme” for CPU and GPU is demonstrated and an example of how to use it for direct communications between GPUs is given. Owing to the adaptation, an 8x speedup was achieved on test problems on various GPUs with the efficiency at least equal to 80%.

### References

1. **Alekseev, A. V.** The RFNC – VNIIEF methodological application tests for numerically studying the HPC system parameters [Text] / A. V. Alekseev, S. P. Belyaev, A. I. Bochkov, A. N. Bykov, M. V. Vetchinnikov et al. // VANT. Ser. Methods and Programs for Numerical Solution of the Computational Physics Problems. – 2020. – No. 2. – P. 86–100.
  2. **Kolobyanin, V. Yu.** The two-level paralleling of explicit difference schemes in the EGAK code [Text] / V. Yu. Kolobyanin, A. A. Fyedorov, N. R. Antipina // VANT. Ser. Methods and Programs for Numerical Solution of the Computational Physics Problems. – 2017. – № 3. – P. 62–69.
-

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

*А. П. Яловец, Н. Л. Клиначева, М. С. Жарылканова*

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

В работе [1] изложен численный метод решения системы уравнений механики сплошных сред в лагранжевых переменных, описывающей движение твердых тел. Метод отличается тем, что пространственные производные заменяются конечными разностями, а скорость находится из аналитического решения уравнения движения. Данный метод показал высокую точность выполнения законов сохранения и высокую устойчивость решения.

Для решения задач газовой динамики целесообразно решать систему уравнений механики сплошных сред в эйлеровых переменных. В данной работе проводится реализация метода [1] на случай эйлеровых переменных.

Верификация метода проводилась на задачах о распаде разрыва и движении стационарной сильной и слабой ударных волн. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением [2]. Проведено сравнение результатов с результатами, полученными методом крупных частиц (МКЧ) [3]. Рассматриваемый в данной работе метод имеет хорошую устойчивость как на падающей, так и на отраженной ударных волнах, в отличие от МКЧ. Для улучшения устойчивости МКЧ одним из способов является введение искусственной вязкости, что не имеет физической обоснованности и требует подбора эмпирических констант для каждой отдельной задачи. Метод [1] является универсальным и не требует использования различных искусственных добавок.

Решение задачи о неустойчивости Рихтмайера–Мешкова методом [1] показало хорошую согласованность с экспериментальными данными [3].

Таким образом, метод [1], реализованный в данной работе в эйлеровых переменных, адекватно описывает различные газодинамические течения, что делает его применимым для решения прикладных задач.

### Литература

1. **Яловец, А. П.** Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц [Текст] // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – Т. 38, № 1. – С. 151–166.
2. **Куропатенко, В. Ф.** Основы численных методов механики сплошной среды [Текст] : монография / В. Ф. Куропатенко, Е. С. Шестаковская. – Челябинск: Издат. центр Южно-Урал. гос. ун-та., 2017.
3. **Белоцерковский, О. М.** Численное моделирование в механике сплошных сред [Текст] : 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 1994. – С. 27–39.
4. **Неуважаев, В. Е.** Изучение неустойчивости Рихтмайера–Мешкова вихревым методом / В. Е. Неуважаев, Н. Э. Паршуков. – Челябинск-70, 1991.

## NUMERICAL SIMULATION OF GAS DYNAMIC PROBLEMS BY SEMI-ANALYTICAL METHOD IN EULERIAN COORDINATES

*A. P. Yalovec, N. L. Klinacheva, M. S. Zharylkanova*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

The paper [1] presents a numerical method for solving a system of equations of continuum mechanics in Lagrangian variables describing the motion of solids. The method differs in that the spatial derivatives are replaced by finite differences, and the velocity is found from the analytical solution of the equation of motion. This method has shown high accuracy of the conservation laws and high stability of the solution.

To solve problems of gas dynamics, it is advisable to solve a system of equations of continuum mechanics in Eulerian variables. In this paper, the implementation of the method [1] is carried out for the case of Eulerian variables.

Verification of the method was carried out on the problems of rupture decay and motion of stationary strong and weak shock waves. The obtained results were compared with the analytical solution [2]. The results were compared with the results obtained by the particle-in-cell method (PCM) [3]. The method considered in this paper has good stability on both incident and reflected shock waves, unlike the PCM. To improve the stability of the PCM, one of the methods is the introduction of artificial viscosity, which has no physical validity and requires the selection of empirical constants for each individual task. The method [1] is universal and does not require the use of various artificial additives.

The solution of the Richtmayer–Meshkov instability problem by the method [1] showed good consistency with experimental data [3].

Thus, the method [1] implemented in this paper in Eulerian variables adequately describes various gas-dynamic flows, which makes it applicable for solving applied problems.

### References

1. **Yalovets, A. P.** Calculation of flows of a medium induced by high-power beams of charged particles [Text] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1997. – Vol. 38, No. 1. – P. 151–166. DOI: 10.1007/BF02468285.
2. **Kuropatenko, V. F.** Fundamentals of numerical methods of Continuum mechanics [Text] / V. F. Kuropatenko, E. S. Shestakovskaya. – Chelyabinsk : Ed. SUSU Center, 2017.
3. **Belotserkovsky, O. M.** Numerical modeling in continuum mechanics [Text] : 2nd ed., reprint. and add. – M. : Fizmatlit. – 1994. – P. 27–39.
4. **Neuvazhaev, V. E.** Study of Richtmayer–Meshkov instability by the vortex method [Text] / V. E. Neuvazhaev, N. E. Parshukov. – Chelyabinsk-70, 1991.

## СТОХАСТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОЯСОВ ЗЕМЛИ

*А. Н. Залялов, А. Е. Широков, Н. В. Иванов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

Радиационные пояса Земли (РПЗ) являются одним из основных факторов, определяющих характеристики околоземных космических аппаратов. В настоящее время ведется активное изучение взаимосвязи физических процессов, определяющих динамику РПЗ, как с помощью запуска космических миссий, так и методами расчетно-теоретического анализа. С развитием супер-ЭВМ появляются численные методики прогнозирования параметров РПЗ и их воздействия на космические аппараты, исходя из характеристик солнечно-земной активности. Особенностью большинства методик является усреднение параметров электронных потоков в РПЗ вдоль геомагнитных оболочек или линий. При этом используется диффузионное приближение, а взаимодействие частиц РПЗ с атмосферой описывается с помощью простой модели поглощения в конусе потерь. Численное моделирование строится на основе разностных методов. Однако, расчет потоков электронов РПЗ в области низких орбит требует более детального подхода.

В настоящем докладе представляется стохастическая методика численного моделирования динамики релятивистских электронов РПЗ в приближении ведущего центра [1], которое в отличие от раз-

ностного подхода позволяет описывать релаксацию сравнительно быстропротекающих возмущений в РПЗ (например, во время геомагнитного шторма) в области низких орбит.

Данная методика имеет следующие свойства:

- численное моделирование движения релятивистских электронов вдоль геомагнитной линии с учетом взаимодействия с атмосферой, а также их азимутального дрейфа и радиальной диффузии проводится методом Монте–Карло [2], исходя из кинетического уравнения в приближении Фоккера–Планка;
- для его решения используется метод расщепления по физическим процессам: первый процесс – движение электрона под действием магнитного поля с учетом силы торможения, второй – рассеяние, третий – радиальная диффузия [3];
- соответствующая решаемая система уравнений получена на основе теории однородных марковских процессов, включает независимые винеровские процессы и является стохастической;
- координатное пространство состоит из 5 переменных ( $L, \varepsilon, \lambda, \phi, \alpha$ ):  $L$  – номер геомагнитной оболочки (параметр Мак–Илвайна);  $\varepsilon$  – кинетическая энергия электрона,  $\lambda$  – геомагнитная широта,  $\phi$  – долгота,  $\alpha$  – питч-угол;
- применяется приближение ведущего центра, в котором проводится усреднение по ларморовскому вращению электрона вокруг геомагнитной линии;
- в качестве физико-математической модели геомагнитного поля используется стационарный эксцентричный магнитный диполь [4];
- описываются временные масштабы от долей секунды до нескольких дней.

Приводятся результаты сравнения численного решения тестовых задач с аналитическим и разностными решениями.

### Литература

1. Hamilton, R. J. Numerical solution of the time-dependent kinetic equation for electrons in magnetized plasma [Text] / R. J. Hamilton, E. T. Lu, V. Petrosian // *The Astrophysical Journal*. – 1990. – Vol. 354, No. 5. – P. 726–734.
2. **Иванов, Н. В.** Применение приближения Фоккера–Планка для решения методом Монте–Карло задач переноса электронов [Текст] / Н. В. Иванов, Ю. К. Кочубей // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Методики и программы численного решения задач математической физики»*. – 1982. – Вып. 1(9). – С. 18–23.
3. **Brautigam, D. H.** Radial diffusion analysis of outer radiation belt electrons during the October 9, 1990, magnetic storm. [Text] / D. H. Brautigam, J. M. Albert // *J. Geophys. Res.* – 2000. – Vol. 105. – P. 291–310. doi:10.1029/1999JA900344.
4. **Хесс, В.** Радиационный пояс и магнитосфера [Текст]. – М. : Атомиздат, 1972.

## A STOCHASTIC METHOD FOR NUMERICAL SIMULATION OF VAN ALLEN RADIATION BELTS

*A. N. Zalyalov, A. E. Shirokov, N. V. Ivanov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

Van Allen radiation belts are one of the main factors determining the characteristics of near-Earth space vehicles. Currently, the interrelation of physical processes governing the dynamics of Van Allen belts is intensively studied both by accomplishing space missions and with the use of the theoretical and computational analysis methods. As the supercomputing technology evolves, new methods appear to predict the parameters of Van Allen belts and their influence on space vehicles basing on the characteristics of the solar-terrestrial activity. A specific feature of the majority of such methods is that the parameters of electron fluxes in Van Allen belts along geomagnetic shells, or lines are averaged. The diffusion approximation is used and the interaction of particles of Van Allen belts and the atmosphere is described by a simple model of absorption in

the loss cone. The numerical simulation is based on the use of difference methods. However, the simulation of electron fluxes in Van Allen belt for low earth orbits requires a detailed study.

The report presents a stochastic method for the numerical simulation of the dynamics of relativistic electrons in Van Allen belts in the guiding center approximation [1], which, in contrast to the difference approach, allows describing the high-speed disturbance relaxation in Van Allen belts (for example, during a geomagnetic storm) for low orbits.

The method presented has the following features:

- the numerical simulation of relativistic electrons moving along a geomagnetic line with regard to the interaction with atmosphere and their azimuthal drift and radial diffusion is performed with the Monte–Carlo method [2] basing on the Fokker–Planck kinetic equation;
- the splitting in physical processes is used to solve this equation: the first process is the electron motion under the magnetic field effect with account for a deceleration force, the second one is scattering, and the third process is radial diffusion [3];
- the equation system to be solved is based on the theory of homogeneous Markovian processes, includes independent Wiener processes, and is a stochastic system;
- a coordinate space includes 5 variables ( $L, \varepsilon, \lambda, \phi, \alpha$ ):  $L$  is the geomagnetic line number (McIlwain  $L$ -parameter);  $\varepsilon$  is kinetic energy of electron,  $\lambda$  is geomagnetic latitude,  $\phi$  is longitude,  $\alpha$  is pitch angle;
- a guiding center approximation is used, where averaging is performed with respect to the Larmor electron gyration around the geomagnetic line;
- a steady-state off-centered magnetic dipole [4] is used as the physical-and-mathematical model of the geomagnetic field;
- different time scales - from fractions of a second to several days - are described.

Results of the numerical solutions found for test problems are compared with exact and difference solutions.

### References

1. **Hamilton, R. J.** Numerical solution of the time-dependent kinetic equation for electrons in magnetized plasma [Text] / R. J. Hamilton, E. T. Lu, V. Petrosian // The Astrophysical Journal. – 1990. – Vol. 354, No. 5. – P. 726–734.
2. **Ivanov, N. V.** Application of the Fokker–Planck approximation to solve the electron transport problems with the Monte Carlo method [Text] / N. V. Ivanov, Yu. K. Kochubey // Voprosy Atomnoy Nauki i Tekhniki. Ser. “Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematichskoy fiziki”. – 1982. – Vol. 1, No. 9. – P. 18–23 (in Russian).
3. **Brautigam, D. H.** Radial diffusion analysis of outer radiation belt electrons during the October 9, 1990, magnetic storm. [Text] / D. H. Brautigam, J. M. Albert // J. Geophys. Res. – 2000. – Vol. 105. – P. 291–310. doi:10.1029/1999JA900344.
4. **Hess W. N.** The Radiation Belt and Magnetosphere [Text]. – М. : Atomizdat, 1972 (translated from English).

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА SPH (МЕТОДА PRICE) ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ГАЗОДИНАМИКИ С ДЕТОНАЦИЕЙ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

*И. В. Залялова, О. К. Линник, Д. М. Линник, Т. И. Жильников, Е. А. Куликова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

Доклад посвящен исследованию возможности применения «классического» метода SPH (метод сглаженных частиц) [1–2] и его модификации, метода Прайса (Price) [3], к моделированию процессов газовой динамики с детонацией в двумерном случае. Метод Прайса в основе своей опирается на «классический» метод сглаженных частиц, но при этом обладает усовершенствованными вычислительными свойствами по сравнению со своим предшественником. Основные свойства решений, полученных методом сглаженных частиц, существенным образом зависят от величины, называемой сглаживающей длиной. Если этот параметр слишком велик, то решение сильно размазано по пространству, если наоборот слишком мал, то в решении появляются нефизичные осцилляции. В методе Прайса сглаживающая длина является переменной по времени и пространству величиной, изменяющейся согласно термодинамическим параметрам частиц. Всё это позволяет проводить вычисления существенно сжимаемых сред с сильными ударно-волновыми воздействиями и с хорошей точностью.

В докладе рассматриваются основные формулы метода Прайса, а также представлены результаты двумерных газодинамических расчётов с детонацией с контролем скорости детонационной волны и с детонацией по модели кинетики МК [4]. Доклад содержит сравнение полученных результатов с экспериментальными данными и с аналогичными результатами по двумерной методике Д.

### Литература

1. **Gincold, R. A.** Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars [Text] / R. A. Gincold, J. J. Monaghan // Month. Not. Royal Astr. Soc. – 1977. – Vol 181. – P. 375–389.
2. **Lucy, L. B.** A numerical approach to the testing of fission hypothesis [Text] // Astron. J. – 1977. – Vol. 83. – P. – 1013.
3. **Price, D.** Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics [Text] // J. Comput. Phys. – 2012. – Vol. 231. – P. 759–794.
4. **Морозов, В. Г.** Теоретическое обоснование феноменологической модели ударноволновой чувствительности ВВ на основе ТАТЬ [Текст] / В. Г. Морозов, И. И. Карпенко, С. Е. Куратов, С. С. Соколов, Б. Н. Шамраев, Л. В. Дмитриева // Химическая физика. – 1995. – Т. 14, № 2–3.
5. **Артемьев, А. Ю.** Пакет прикладных программ Д для решения нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа и задач механики деформируемого твердого тела на регулярных сетках [Текст] / А. Ю. Артемьев, М. С. Башурова, В. И. Делов, Л. В. Дмитриева, Р. З. Самигулина, О. В. Сефилова, Ю. Д. Чернышёв // Забабахинские научные чтения: тезисы докладов, Кыштым. – 1992. – С. 41–42.

## USE OF THE SPH METHOD MODIFICATION (PRICE METHOD) FOR 2D NUMERICAL SIMULATION OF GAS DYNAMIC PROCESSES WITH DETONATION

*I. V. Zalyalova, O. K. Linnik, D. M. Linnik, T. I. Zhilnikov, E. A. Kulikova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

The report considers a possibility of using the classic smoothed particle hydrodynamics (SPH) method [1–2] and its modification (Price method) [3] to simulate gas dynamics processes with detonation in a 2D case. The Price method is based on the classic SPH method, however, it has some improved features for computations in comparison with its predecessor. The main features of the SPH method solutions depend on the quantity called a smoothing length. If the smoothing length value is too large, the solution is widely distributed in space; if this parameter value is too small, non-physical oscillations emerge in the solution. In the Price method, the smoothing length is a quantity varying in time and space in accordance with the thermodynamic parameters of particles. All of the above allows performing computations to a sufficient degree of approximation for highly compressed media with strong shock-wave impacts.

The report presents the main formulas of the Price method and results of 2D computations for gas dynamic processes with detonation with the detonation wave velocity control and with the kinematic model

(МК) of detonation [4]. The calculated results are compared with the available data of experiments and with similar results of the two-dimensional D code.

### References

1. **Gincold, R. A.** Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars [Text] / R. A. Gincold, J. J. Monaghan // Month. Not. Royal Astr. Soc. – 1977. – Vol 181. – P. 375–389.
2. **Lucy, L. B.** A numerical approach to the testing of fission hypothesis [Text] // Astron. J. – 1977. – Vol. 83. – P. – 1013.
3. **Price, D.** Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics [Text] // J. Comput. Phys. – 2012. – Vol. 231. – P. 759–794.
4. **Morozov, V. G.** Theoretical justification of the phenomenological model of shock-wave sensitivity for a TATB-based HE [Text] / V. G. Morozov, I. I. Karpenko, S. E. Kuratov, S. S. Sokolov, B. N. Shamraev, L. V. Dmitrieva // Chemical Physics. – 1995. – Vol. 14, No. 2–3. (in Russian).
5. **Artemyev, A. Yu.** An application software package D for solving nonstationary gas dynamics problems in Lagrangian variables and strained solid problems on regular meshes [Text] / A. Yu. Artemyev, M. S. Bashurova, V. I. Delov, L. V. Dmitrieva, R. Z. Samigulina, O. V. Senilova, Yu. D. Chernyshyev // Abstracts of reports presented at Zababakhin Scientific Readings, Kyshtym. – 1992. – P. 41–42 (in Russian).

---

6-28

## МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬФАНДА–ЛЕВИТАНА–КРЕЙНА–МАРЧЕНКО

*С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин, Н. С. Новиков*

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

Email: ksi52@mail.ru, mshishlenin@ngs.ru, novikov-1989@yandex.ru

Трехмерные аналоги уравнений Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко, параллельные вычисления на высокопроизводительных кластерах, методы Монте-Карло, супербыстрые алгоритмы обращения блочно-теплицевых матриц больших размерностей в совокупности позволяют решать принципиально новые задачи. Например, одной из важнейших проблем исследования трехмерных упругих сред является размер области исследования. Даже для сравнительно небольшого объема (2 кубических километра) решение прямой задачи сейсморазведки с шагом по пространству 1 метр занимает 150 часов на 80 ядрах одного узла вычислительного кластера. А если учесть, что большинство современных методов решения обратных задач основаны на итерационных процессах, становится понятным необходимость разработки прямых методов решения обратных задач. В докладе излагается алгоритм численного решения обратной задачи для систем уравнений гиперболического типа (уравнения акустики, Максвелла, Ламе) в трехмерном пространстве с дополнительной информацией на части поверхности (площадная система наблюдений). Основная идея заключается в применении проекционного метода с последующим сведением нелинейной обратной задачи к многопараметрическому семейству линейных интегральных уравнений (многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна–Марченко).

Для решения многомерного аналога уравнения Крейна [1] применены: сингулярное разложение, метод Монте-Карло [3,4], метод, использующий разложение Гохберга–Семенцула для блочно-теплицевых матриц [2].

Представлены результаты численных расчетов и сравнительный анализ численных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке (Новосибирск), соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1675.

### Литература

1. **Кабанихин, С. И.** О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений [Текст] // Доклады РАН. – 1989. – Т. 309, № 4. – С. 791–795.
2. **Kabanikhin, S. I.** Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem [Text] / S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets, M. A. Shishlenin // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2015. – Vol. 23, No. 6. – P. 687–700.
3. **Kabanikhin, S. I.** Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods [Text] / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // Monte Carlo Methods and Applications. – 2015. – Vol. 21, No. 3. – P. 189–203.
4. **Kabanikhin, S. I.** Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation [Text] / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2015. – Vol. 23, No. 5. – P. 439–450.
5. **Kabanikhin, S. I.** Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand–Levitan–Krein equation [Text] / S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2011. – Vol. 18, No. 9. – P. 979–996.

## MULTIDIMENSIONAL ANALOGUES OF THE GELFAND–LEVITAN–KREIN–MARCHENKO EQUATIONS

*S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, N. S. Novikov*

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Email: ksi52@mail.ru, mshishlenin@ngs.ru, novikov-1989@yandex.ru

Three-dimensional analogues of the Gelfand–Levitan–Krein–Marchenko equations, parallel calculations on high-performance clusters, Monte Carlo methods, super-fast algorithms for inverting block-greenhouse matrices of large dimensions together allow solving fundamentally new problems. For example, one of the most important problems in the study of three-dimensional elastic media is the size of the research area. Even for a relatively small volume (2 cubic kilometers), the solution of a direct seismic survey problem with a space step of 1 meter takes 150 hours on 80 cores of one node of a computing cluster. And if we take into account that most modern methods of solving inverse problems are based on iterative processes, it becomes clear that there is a need to develop direct methods for solving inverse problems. We present an algorithm for numerical solution of the inverse problem for systems of hyperbolic equations (acoustics, Maxwell, Lamé equations) in three-dimensional space with additional information on a part of the surface (areal observation system). The main idea is to apply the projection method and then reduce the nonlinear inverse problem to a multiparametric family of linear integral equations (a multidimensional analogue of the Gelfand–Levitan–Krein–Marchenko equation).

To solve the multidimensional analogue of the Krein equation [1], the following methods were applied: singular value decomposition, Monte Carlo method [3, 4], a method using the Hochberg–Semenzulu decomposition for block-toeplitz matrices [2].

The results of numerical calculations and a comparative analysis of numerical algorithms are presented.

The work was supported by Mathematical Center in Akademgorodok (Novosibirsk), agreement with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. 075-15-2019-1675.

## References

1. **Kabanikhin, S. I.** On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations [Text] // RAS Reports. – 1989. – Vol. 309, No. 4. – P. 791–795.
2. **Kabanikhin, S. I.** Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem [Text] / S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets, M. A. Shishlenin // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2015. – Vol. 23, No. 6. – P. 687–700.
3. **Kabanikhin, S. I.** Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods [Text] / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // Monte Carlo Methods and Applications. – 2015. – Vol. 21, No. 3. – P. 189–203.
4. **Kabanikhin, S. I.** Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation [Text] / S. I. Kabanikhin, K. K. Sabelfeld, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2015. – Vol. 23, No. 5. – P. 439–450.
5. **Kabanikhin, S. I.** Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand–Levitan–Krein equation [Text] / S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 2011. – Vol. 18, No. 9. – P. 979–996.

---

6-29

## ГИБРИДНЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И САМООБУЧАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ

*А. А. Карандеев, В. П. Осипов*

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Самоорганизующиеся или самообучающиеся системы – это системы, которые обладают способностью достигать некоторого устойчивого состояния за счет изменения своих внутренних свойств, на основании некоторой оценки о воздействии внешней среды [1]. Многочисленные примеры таких систем можно наблюдать в живой природе.

Сложные самообучающиеся системы вынуждены функционировать в условиях действия большого количества факторов и повышенной неопределенности. Источниками этой неопределенности, в первую очередь, являются случайные воздействия внешней среды, ошибки при передаче данных между составными объектами системы, а также шумы и отклонения, которые возникают внутри системы.

Под обучением в таком случае подразумевается процесс выработки в системе некоторой реакции на воздействия внешней среды. Причем выработка реакции в системе обуславливается многократным воздействием на систему и внешней корректировкой.

Внешняя корректировка при этом осуществляется «учителем», которому известна корректная реакция на определенные внешние воздействия. Таким образом, при обучении в систему поступает дополнительная информация о некоторой оценке реакции системы на условия внешней среды. При этом самообучение отличается от обучения отсутствием внешней корректировки.

Гибридный интеллект при этом играет важную роль в вопросах обеспечения корректного приращения самообучающихся систем с последующей интерпретации их результатов. Под гибридным интеллектом при этом понимается комбинация методов математической статистики и экспертных оценок специалистов в области для принятия тех или иных решений с учетом использования методов машинного обучения.

Данный подход позволяет существенно повысить эффективность методов машинного обучения хотя и выдвигает ряд требований к специалистам в области, что в конечном счете существенно снижает уровень неопределенности при принятия решений.

## Литература

1. **Hacker, Winfried.** Allgemeine Arbeits- und Ingenieurspsychologie [Text]. – Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973.

## HYBRID INTELLIGENCE AND SELF-LEARNING SYSTEMS

*A. A. Karandeev, V. P. Osipov*

Institute of Applied Mathematics named after M. V. Keldysh of the RAS, Russia, Moscow

Self-organizing or self-learning systems are systems that have the ability to achieve a certain steady state by changing their internal properties, based on some assessment of the impact of the external environment [1]. Numerous examples of such systems can be observed in nature.

Complex self-learning systems are forced to function under the influence of a large number of factors and increased uncertainty. The sources of this uncertainty, first of all, are random influences of the external environment, errors in the transmission of data between the constituent objects of the system, as well as noise and deviations that occur within the system.

In this case, learning means the process of developing in the system a certain reaction to the influence of the external environment. Moreover, the development of a reaction in the system is determined by repeated impact on the system and external adjustment.

In this case, external adjustment is carried out by a «teacher», who knows the correct reaction to certain external influences. Thus, during training, the system receives additional information about some assessment of the system's response to environmental conditions. At the same time, self-learning differs from learning in the absence of external adjustment.

At the same time, hybrid intelligence plays an important role in ensuring the correct application of self-learning systems with the subsequent interpretation of their results. In this case, hybrid intelligence is understood as a combination of methods of mathematical statistics and expert assessments of specialists in the field for making certain decisions, taking into account the use of machine learning methods.

This approach can significantly increase the efficiency of machine learning methods, although it puts forward a number of requirements for specialists in the field, which ultimately significantly reduces the level of uncertainty in decision making.

### References

1. **Hacker, Winfried.** Allgemeine Arbeits- und Ingenieurspsychologie [Text]. – Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1973.

---

6-30

## ВОЗМОЖНОСТИ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО (КГД) АЛГОРИТМА ПРИ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ В OPENFOAM

*М. А. Кирюшина<sup>1</sup>, Т. Г. Елизарова<sup>1</sup>, А. С. Епихин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Россия, Москва

<sup>2</sup>Институт системного программирования им. В. П. Иванникова РАН, Россия, Москва

Для численного моделирования задач газовой динамики длительное время используются квазигазодинамические уравнения, которые являются обобщением уравнений Навье–Стокса.

Квазигазодинамический (КГД) алгоритм, основанный на системе уравнений квазигазодинамики [1], был имплементирован в открытый программный комплекс OpenFOAM [2]. В настоящее время в OpenFOAM существует семейство квазигазодинамических решателей, основными из которых являются два – QGDFoam решатель для задач газовой динамики и QHDFoam [3] – решатель для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости. В процессе внедрения КГД алгоритм был переписан в потоковом виде в соответствии с особенностями реализации метода конечного объема в открытом программном комплексе OpenFOAM. Для вычисления смешанных производных был реализован оригинальный метод, примененный к объему, построенному на гранях между ячейками. С помощью

КГД алгоритма возможно моделировать течения газа в широком диапазоне чисел Маха, находя преимущества для нестационарных задач. Включение КГД алгоритма в пакет OpenFOAM позволяет использовать весь функционал, включая построение сеток, использование специфических уравнений состояния, включение моделей турбулентности и многое другое. Заложенная в пакет возможность распараллеливания задачи незначительно увеличивает сложность программы, однако позволяет увеличить скорость расчета.

С помощью солвера QHDFoam для вязкой несжимаемой жидкости решается задачи о моделировании движения расплава арсенида галлия во вращающемся тигле (метод Чохральского). Во вращающийся цилиндр помещен расплав арсенида галлия GaAs. Общая схема представлена на рис. 1. На верхней поверхности темным цветом обозначена область, где растет кристалл. Эта область вращается в противоположную сторону. В цилиндре по бокам и снизу стоят непроницаемые стенки, которые нагреваются специальным образом. Сверху находится свободная поверхность с областью кристалла в центре. Система находится в поле силы тяжести  $g = 9,8 \text{ м/сек}^2$ . Параметры, заложенные в расчет, соответствуют данным имеющихся натуральных установок.

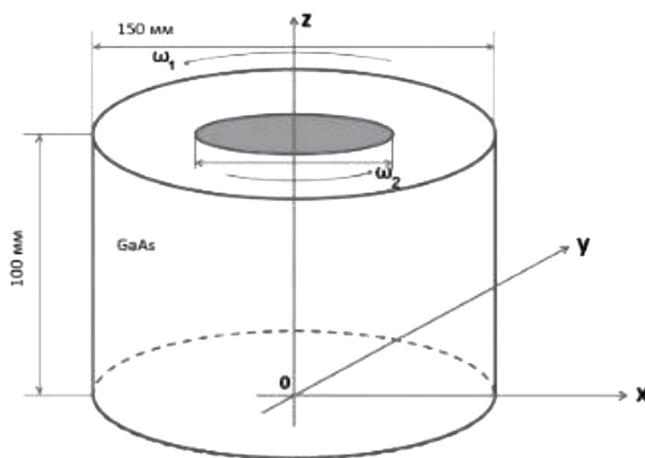


Рис. 1. Схема вращающегося тигля

## Литература

1. **Елизарова, Т. Г.** Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений [Текст]. – М. : Научный мир, 2007.
2. **Kraposhin, M. V.** Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi-gas dynamic equations [Text] / M. V. Kraposhin, D. A. Ryazanov, E. V. Smirnova, T. G. Elizarova, M. A. Kiryushina (Istomina) // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). DOI: 10.1109/ISPRAS.2017.00026.
3. **Kraposhin, M. V.** Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM [Text] / M. V. Kraposhin, D. A. Ryazanov, T. G. Elizarova // Computer physics Communications. – 2022. – Vol. 271. – P. 108216.

## CAPABILITIES OF THE QUASI-GAS DYNAMIC (QGD) ALGORITHM WHEN IMPLEMENTING IN OPENFOAM

*M. A. Kiryushina<sup>1</sup>, T. G. Elizarova<sup>1</sup>, and A. C. Epikhin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Ivannikov Institute for System Programming, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Quasi-gas dynamic (QGD) equations are a generalization of the Navier–Stokes equations. For a long time QGD equations are used in numerical modeling of fluids [1].

The QGD numerical algorithm based on this system was implemented in the OpenFOAM open software complex [2]. Currently, OpenFOAM has a family of QGD solvers, the main of which are the next two – QGDfoam solver for gas dynamics problems and a QHDFoam solver [3] for modeling of viscous incompressible fluids. During its implementation the QGD algorithm was rewritten in an appropriate form in accordance with the peculiarities of the implementation of the finite volume method in the OpenFOAM software complex. To calculate mixed space derivatives, the original method applied to a volume built on faces between space cells was implemented. Using the QGD algorithm, it is possible to simulate gas flows in a wide range of Mach numbers, with the special advantages for unsteady problems. The inclusion of the QGD algorithm in the OpenFOAM package allows to use all the functionality of the package, including meshing, specific state equations, the inclusion of turbulence models, and much more. The ability to parallelize the code included in the package slightly increases the complexity of the program, but allows to increase the calculation speed.

With the help of the QHDFoam solver for a viscous incompressible liquid, the problem of modeling the motion of the melt of gallium arsenide GaAs in a rotating crucible (Chochralsky method) is solved. General scheme of the installation is shown in fig. 1. On the upper surface, the dark color indicates the area where the crystal grows. This area rotates in the opposite direction compared to the cylinder. The sides and the down wall of the cylinder are impermeable walls that are heated in a special way. The top is a free surface with a crystal area in the center. The system is in the gravity field  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ . The parameters included in the calculation correspond to the data of the real installations.

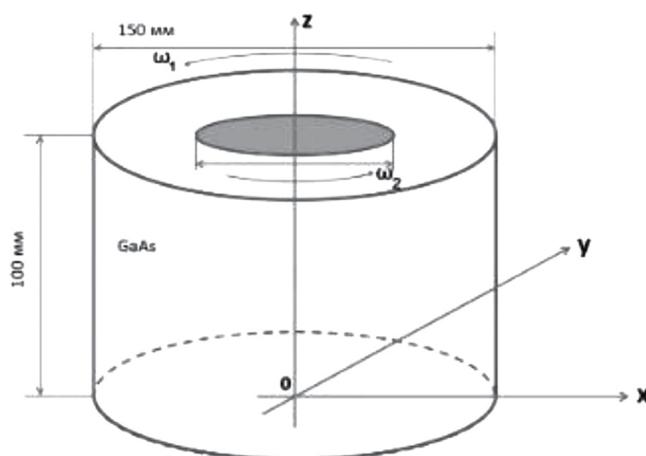


Fig. 1. Rotating crucible scheme

## References

1. **Elizarova, T. G.** Quasi-Gas Dynamic Equations [Text]. – Dordrecht : Springer, 2009. ISBN 978-3-642-0029-5.
2. **Kraposhin, M. V.** Development of OpenFOAM solver for compressible viscous flows simulation using quasi-gas dynamic equations [Text] / M. V. Kraposhin, D. A. Ryazanov, E. V. Smirnova, T. G. Elizarova, M. A. Kiryushina (Istomina) // 2017 Ivannikov ISPRAS Open Conference (ISPRAS). DOI: 10.1109/ISPRAS.2017.00026.
3. **Kraposhin, M. V.** Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM [Text] / M. V. Kraposhin, D. A. Ryazanov, T. G. Elizarova // Computer physics Communications. – 2022. – Vol. 271. – P. 108216.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ СРЕД, ОПИСЫВАЕМЫХ ЛАГРАНЖЕВЫМИ И ЭЙЛЕРОВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Н. Л. Клиначева, М. С. Жарылканова, Е. С. Шестаковская, А. П. Яловец*

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

В данной работе представлены результаты математического моделирования взаимодействия твердого тела и газа. Разработанный программный комплекс основан на алгоритме, позволяющем моделировать взаимодействие движущихся различных сред, например взаимодействие скоростного газового потока с твердым телом. Движение газового потока описывается системой уравнений механики сплошных сред в эйлеровых переменных. Твердое тело рассматривается как упругопластическая среда, в качестве модели пластичности могут использоваться модель Мизеса или модель Прандтля–Рейса. Движение твердого тела описывается системой уравнений механики сплошных сред в лагранжевых переменных. Рассматриваемые в данной работе задачи решались в цилиндрической системе координат.

Численное моделирование проводилось методом [1], как для эйлеровых, так и для лагранжевых переменных. Особенностью метода является: 1) пространственные производные заменяются конечными разностями; 2) скорость находится из аналитического решения уравнения движения. В работе [1] метод рассмотрен для движения твердого тела в лагранжевых переменных. Движение газового потока удобнее описывать в эйлеровых переменных. В данной работе метод [1] обобщен на эйлеровы переменные.

Верификация численного алгоритма проводилась на следующих задачах: задача о движении поршня под действием газового потока и истечение газа из сопла. При решении задачи о движении поршня было получено хорошее согласие с аналитическим решением [2] на начальных этапах развития процесса. На более поздних временах небольшое отклонение от аналитического решения объясняется тем, что часть энергии газа расходуется на деформацию поршня. Аналитическое решение не учитывает процессы, происходящие в твердом теле (поршне). Сравнение полученных результатов об истечении газа из сопла (для двух конфигураций сопел) с аналитическим решением [3] показало их хорошее согласие.

Кроме того, проведены расчеты разлета продуктов детонации для различных конфигураций расчетной области. Представленный программный комплекс позволяет рассчитывать термодинамические параметры сред в задачах о взаимодействии высокоскоростных потоков газов и жидкостей с твердыми телами. Конкретной задачей является разлет продуктов детонации в каналах переменного сечения.

### Литература

1. **Яловец, А. П.** Расчет течений среды при воздействии интенсивных потоков заряженных частиц [Текст] // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – Т. 38. № 1. – С. 151–166.
2. **Лобойко, Б. Г.** Сборник задач по газодинамике взрыва [Текст] / Б. Г. Лобойко, О. Ю. Диков, Е. Б. Смирнов // Снежинск : Изд-во РФЯЦ – ВНИИТФ, 2007. – 227 с.
3. **Ландау, Л. Д.** Теоретическая физика [Текст] : в 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – 736 с.

## MATHEMATICAL MODELING OF THE INTERACTION OF VARIOUS MEDIA DESCRIBED BY LAGRANGIAN AND EULERIAN VARIABLES

*N. L. Klinacheva, M. S. Zharilkanova, E. S. Shestakovskaya, A. P. Yalovec*

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

This paper presents the results of mathematical modeling of the interaction of a solid and a gas. The developed software package is based on an algorithm that allows modeling the interaction of moving various media, for example, the interaction of a high-speed gas flow with a solid. The gas flow motion is described by a system of continuum mechanics equations in Eulerian variables. A solid body is considered as an elastic-plastic medium, the Mises model or the Prandtl–Reis model can be used as a model of plasticity. The motion of a solid body is described by a system of continuum mechanics equations in Lagrangian variables. The problems considered in this paper were solved in a cylindrical coordinate system.

Numerical modeling was carried out by the method [1], both for Eulerian and Lagrangian variables. The peculiarity of the method is: 1) spatial derivatives are replaced by finite differences; 2) the velocity is found from the analytical solution of the equation of motion. In [1], the method is considered for the motion of a rigid body in Lagrangian variables. It is more convenient to describe the movement of the gas flow in Eulerian variables. In this paper, the method [1] is generalized to Eulerian variables.

Verification of the numerical algorithm was carried out on the following tasks: the problem of the movement of the piston under the action of a gas flow and the outflow of gas from the nozzle. When solving the problem of piston movement, good agreement was obtained with the analytical solution [2] at the initial stages of the process development. At later times, a slight deviation from the analytical solution is explained by the fact that part of the gas energy is spent on the deformation of the piston. The analytical solution does not take into account the processes occurring in a solid (piston). A comparison of the obtained results on the outflow of gas from the nozzle (for two nozzle configurations) with the analytical solution [3] showed their good agreement.

In addition, calculations of the spread of detonation products for various configurations of the computational domain were carried out. The presented software package makes it possible to calculate the thermodynamic parameters of media in problems of interaction of high-speed flows of gases and liquids with solids. A specific task is the scattering of detonation products in channels of variable cross-section.

### References

1. **Yalovets, A. P.** Calculation of flows of a medium induced by high-power beams of charged particles [Text] // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1997. – Vol. 38, No. 1. – P. 137–150. DOI: 10.1007/BF02468285.
2. **Loboiko, B. G.** Collection of problems on gas dynamics of explosion [Text] / B. G. Loboiko, O. Y. Dikov, E. B. Smirnov. – Snezhinsk : publishing house RFNC – VNIITF, 2007. (in Russian)
3. **Landau, L. D.** Theoretical physics [Text] : in 10 vol. Vol VI. Hydrodynamics / L. D. Landau, E. M. Lifshic. – M. : Nauka, 1988. (in Russian)

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗЛЕТА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПЛАНАРНОМ ВАКУУМНОМ ДИОДЕ

*В. Ю. Кожевников, Н. С. Семенюк, А. О. Коковин, А. В. Козырев*

Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск, Россия

Явление вакуумного пробоя широко исследуется на протяжении последних десятилетий [1]. Возбуждение вакуумного пробоя плазмой происходит за счет взрывов микроскопических неровностей катода, после чего плазма катодного факела расширяется в межэлектродный промежуток. Обширная экспериментальная база указывает на то, что движение плазмы происходит со скоростями, значительно превышающими тепловые значения взрывоэмиссионной плазмы. Основное внимание вызывает вопрос о том, что заставляет ионы двигаться в сторону увеличения электрического потенциала

(от катода к аноду). Такое явление получило название «аномального ускорения ионов» [1]. Также отмечалось, что типичные средние скорости движения ионов соответствуют кинетическим энергиям в десятки и даже сотни электронвольт, в то время как характерные тепловые энергии не превышают единиц электронвольт. Кинетические энергии ионов (свыше 100 эВ) многократно превосходят напряжение горения дугового разряда (до 70 В), поэтому в некоторых литературных источниках такие ионы принято называть «ионами с аномально высокими энергиями» [1, 2].

В данной работе представлено теоретическое объяснение причин возникновения в вакуумных диодах явления аномального ускорения ионов. Объяснение дается из первых принципов на основании уравнений бесстолкновительной физической кинетики. Предложенная теоретическая трактовка убедительно доказывает, что основным механизмом аномального ускорения ионов катодной плазмы является бесстолкновительное движение ионов в самосогласованном электрическом поле. Возникающую нетривиальную конфигурацию поля (область нестационарного виртуального катода) на начальном этапе развития процесса создает опережающее движение электронов, сходная с аналогичной в диодах с преимущественной электронной эмиссией. Моделирование также указывает на различия движения одно- и многозарядных ионов по мере расширения катодной плазмы и их результирующие вклады в начальный этап развития вакуумного пробоя.

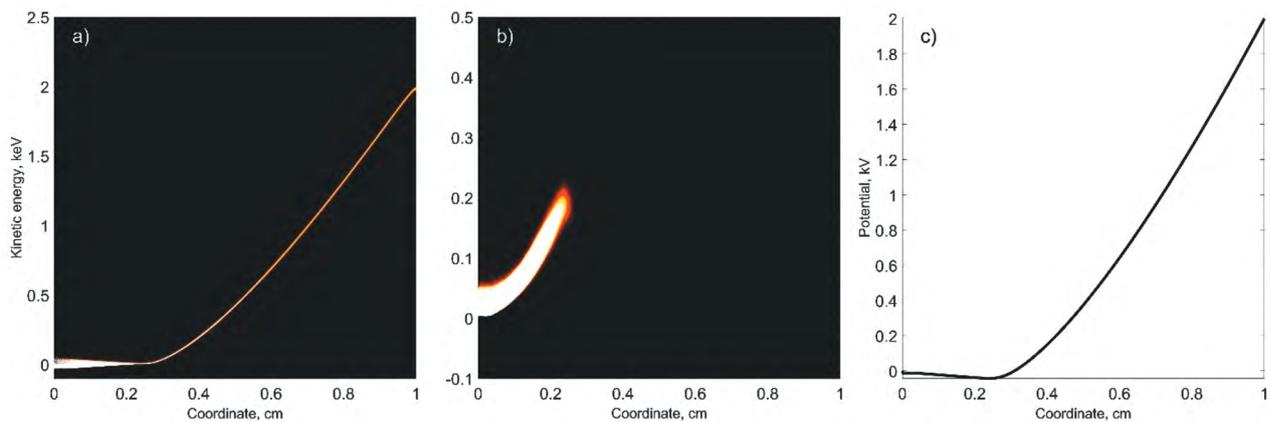


Рис. 1. Характерные фазовые портреты функций распределения компонентов плазмы катодного факела (электроны (a), ионы (b)) и электрического потенциала (c) в планарном вакуумном диоде.

## Литература

1. **Месяц, Г. А.** Взрывная электронная эмиссия [Text]. – М. : Физматлит, 2011. – С. 280.
2. **Плютто, А. А.** Ускорение положительных ионов в расширяющейся плазме вакуумных искр [Text] // ЖЭТФ. – 1960. – Т. 39, № 6. – С. 1589–1592.

## KINETIC THEORY OF THE EXPANSION OF A MULTICOMPONENT PLASMA IN A PLANAR VACUUM DIODE

*V. Yu. Kozhevnikov, N. S. Semeniuk, A. O. Kokovin, A. V. Kozyrev*

Institute of High Current Electronics SB RAS, Tomsk, Russia

The phenomenon of vacuum breakdown has been widely explored over the past decades [1]. Excitation of vacuum breakdown by plasma occurs due to explosions of microscopic cathode irregularities, after which the cathode plasma torch expands into the interelectrode gap. An extensive experimental base convincingly shows that the cathode plasma expands with the velocities exceeding the thermal values for the explosive emission plasma. The main attention here is paid to the fact why do ions move towards the increasing electric potential (from the cathode to the anode). This phenomenon is called an “anomalous ion acceleration” [1]. It was also noted that the typical average ion velocities correspond to kinetic energies of tens and even

hundreds of electron volts, while the characteristic thermal energies do not exceed units of electron volts. Measured kinetic energies of ions (over 100 eV) are many times greater than the arc combustion voltage (up to 70 V), therefore, in some literary sources, such ions are usually called “ions with anomalously high energies” [1, 2].

This paper presents a theoretical explanation of the causes of the phenomenon of anomalous ion acceleration in vacuum diodes. The explanation is given from first principles on the basis of the equations of collisionless physical kinetics. The proposed theoretical interpretation convincingly proves that the main mechanism of anomalous acceleration of cathode plasma ions is the collisionless motion of ions in a self-consistent electric field. The emerging non-trivial field configuration (area of a non-stationary virtual cathode) at the initial stage of the development of the process creates an advanced movement of electrons, similar to that in diodes with predominant electron emission. The simulation also indicates differences in the motion of singly and multiply charged ions as the cathode plasma expands and their resulting contributions to the initial stage of vacuum breakdown development.

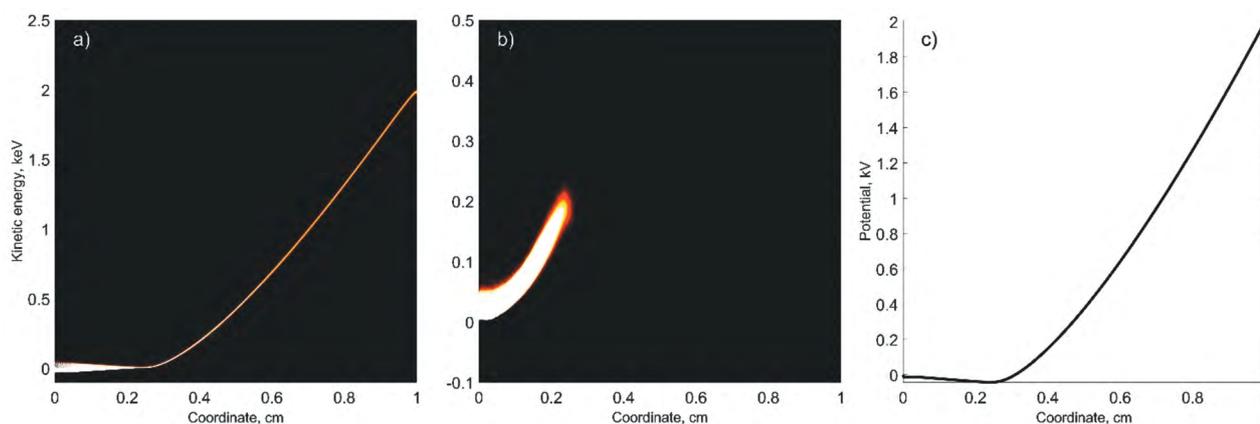


Fig. 1. Typical density plots of the electron (a) and ion (b) distribution functions as well as (c) the electric potential distribution in planar vacuum diode

## References

1. **Mesyats, G. A.** Vzryvnaya elektronnaya emissiya [Text]. – M. : Fizmatlit. – 2011. – P. 280.
2. **Plutto, A. A.** Uskorenie polozhitel'nyh ionov v rasshiryayushcheysya plazme vakuumnyh iskr [Text] // ЖЭТФ. – 1960. – Vol. 39, No. 6. – P. 1589–1592.

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВОЗДУХА ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОДУВА ВВЕРХ

*С. Н. Кононов<sup>1,2</sup>, Э. С. Левунина<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup>СФТИ НИЯУ МИФИ, Снежинск, Россия

<sup>2</sup>Южно-Уральский государственный университет, Озёрск, Россия

<sup>3</sup>ФГУП «ПО «Маяк», Озерск, Россия

В работе [1, 2] предложена полная система уравнений Навье–Стокса (ПСУНС) в цилиндрических координатах. PSUНС в безразмерном виде описывает поведение сжимаемого вязкого теплопроводного газа в поле действия силы тяжести и с учетом действия силы Кориолиса. В работе [3] представлены явная схема для численного решения системы и результаты счета для состояния покоя, которое является точным решением PSUНС.

Предложенная и проверенная на стационарном режиме схема счета использовалась для моделирования эксперимента. На верхней грани цилиндра модели в  $0,1$  ее радиуса задана вертикальная составляющая скорости газа, равная  $0,1$  скорости звука, что соответствует вытяжке воздуха в трубу под действием вентилятора. Результат моделирования нужно оценить по давлению, температуре и трех составляющих скорости воздуха и в узлах сетки модели.

Для визуализации газодинамических параметров выбран пакет ParaView. Давление в произвольный момент времени на вертикальном срезе модели отображается градиентом цвета. Окружная составляющая скорости так же цветовым градиентом представляется на горизонтальном срезе модели. Поверхности равного давления дают наглядное представление о нестационарных процессах в газе. Полученные результаты в начальные моменты движения соответствуют наблюдениям экспериментов.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2020. – 400 с.
2. **Баутин, С. П.** Численное моделирование трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа [Текст] / С. П. Баутин, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2020. – 290 с.
3. **Баутин, С. П.** Численное моделирование течений в восходящих закрученных потоках с использованием разностной схемы [Текст] / С. П. Баутин, С. Н. Кононов, Э. С. Левунина // Математические структуры и моделирование. – Омск : Омский государственный университет, 2022. – № 3 (63).

## VISUALIZATION OF THE INITIAL AIR FLOWS DURING THE ORGANIZATION OF BLOWING UP

*S. N. Kononov<sup>1,2</sup>, E. S. Levunina<sup>1,3</sup>*

<sup>1</sup>MEPhI, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>SUSU, Ozersk, Russia

<sup>3</sup>FSUE «ПО «Mayak», Ozersk, Russia

In [1, 2], a complete system of Navier-Stokes equations (CSNS) in cylindrical coordinates is proposed. CSNS in a dimensionless form describes the behavior of a compressible viscous heat-conducting gas in the field of gravity and taking into account the action of the Coriolis force. In [3] presents an explicit scheme for the numerical solution of the system and the results of the calculation for the rest state, which is an exact solution of the CSNS.

The calculation scheme proposed and tested in stationary mode was used to simulate the experiment. On the upper face of the cylinder of the model, a vertical component of the gas velocity equal to  $0.1$  of the speed of sound is set at  $0.1$  of its radius, which corresponds to the extraction of air into the pipe under the action of a fan. The simulation result should be evaluated by pressure, temperature, and the three components of air velocity in the nodes of the model grid.

The ParaView package is selected for visualization of gas dynamic parameters. The pressure at any given time on the vertical slice of the model is displayed by a color gradient. The circumferential component of the velocity is also represented by a color gradient on the horizontal slice of the model. Surfaces of equal pressure give a visual representation of non-stationary processes in the gas. The results obtained at the initial moments of motion correspond to the observations of experiments.

### References

1. **Bautin, S. P.** Gas-dynamic theory of ascending swirling current [Text] / S. P. Bautin, I. Y. Krutova, A. G. Obukhov. – Ekaterinburg : USURT, 2020.
2. **Bautin, S. P.** Numerical modeling of three-dimensional unsteady flows of a compressible viscous heat-conducting gas [Text] / S. P. Bautin, A. G. Obukhov. – Ekaterinburg : USURT, 2020.

3. **Bautin, S. P.** Numerical simulation of flows in ascending swirling flows using a difference scheme. Mathematical structures and modeling [Text] / S. P. Bautin, S. N. Kononov, E. S. Levunina. – Omsk : Omsk State University, 2022. – № 3 (63).

6-34

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПИИ ХОЛОДНОЙ И ТЕПЛОВОЙ ЧАСТЕЙ ДАВЛЕНИЯ

*М. Н. Кривошеина<sup>1,2</sup>, Е. В. Туч<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск, Россия

<sup>2</sup>Томский государственный университет, Томск, Россия

Моделирование отклика материала на механические и температурные воздействия при интенсивных нагружениях должно учитывать два вида энергий: потенциальную часть свободной энергии, зависящую от изменения объема и энергию, связанную с изменением тепловых колебаний решетки атомов и молекул в ответ на это изменение объема. При моделировании интенсивного динамического нагружения элементов конструкции уровень достигаемых напряжений большей частью определяется величиной давления. Особенностью моделирования отклика твердого тела на интенсивные воздействия является учет тепловой части давления, отражающей зависимость от плотности энергии колебательных движений атомов и молекул. Давление в материале состоит из двух частей, связанных с этими видами энергии. Холодная часть уравнения состояния определяется зависимостью от степени сжатия материала. Тепловая часть уравнения состояния определяется ангармоничностью сил, действующих между атомами. С ростом температуры вклад тепловой части давления растет, оно может сравняться с холодной частью давления и даже превзойти его [1].

В случае наличия анизотропии механических свойств материала анизотропия холодной части давления в области упругих, пластических деформаций, а также после разрушения материала в условиях сжатия определяется с помощью значений упругих постоянных материала. Анизотропия холодной части давления зависит от различных значений модулей линейного сжатия, определяемых для различных направлений. Анизотропия тепловой части давления определяется анизотропией коэффициентов Грюнайзена. Анизотропия упругих и пластических свойств материала предопределяет введение соответствия равномерной объемной деформации анизотропного давления.

Приведены результаты моделирования ударного нагружения преграды из монокристаллического цинка, характеризующегося трансверсальной изотропией упругих характеристик и коэффициента Грюнайзена при температуре Дебая. Показано, что использование в математической модели анизотропного давления позволяет проводить расчеты с отсутствием выделения упругого предвестника ранее пластической волны сжатия на тыльной поверхности преграды в направлении [0001], как и в условиях натуральных экспериментов [2]. При этом моделирование ударного нагружения преграды с ориентированием в ней свойств материала в перпендикулярном направлении демонстрирует четкий выход упругого предвестника. Численное моделирование ударного нагружения преграды из монокристалла цинка алюминиевым ударником проведено динамическим методом конечных элементов в трехмерной постановке.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0011.

### Литература

1. **Новикова, С. И.** Тепловое расширение твердых тел [Текст]. – М. : Изд-во «Наука», 1974. – 292 с.
2. **Bogach, A. A.** Resistance of zinc crystals to shock deformation and fracture at elevated temperatures [Text] / A. A. Bogach, G. I. Kanel', S. V. Razorenov, A. V. Utkin // Phys. Solid State – 1998. — Vol. 40, No. 10. – P. 1676–1680.

## SIMULATION OF THE ANISOTROPY OF THE COLD AND THERMAL PARTS OF PRESSURE

*M. N. Krivosheina<sup>1,2</sup>, E. V. Tuch<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Institute of Strength Physics and Materials Science of SB RAS, Tomsk, Russia

<sup>2</sup>Tomsk State University, Tomsk, Russia

Modeling the response of a material to mechanical and thermal effects under intense loading should take into account two types of energies: the potential part of the free energy, which depends on the change in volume, and the energy associated with a change in thermal vibrations of the lattice of atoms and molecules in response to this change in volume. When modeling intense dynamic loading of structural elements, the level of stresses achieved is mostly determined by the pressure value. A feature of modeling the response of a solid body to intense impacts is the consideration of the thermal part of the pressure, which reflects the dependence on the energy density of the oscillatory motions of atoms and molecules. The pressure in the material has two parts associated with these types of energy. The cold part of the equation of state is determined by the dependence on the degree of compression of the material. The thermal part of the equation of state is determined by the anharmonicity of the forces acting between the atoms. As the temperature rises, the contribution of the thermal part of the pressure increases; it can equal and even exceed the cold part of the pressure [1].

In the case of anisotropy of the mechanical properties of the material, the anisotropy of the cold part of the pressure in the area of elastic, plastic deformations, as well as after the destruction of the material under compression conditions, is determined using the values of the elastic constants of the material. The anisotropy of the cold part of the pressure depends on different values of the linear compression module determined for different directions. The anisotropy of the thermal part of the pressure is determined by the anisotropy of the Grüneisen coefficients. The anisotropy of the elastic and plastic properties of the material predetermines the introduction of a correspondence between uniform volumetric deformation and anisotropic pressure.

The results of simulation of shock loading of a target made of single-crystal zinc, which is characterized by transversal isotropy of elastic characteristics and the Grüneisen coefficient at the Debye temperature, are presented. It is shown that the use of anisotropic pressure in the mathematical model makes it possible to carry out calculations with no separation of the elastic precursor of the earlier plastic compression wave on the back surface of the target in the [0001] direction, as in natural experiments [2]. At the same time, simulation of the impact loading of the target with the orientation of the material properties in it in the perpendicular direction demonstrates a clear emergence of the elastic precursor. Numerical simulation of shock loading of a target made of a single crystal of zinc by an aluminum projectile was carried out by the dynamic finite element method in a three-dimensional formulation.

The work was carried out within the framework of the state task of the ISPMS SB RAS, subject number FWRW-2021-0011.

### Reference

1. **Novikova, S. I.** Teplovoe rasshirenie tverdyh tel. – M. : Izd-vo “Nauka”, 1974. – 292 p.
2. **Bogach, A. A.** Resistance of zinc crystals to shock deformation and fracture at elevated temperatures [Text] / A. A. Bogach, G. I. Kanel', S. V. Razorenov, A. V. Utkin // Phys. Solid State – 1998. — Vol. 40, No. 10. – P. 1676–1680.

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В ПРИДОННЫХ ЧАСТЯХ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ПРИ УЧЕТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ТЯЖЕСТИ И КОРИОЛИСА

*А. А. Бугаенко, А. О. Казачинский, И. Ю. Крутова, О. В. Опрышко*

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

E-mail: IYKrutova@mephi.ru

Для системы уравнений газовой динамики по предложенной С. П. Баутиным (см. [1–3]) схеме возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков рассмотрена одна конкретная характеристическая задача Коши с начальными данными на непроницаемой горизонтальной плоскости  $z = 0$  [3, 4]. Рассмотренная задача является характеристической задачей Коши стандартного вида, у которой в случае аналитичности входных данных имеется единственное аналитическое решение. Описана процедура построения коэффициентов бесконечных рядов с тем, чтобы конечный отрезок этого ряда применить для приближенного описания течений газа в придонных частях торнадо и тропического циклона. Приводится вид аналитических формул и алгоритм расчета кинетической энергии с использованием аналитического представления отрезка ряда. Распределения газодинамических параметров исследуемых течений представлены в числовом и в графическом виде. Они соответствуют данным натурных наблюдений за торнадо различных классов и за тропическим циклоном средней интенсивности. Анализ геометрических, скоростных и энергетических характеристик рассматриваемых течений показал следующее: разрушительный характер имеют те, наблюдаемые в природе торнадо, у которых кинетическая энергия окружного движения в придонной части больше кинетической энергии радиального движения воздуха в этой части потока.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Торнадо и сила Кориолиса [Текст]. – Новосибирск : Наука, 2008. – 80 с.
2. **Баутин, С. П.** Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2020. – 399 с.
3. **Баутин, С. П.** Аналитическое и численное моделирование течений газа при учете действия силы Кориолиса [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова. – Екатеринбург : УрГУПС, 2019. – 181 с.
4. **Казачинский, А. О.** Построение течений в придонной части восходящих закрученных потоков как решение одной характеристической задачи Коши [Текст] : препринт / А. О. Казачинский, И. Ю. Крутова. – Снежинск : Изд-во СФТИ НИЯУ МИФИ, 2016. – 60 с.
5. **Крутова, И. Ю.** Расчет кинетической энергии течений в придонной части торнадо и тропического циклона [Текст] : препринт / И. Ю. Крутова, О. В. Опрышко. – Снежинск : Изд-во СФТИ НИЯУ МИФИ, 2018. – 45 с.

## ANALYTICAL AND NUMERICAL MODELING OF THE FLOWS IN THE LOWER PARTS OF ASCENDING VORTEX FLOWS

*A. A. Bugaenko, A. O. Kazachinsky, I. Yu. Krutova, O. V. Opryshko*

Snezhinsky Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University “MEPhI”,  
Snezhinsk, Russia

E-mail: IYKrutova@mephi.ru

For a system of gas dynamics equations, according to the scheme proposed by S. P. Bautin (see [1–3]) for the emergence and stable functioning of ascending twisted flows, one specific Cauchy problem with initial

data on an impenetrable horizontal plane  $z = 0$  is considered [4, 5]. The problem considered is a characteristic Cauchy problem of the standard form, which, in the case of analyticity of the input data, has a unique analytic solution. The procedure for constructing the coefficients of infinite series is described so that the final segment of this series can be applied to an approximate description of gas flows in the bottom parts of a tornado and a tropical cyclone. A kind of analytical formulas and an algorithm for calculating the kinetic energy are presented using the analytical representation of a segment of a series. The distributions of gas-dynamic parameters of the investigated currents are presented in numerical and graphical form. They correspond to the data of field observations of tornadoes of various classes and to a tropical cyclone of medium intensity. Analysis of the geometric, velocity and energy characteristics of the currents under consideration showed the following: destructive nature has those observed in nature of the tornado, in which the kinetic energy of the circumferential motion in the bottom part is greater than the kinetic energy of the radial motion of air in this part of the flow.

### References

1. **Bautin, S. P.** The tornadoes and the Coriolis forces [Text]. – Novosibirsk : Nauka, 2008. – P. 80.
2. **Bautin, S. P.** Gas-dynamic theory of upward swirling flows [Text] / S. P. Bautin, I. Yu. Krutova, A. G. Obukhov. – Yekaterinburg: UrGUPS, 2020. – 399 p.
3. **Bautin, S. P.** Analytical and numerical modeling of gas flows taking into account the action of the Coriolis force [Text] / S. P. Bautin, I. Yu. Krutova. – Yekaterinburg: UrGUPS, 2019. – 181 p.
4. **Kazachinsky, A. O.** Construction of flows in the bottom part of ascending swirling flows as a solution to one characteristic Cauchy problem [Text] : preprint / A. O. Kazachinsky, I. Yu. Krutova. – Snezhinsk : publishing house SPTI NRNU MPhI, 2016. – 60 p.
5. **Krutova, I. Yu.** Calculation of the kinetic energy of currents in the bottom part of a tornado and a tropical cyclone [Text] : preprint / I. Yu. Krutova, O. V. Opryshko. – Snezhinsk : publishing house SPTI NRNU MPhI, 2018. – 45 p.

## МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАЧЕСТВА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК ИЗ ПРОИЗВОЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ АЭРО- И ГИДРОДИНАМИКИ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ ЛОГОС

*М. В. Кузьменко, О. Н. Борисенко, К. А. Блажнова, Т. Е. Тимаева*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

Для задания начальных данных и генерации сеток, а также предоставления графических интерфейсов для подготовки и выполнения инженерного анализа в пакете программ Логос [1] ведется разработка препостпроцессора. В рамках этого пакета программ для решения задач аэро- и гидродинамики разрабатываются автоматические генераторы неструктурированных объемных сеток с многогранными элементами методом отсечения [2] и на основе тетраэдров [3].

Расчетные сетки, построенные автоматическими генераторами, не всегда могут быть надлежащего качества. При освоении новых классов расчетов, в случае возникновения проблем с проведением численного моделирования, возникает необходимость проверить корректность структуры сетки. Поэтому важно иметь программный инструмент для оценки качества расчетных сеток и их структуры.

В докладе представлено текущее состояние модуля анализа качества неструктурированных сеток из произвольных многогранников, описаны основные методы модуля анализа качества и его функциональные возможности.

Методы анализа качества сеток могут быть разделены на геометрические и топологические.

Топологические методы могут быть использованы без вычисления актуального положения точек, в то время как геометрические – имеют дело с формой ячеек и границей. К основным топологическим методам анализа качества можно отнести такие, как отсутствие в сетке свободных ребер и граней.

К геометрическим методам можно отнести:

- 1) замкнутость ячейки;
- 2) отсутствие ячеек-соседей с сильно выраженным отличием в отношении объемов и площадей поверхностных граней;
- 3) отсутствие ячеек с самопересечением граней или граней с острыми углами;
- 4) диагностика многогранной сетки на отсутствие мест, в которых не сохранилась информация о характерных особенностях модели.

В настоящее время реализовано несколько функциональных возможностей модуля:

- 1) анализ качества для разных типов ячеек (например, для ячеек пограничного слоя) в процессе построения сетки генератором сеток методом отсечения;
- 2) полный анализ качества сеток после построения;
- 3) сравнение качества сеток, построенных разными версиями генераторов.

В соответствии с найденными некачественными элементами, имеется возможность коррекции сетки в генераторах неструктурированных сеток.

### Литература

1. **Козелков, А. С.** Многофункциональный пакет программ Логос: Физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и теплообмена [Текст] / А. С. Козелков, Ю. Н. Дерюгин, Д. К. Зеленский, С. Н. Полищук, С. В. Лашкин и др. // Препринт № 111. – Саров : РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2013. – 67 с.
2. **Смолкина, Д. Н.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ Логос [Текст] / Д. Н. Смолкина, О. Н. Борисенко, М. В. Черенкова, А. Г. Гиниятуллина, М. В. Кузьменко и др. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Математическое моделирование физических процессов». – 2018. – Вып. 2. – С. 25–39.
3. **Попова, Н. В.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток на основе тетраэдральных сеток с призматическими слоями [Текст] // Вопросы атомной науки и техники. Сер. «Математическое моделирование физических процессов». – 2021. – Вып. 3. – С. 70–83.

## METHODS TO ANALYZE THE QUALITY OF UNSTRUCTURED MESHES OF RANDOM POLYHEDRONS TO SIMULATE AERO- AND HYDRO-DYNAMIC PROBLEMS IN LOGOS SOFTWARE PACKAGE

*M. V. Kuzmenko, O. N. Borisenko, K. A. Blazhnova, T. E. Timaeva*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

A pre-post-processor is being designed for the initial data setting and mesh generation as well as for graphic interfaces to prepare and complete engineering analysis in Logos software package [1]. Automatic mesh generators of unstructured volume meshes with multifaceted elements using the cut-off method [2] and the one on the basis of tetrahedrons [3] have been developed within this software package to solve the problems and aero- and hydrodynamics.

Computation meshes from automatic generators are not always of a proper quality. When mastering new classes of computation in case some problems occur with numerical simulation you may need to check correctness of the mesh structure. So, you have to have a tool to estimate the quality of the computation meshes and their structure.

The paper presents the current state of the module for the quality assessment of unstructured meshes of random polyhedrons and describes the basic methods of the quality assessment module and its functionalities.

The methods to assess the quality of the meshes can be divided into geometric ones and topological ones.

Topological methods can be used without computing actual position of the points, and the geometric ones deal with the shapes of the cells and boundaries. The basic topological methods of the quality assessment comprise such methods as the absence of free edges and facets in the mesh.

The geometric methods comprise:

- 1) closedness of the cell;
- 2) absence of neighboring cells with evident difference with regard to the volume and areas of the surface facets;
- 3) absence of the cells with self-intersection of facets or facets with sharp angles;
- 4) diagnostics of a multifaceted mesh for the absence of points where the information on characteristic features of the model has not been saved.

Several functionalities of the module have been recently realized:

- 1) quality assessment for different types of cells (for example, for the cells of the boundary layer) in the process of mesh generation with the cut-off method;
- 2) full quality analysis of the meshes after generation;
- 3) comparison of the quality of the meshes generated with different versions of generators.

There is a possibility of mesh correction in the generators of unstructured meshes according to the elements of poor quality revealed.

## References

1. **Kozelkov, A. S.** Multifunctional LOGOS software package: Physics and mathematical models to compute the problems of aero- and hydrodynamics and heat exchange [Text] / A. S. Kozelkov, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelensky, S. N. Polishchuk, S. V. Lashkin et al. // Preprint No. 111. – Sarov : RFNC – VNIIEF, 2013. – 67 p.
2. **Smolkina, D. N.** An automatic generator of unstructured polyhedral grids in the “Logos” software preprocessor [Text] / D. N. Smolkina, O. N. Borisenko, M. V. Cherenkova, A. G. Giniyatullina, M. V. Kuz'menko et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2018. – No. 2. – P. 25–39.
3. **Popova, N. V.** Automatic generator of unstructured polyhedral meshes on the base of tetrahedral meshes with prismatic layers [Text] // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2021. – No 3. – P. 70–83.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОКЕАНА С УСВОЕНИЕМ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

*К. П. Беляев<sup>1</sup>, А. А. Кулешов<sup>2</sup>, И. Н. Смирнов<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П. П. Ширшова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В работе исследуется пространственно-временная изменчивость характеристик модели циркуляции океана Nucleus for European Modelling of the Ocean (NEMO) [1] с усвоением данных по методу обобщенного фильтра Калмана (Generalized Kalman filter (GKF)), ранее разработанному авторами [2]. В настоящей работе проведены численные эксперименты с глобальной версией модели NEMO на сетке ORCA1 и с использованием нового способа определения ключевых параметров метода GKF. Проведено моделирование на выбранном временном интервале в 1 месяц пространственно-времен-

ной изменчивости характеристик океана по модели NEMO как с применением метода усвоения данных GKF с использованием архива данных наблюдений с дрейфтеров Argo на различных горизонтах, так и без усвоения. Данные наблюдений усваивались совместно, с учетом их взаимозависимости, а именно корреляционной функции между температурой и соленостью на выделенных горизонтах. Результаты расчетов показывают, что предложенная модификация метода GKF адекватно оценивает данные наблюдений и корректирует результаты модельных расчетов с приемлемой точностью. Таким образом, показана применимость и устойчивость метода GKF с ежесуточным усвоением подповерхностных и глубоководных данных наблюдений для интегрирования модели NEMO на один месяц.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 22-11-00053.

### Литература

1. **Madec, G.** NEMO ocean engine [Text] / G. Madec and the NEMO team // Note du Pole de modélisation de l'Institut Pierre-Simon Laplace. – 2016. – № 27.
2. **Belyaev, K.** An optimal data assimilation method and its application to the numerical simulation of the ocean dynamics [Text] / K. Belyaev, A. Kuleshov, N. Tuchkova, C. A. S. Tanajura // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. – 2018. – Vol. 24, No. 1. – P. 12–25.

## NUMERICAL SIMULATION OF OCEAN DYNAMICS IN CONJUNCTION WITH DATA ASSIMILATION METHOD

*K. P. Belyaev<sup>1</sup>, A. A. Kuleshov<sup>2</sup>, I. N. Smirnov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow, Russia

<sup>3</sup>Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The paper studies the spatiotemporal variability of the characteristics of the Nucleus for European Modeling of the Ocean (NEMO) ocean circulation model [1] with data assimilation by the Generalized Kalman filter (GKF) method, previously developed by the authors [2]. In the present work, numerical experiments were carried out with the global version of the NEMO model on the ORCA1 grid and have used a new method for determining the key parameters of the GKF method. Simulation was carried out on a selected time interval of 1 month of the spatiotemporal variability of ocean characteristics of the NEMO model, both using the GKF data assimilation method and without assimilation. For the assimilation the archive of observational data from Argo drifters at different horizons have been utilized. Observational data namely temperature, salinity and pressure were assimilated jointly, taking into account their interdependence, the correlation function between temperature and salinity at the identified horizons. The calculation results show that the proposed modification of the GKF method adequately evaluates the observational data and correct the results of model calculations with acceptable accuracy. The main conclusion is that the applicability and stability of the GKF method with daily assimilation of subsurface and deep-sea observational data for the integration of the NEMO model for one month is shown.

This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 22-11-00053.

### References

1. **Madec, G.** NEMO ocean engine [Text] / G. Madec and the NEMO team // Note du Pole de modélisation de l'Institut Pierre-Simon Laplace. – 2016. – № 27.
2. **Belyaev, K.** An optimal data assimilation method and its application to the numerical simulation of the ocean dynamics [Text] / K. Belyaev, A. Kuleshov, N. Tuchkova, C. A. S. Tanajura // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. – 2018. – Vol. 24, No. 1. – P. 12–25.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ШАГА ПО ВРЕМЕНИ В МЕТОДЕ КУРОПАТЕНКО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

*Д. А. Мастюк<sup>1</sup>, П. Е. Беляев<sup>1,2</sup>, И. Р. Макеева<sup>1,2</sup>, Т. А. Курприянец<sup>1</sup>, Е. Е. Пигасов<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>Южно-Уральский государственный университет (Научно исследовательский университет), Челябинск, Россия

E-mail: [mastyukda@vniitf.ru](mailto:mastyukda@vniitf.ru)

При моделировании работы и аварийных режимов промышленных установок, применяемых как на АЭС, так и в водородной энергетике, одной из проблем является высокая степень разномасштабности протекающих процессов. Примером такого процесса является истечение водорода через разрыв сосуда высокого давления или гильотинный разрыв трубопроводов высокого давления. При моделировании такого процесса необходимо с высокой точностью учитывать геометрические размеры, причем характерные размеры разрывов измеряются миллиметрами, а области истечения газа могут достигать десятков метров. Также вблизи разрыва скорость потока истекающего газа стремится к скорости звука и экспоненциально убывает при удалении от него.

Как правило, временной шаг интегрирования системы уравнений механики сплошной среды ограничен минимальным элементом сетки в области с наибольшей интенсивностью изменения газодинамических величин. В связи с чем для большинства ячеек шаг интегрирования является существенно заниженным, что приводит к увеличению продолжительности расчета, а также к накоплению вычисленной погрешности из-за возрастающего количества арифметических операций. В данной работе предложен метод, позволяющий рассчитывать подобласти моделируемой системы с индивидуальным временным шагом, зависящим от интенсивности протекающего процесса и размера сеточного элемента, что позволяет уменьшить количество вычислений при моделировании сложных и разномасштабных газодинамических систем.

Представленная модификация основана на методе Куропатенко для неортогональных эйлеровых сеток [1]. В начале расчета для каждого сеточного элемента рассчитывается шаг по времени, удовлетворяющий условию устойчивости. Затем расчетная область разбивается на подобласти таким образом, что в одну подобласть попадают ячейки, для которых вычисленный временной шаг удовлетворяет условию  $dt_{min} \cdot 2^{k-1} < dt_i < dt_{min} \cdot 2^k$ , где  $k$  соответствует уровню подобласти относительно величины временного шага. Временной шаг в соседних (граничащих) подобластях не может отличаться более, чем в 2 раза. Выполнение интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии всей расчетной системы обеспечивается специальным алгоритмом для расчета потоков через границу смежных областей. Результаты моделирования показали работоспособность данного подхода, а также существенный прирост скорости вычислений.

В докладе представлены результаты работ по реализации данного алгоритма, а также проведенные численные расчеты с его использованием.

### Литература

1. **Беляев, П. Е.** Адаптация метода Куропатенко для расчета ударных волн в эйлеровых координатах [Текст] / П. Е. Беляев, И. Р. Макеева, Е. Е. Пигасов, Д. А. Мастюк // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 83–96.

# APPLICATION OF THE INHOMOGENEOUS TIME STEP IN THE KUROPATENKO METHOD FOR MODELING GAS-DYNAMIC PROCESSES IN EULERIAN COORDINATES

*D. A. Mastyuk<sup>1</sup>, P. E. Belyaev<sup>1,2</sup>, I. R. Makeyeva<sup>1,2</sup>, T. A. Kupriyanets<sup>1</sup>, E. E. Pigasov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

E-mail: mastyukda@vniitf.ru

When modeling the operation and emergency modes of industrial installations used both at nuclear power plants and in hydrogen energy, one of the problems is the high degree of variability of the processes. An example of such a process is the outflow of hydrogen through a rupture of a high-pressure vessel or a full-bore rupture of a high-pressure pipeline. During simulation of such processes, it is necessary to take into account geometry of simulated objects with high accuracy, and the characteristic dimensions of the gaps are measured in millimeters, while the size of the outflow area can reach dozens of meters. Moreover, near the rupture, the flow velocity of the exhausted gas tends to the speed of sound and decreases exponentially with distance from it.

The time step of integration of a system of continuum mechanics equations is limited by the minimum grid element in the region with the greatest intensity of change in gas dynamic quantities. Hence, for most cells, the integration step is significantly underestimated, which leads to an unnecessary increase in the duration of the calculation, as well as to the accumulation of computational error due to the increasing number of arithmetic operations. This report presents a method that allows calculating the subdomains of an integrated system with an individual time step depending on the intensity of the process and the size of the grid element, which reduces the number of calculations during simulation of complex and variable-scale gas dynamic systems.

The presented modification is based on the Kuropatenko method for non-orthogonal Euler grids [1]. At the beginning of the calculation, a time step satisfying the stability condition is calculated for each grid element. Then the calculated region is divided into subdomains in such a way that cells fall into one subdomain for which the calculated time step satisfies the condition  $dt_{min} \cdot 2^{k-1} < dt_i < dt_{min} \cdot 2^k$ , where  $k$  corresponds to the level of the subdomain relative to the magnitude of the time step. The time step in neighboring (bordering) subdomains cannot differ by more than 2 times. The laws of conservation of mass, momentum and energy of the entire calculation system are fulfilled by a special algorithm for calculating flows across the border of adjacent subdomains. The simulation results show improved efficiency of this approach, as well as a significant increase in the speed of calculations.

The report presents the results of work on the implementation of this algorithm, as well as numerical calculations carried out using it.

## References

1. **Belyaev, P. E.** Adaptation of the Kuropatenko method for calculating shock waves in Eulerian coordinates [Text] / P. E. Belyaev, I. R. Makeyeva, E. E. Pigasov, D. A. Mastyuk // Bulletin of SUSU. Ser.: Mathematical Modeling and Programming. – 2021. – Vol. 14, No. 1. – P. 83–96.

## ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРОКИДЫВАНИИ ВОЛНЫ ПРИ ВЫХОДЕ ЦУНАМИ НА БЕРЕГ

*С. Л. Дерябин, А. В. Мезенцев*

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

В работе рассматриваются двумерные течения воды, возникающие после наката волны на берег с последующим обрушением. В качестве математической модели используется система уравнений мелкой воды с учетом действия силы тяжести. При выходе волны на берег линия уреза (граница вода–суша) начинает смещаться в сторону суши и решение задачи приходится строить в области с подвижной границей. Кроме того, на самой линии уреза полная глубина воды становится равной нулю, что вносит дополнительную особенность в систему уравнений мелкой воды. Система уравнений мелкой воды в точности совпадает с уравнениями движения политропного газа с показателем политропы  $\gamma = 2$ . При этом линия уреза для уравнений мелкой воды в системе уравнений газовой динамики является границей газ-вакуум. Сама же задача об опрокидывании волны является задачей о распаде специального разрыва [1]. С использованием методики решения задачи о распаде специального разрыва [1] работе [2] построено одномерное течение, а в работе [3] двумерное течение в окрестности линии уреза. Решения были построены в виде локально сходящихся рядов в специальном функциональном пространстве, был получен закон движения границы уреза и найдено значение скорости жидкости на ней.

В данной работе с помощью нестационарных автомодельных переменных решение двумерной задачи об опрокидывании волны будет строиться в физическом пространстве.

В ортогональных криволинейных координатах  $\eta$  и  $\xi$  система уравнений мелкой воды имеет вид

$$\begin{aligned} H_t + H_\eta u + \frac{1}{A} H_\xi v + H \left( u_\eta + \frac{A_\eta}{A} u + \frac{1}{A} v_\xi \right) &= 0, \\ u_t + u_\eta u + \frac{1}{A} u_\xi v - \frac{A_\eta}{A} v^2 + gH_\eta &= gP, \\ v_t + v_\eta u + \frac{1}{A} v_\xi v + \frac{A_\eta}{A} uv + \frac{1}{A} gH_\xi &= gQ. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  – функции известным образом, зависящие от  $\eta$  и  $\xi$ ;  $H$  – глубина жидкости;  $u$ ,  $v$  – проекции вектора скорости на координатные оси  $\eta$  и  $\xi$ .

В системе (1) вводятся нестационарные автомодельные переменные  $t = t'$ ,  $\xi = \xi'$ ,  $y = \eta/t$  и новая неизвестная функция  $C = \sqrt{H}$ , в результате получается система

$$\begin{aligned} tC_t + (u - y)C_y + \frac{v}{A}tC_\xi + \frac{1}{2}C \left( u_y + \frac{A_\eta}{A}tu + \frac{1}{A}tv_\xi \right) &= 0, \\ tu_t + (u - y)u_y + \frac{v}{A}tu_\xi - \frac{A_\eta}{A}tv^2 + 2gCC_y &= gtP, \\ tv_t + (u - y)v_y + \frac{v}{A}tv_\xi + \frac{A_\eta}{A}tuv + \frac{1}{A}gtC_\xi &= gtQ. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальные условия для системы (2) зададим на звуковой характеристике  $\Gamma_1$ , распространяющейся после обрушения волны по невозмущенной жидкости

$$C(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = C^0(t, \xi), \quad u(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = u^0(t, \xi), \quad v(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = v^0(t, \xi). \quad (3)$$

Построим решение задачи (2), (3) в виде ряда по степеням  $t$

$$f(t, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi, y) \frac{t^k}{k!}, \quad f = \{C, u, v\}. \quad (4)$$

Нулевые коэффициенты ряда будут иметь вид

$$C_0 = \frac{1}{3\sqrt{g}} \left( y - u^0(0, \xi) + 2\sqrt{g}C^0(0, \xi) \right), \quad u_0 = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{g} + \frac{1}{3}u^0(0, \xi), \quad v_0 = v^0(0, \xi).$$

Остальные коэффициенты ряда получаются рекуррентным образом с помощью дифференцирования системы (2) по  $t$ , подстановки в полученные выражения  $t = 0$  и уже найденных коэффициентов.

Теорема. Задача (2), (3) имеет единственное аналитическое решение. Решение этой задачи представляется в виде сходящегося ряда (4).

В работе построено локально-аналитическое решение задачи об опрокидывании волны в пространстве физических переменных.

Таким образом, выполнено аналитическое исследование для численного моделирования течения, возникшего после обрушения волны на большой промежуток времени.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Математическое моделирование истечение идеального газа в вакуум [Текст] / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин. – Новосибирск : Наука, 2005.
2. **Bautin, S. P.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin, A. F. Sommer, G. S. Khakimzyanov, N. Yu. Shokina // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2011. – Vol. 26, No. 4. – P. 353–377.
3. **Bautin, S. P.** Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighborhood of a shore line boundary [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 79, Issue 4. – P. 358–366.

## TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF OVERTURNING A WAVE WHEN A TSUNAMI COMES ASHORE

*S. L. Deryabin, A. V. Mezentsev*

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia

The paper considers two-dimensional water flows that occur after a wave rolls onto the shore with a subsequent fall. As a mathematical model, a system of shallow water equations is used, taking into account the action of gravity. When a wave comes ashore, the water edge line (the water-land border) begins to shift towards the land and the solution of the problem has to be built in an area with a movable border. In addition, at the very edge line, the total water depth becomes zero, which introduces an additional feature into the system of shallow water equations. The system of shallow water equations exactly coincides with the equations of motion of a polytropic gas with the polytropic exponent  $\gamma = 2$ . In this case, the water edge line for shallow water equations in the system of gas dynamics equations is the gas-vacuum boundary. The very problem of overturning the wave is the problem of the breakup of a special discontinuity [1]. Using the method of solving the problem of the breakup of a special discontinuity [1], a one-dimensional flow was constructed in [2], and in [3] a two-dimensional flow was constructed in the vicinity of the water edge line. The solutions were constructed in the form of locally converging series in a special functional space, the law of motion of the edge boundary was obtained and the value of the fluid velocity on it was found.

In this paper, with the help of non-stationary self-similar variables, the solution of the two-dimensional wave overturning problem will be constructed in physical space.

In orthogonal curvilinear coordinates  $\eta$  and  $\xi$ , the system of shallow water equations has the form

$$\begin{aligned} H_t + H_\eta u + \frac{1}{A} H_\xi v + H \left( u_\eta + \frac{A_\eta}{A} u + \frac{1}{A} v_\xi \right) &= 0, \\ u_t + u_\eta u + \frac{1}{A} u_\xi v - \frac{A_\eta}{A} v^2 + g H_\eta &= gP, \\ v_t + v_\eta u + \frac{1}{A} v_\xi v + \frac{A_\eta}{A} uv + \frac{1}{A} g H_\xi &= gQ. \end{aligned} \quad (1)$$

Here  $A, P, Q$  are functions in a known way that depend on  $\eta$  и  $\xi$ ;  $H$  is the depth of the fluid;  $u, v$  are projections of the velocity vector on the coordinate axes  $\eta$  and  $\xi$ .

In system (1), nonstationary self-similar variables  $t = t', \xi = \xi', y = \eta/t$ , and a new unknown function  $C = \sqrt{H}$  are introduced. The result is a system

$$\begin{aligned} tC_t + (u - y)C_y + \frac{v}{A} tC_\xi + \frac{1}{2} C \left( u_y + \frac{A_\eta}{A} tu + \frac{1}{A} tv_\xi \right) &= 0, \\ tu_t + (u - y)u_y + \frac{v}{A} tu_\xi - \frac{A_\eta}{A} tv^2 + 2gCC_y &= gtP, \\ tv_t + (u - y)v_y + \frac{v}{A} tv_\xi + \frac{A_\eta}{A} tuv + \frac{1}{A} gtC_\xi &= gtQ. \end{aligned} \quad (2)$$

The initial conditions for system (2) are set on the sound characteristic  $\Gamma_1$ , extending after the fall of the wave through an undisturbed liquid

$$C(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = C^0(t, \xi), \quad u(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = u^0(t, \xi), \quad v(t, \xi, y)|_{\Gamma_1} = v^0(t, \xi). \quad (3)$$

We construct the solution of the problem (2), (3) in the form of a series of degrees  $t$

$$f(t, \xi, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi, y) \frac{t^k}{k!}, \quad f = \{C, u, v\}. \quad (4)$$

The zero coefficients of the series will have the form

$$C_0 = \frac{1}{3\sqrt{g}} \left( y - u^0(0, \xi) + 2\sqrt{g}C^0(0, \xi) \right), \quad u_0 = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{g} + \frac{1}{3}u^0(0, \xi), \quad v_0 = v^0(0, \xi).$$

The remaining coefficients of the series are obtained in a recurrent way by differentiating system (2) by  $t$ , substituting the obtained expressions  $t = 0$  and the coefficients already found.

**Theorem.** Problem (2), (3) has a unique analytical solution. The solution of this problem is represented as a convergent series (4).

In this paper, a locally analytical solution to the problem of wave overturning in the space of physical variables is constructed.

Thus, an analytical study was carried out for numerical simulation of the flow that occurred after the fall of the wave for a long period of time.

## References

1. **Bautin, S. P.** Matematicheskoe modelirovanie istechenie ideal'nogo gaza v vakuum [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin. – Novosibirsk : Nauka, 2005.
2. **Bautin, S. P.** Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin, A. F. Sommer, G. S. Khakimzyanov, N. Yu. Shokina // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. – 2011. – Vol. 26, No. 4. – P. 353–377.

3. **Bautin, S. P.** Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighborhood of a shore line boundary [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Vol. 79, Issue 4. – P. 358–366.

6-40

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ АДАПТАЦИИ СЕТКИ ДЛЯ РАСЧЕТОВ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА

*Н. А. Михайлов, И. В. Глазырин, Н. В. Глазырина, М. А. Писклова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В работе анализируются аспекты численного моделирования автомодельной стадии неустойчивости Рэля–Тейлора с использованием динамической адаптации расчетной сетки. Рассматривается постановка с идеализированными начальными условиями, когда начальное возмущение составляют случайные малоамплитудные коротковолновые гармоники. При таких начальных возмущениях, как показали ранее выполненные численные исследования в рамках ILES и DNS подходов по ряду расчетных методик [1–3], коэффициент роста пузырей  $\alpha_b$  составляет  $0,025 \pm 0,005$ . Расчеты в этих работах были сделаны на кубических равномерных сетках, поскольку основное внимание было уделено определению  $\alpha_b$  и сопутствующих характеристик перемешивания.

В данной работе исследуется вопрос применения динамической адаптации сетки в рамках ILES подхода для воспроизведения результатов на соответствующих мелких равномерных сетках. Рассматривается два типа динамического измельчения: а) локальная адаптация смешанных ячеек и б) адаптация всего плоского слоя, содержащего зону перемешивания – см. рис. 1. Сделано сравнение экономичности этих подходов и их эффективности для воспроизведения  $\alpha_b$ , динамики роста зоны перемешивания, турбулентной кинетической энергии.

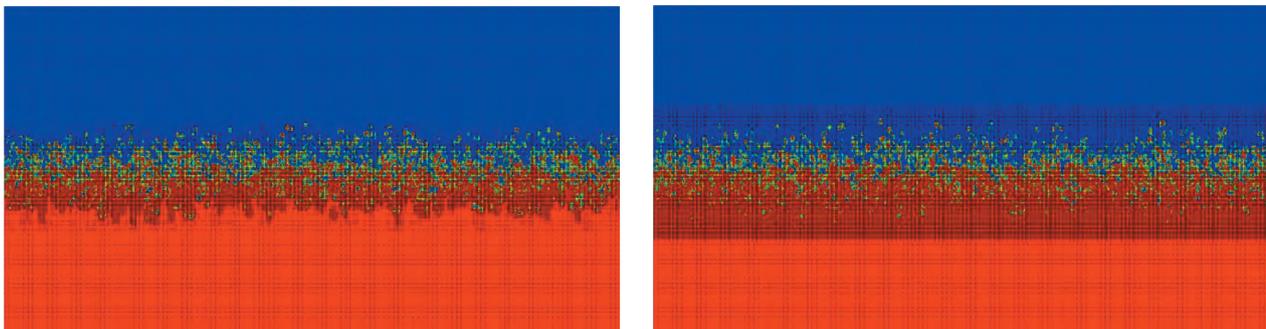


Рис. 1. Типы адаптации сетки:  
слева – локальная, справа – плоским слоем

### Литература

1. **Youngs, D. L.** Rayleigh–Taylor mixing: direct numerical simulation and implicit large eddy simulation [Text] // Phys. Scr. – 2017. – Vol. 92. – P. 074006.
2. **Dimonte, G.** A comparative study of the turbulent Rayleigh–Taylor instability using high-resolution threedimensional numerical simulations: the alpha-group collaboration [Text] / G. Dimonte et al. // Phys. Fluids. – 2004. – Iss. 16. – P. 1668–93.
3. **Livescu, D.** Direct numerical simulations of Rayleigh–Taylor instability [Text] / D. Livescu, T. Wei and M. R. Petersen // J. Phys.: Conf. Ser. – 2011. – Vol. 318. – Iss. 8. – P. 082007.

## AN APPLICATION OF THE DYNAMIC MESH REFINEMENT TO MODEL RAYLEIGH–TAYLOR INSTABILITY

*N. A. Mikhaylov, I. V. Glazyrin, N. V. Glazyrina, M. A. Pisklova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

Numerical aspects of dynamic mesh refinement approach to model Rayleigh–Taylor instability are analyzed in this work. The problem statement with idealized initial conditions is considered so initial perturbations are small random short wavelength harmonics. Previous works via ILES and DNS calculations have shown that such perturbations give bubble amplitude coefficient  $\alpha_b = 0.025 \pm 0.005$  [1–3]. Cubic equal grids have been used in these investigations because the basic aim was there to find  $\alpha_b$  and attendant flow characteristics.

The aim of this work is to find the best approach to use the dynamic mesh refinement in ILES to reproduce consistent equal grids results. Two types of mesh refinement are considered: a) local adaptation of mixed cells and b) adaptation of whole plane layer containing mixing zone – see fig. 1. A comparison of efficiency, resulting mixing zone dynamics and turbulent kinetic energy of these variants is made.

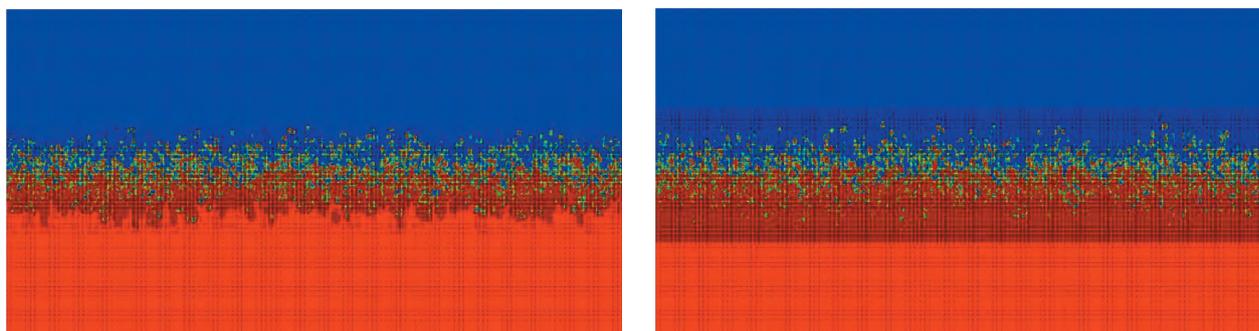


Fig. 1. Mesh refinement types:  
local – on the left, plane layer – on the right

### References

1. **Youngs, D. L.** Rayleigh–Taylor mixing: direct numerical simulation and implicit large eddy simulation [Text] // Phys. Scr. – 2017. – Vol. 92. – P. 074006.
2. **Dimonte, G.** A comparative study of the turbulent Rayleigh–Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: the alpha-group collaboration [Text] / G. Dimonte et al. // Phys. Fluids. – 2004. – Iss. 16. – P. 1668–93.
3. **Livescu, D.** Direct numerical simulations of Rayleigh–Taylor instability [Text] / D. Livescu, T. Wei and M. R. Petersen // J. Phys.: Conf. Ser. – 2011. – Vol. 318. – Iss. 8. – P. 082007.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ЛОКАЛЬНОЙ СЕТОЧНОЙ АДАПТАЦИИ

*Р. В. Муратов, А. А. Серёжкин*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

Использование локальной сеточной адаптации в окрестностях ударных волн позволяет отслеживать и точно переносить возмущения с малыми длинами волн, что позволяет более точно моделиро-

вать развитие гидродинамических неустойчивостей. Существует большое количество способов детектирования ударных волн, в качестве одного из таких способов может выступать классификатор на основе нейронных сетей.

В докладе рассматривается использование локальной сеточной адаптации при численном моделировании задач гидродинамики. При этом в качестве критерия для адаптации выступает классификатор гидродинамических течений на основе искусственной нейронной сети. Результаты моделирования с использованием нейросетевого классификатора сравниваются с результатами моделирования при использовании других критериев сеточной адаптации. В частности, рассматривается так называемый  $\chi$ -критерий адаптации [1, 2], который также позволяет детектировать ударные волны.

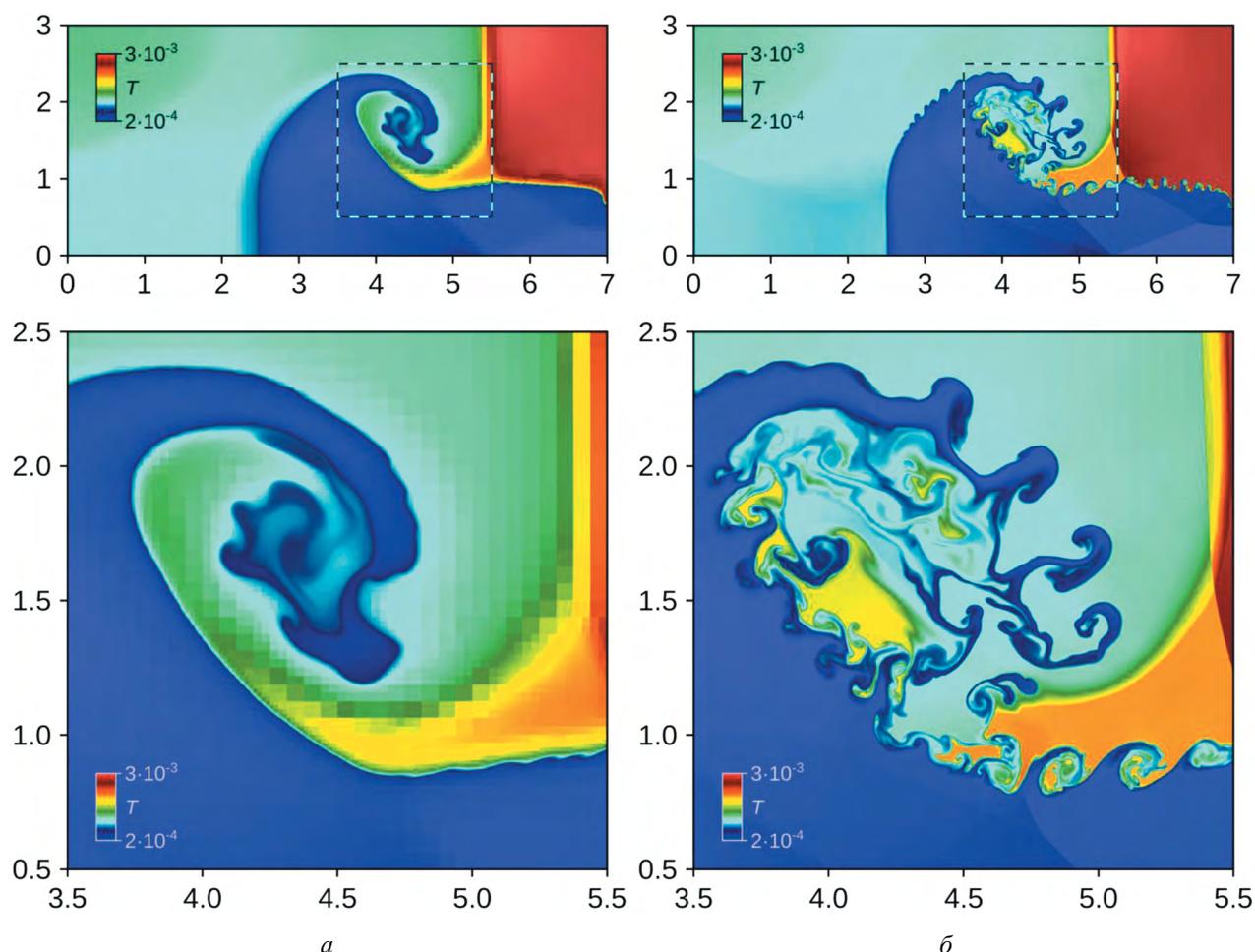


Рис. 1. Результаты численного моделирования задачи с тройной точкой с использованием локальной сеточной адаптации по различным критериям:

$a$  – адаптация по границе;  $b$  –  $\chi$ -критерии адаптации

### Литература

1. **Lohner, R.** An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD [Text] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1987. – Vol. 61. – P. 323–338.
2. **Fryxell, B.** FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermo-nuclear Flashes [Text] / B. Fryxell, K. Olson, P. Ricker et al. // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2000. – Vol. 131. – P. 273–334.

## COMPARISON OF VARIOUS CRITERIA OF ADAPTIVE MESH REFINEMENT

*R. V. Muratov, A. A. Serezhkin*

FSUE "N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics", Moscow, Russia

Usage of mesh refinement in the vicinity of shock waves allows to track and accurately transfer small perturbations with short wavelengths. This technique makes it possible to simulate the formation and development of hydrodynamic instabilities more accurately. There are many ways of shock waves detecting, one of these ways is to use a classifier based pm am artificial neural network.

The report discusses the use of adaptive mesh refinement (adaptation) in the numerical simulation of fluid dynamic problems. We tests an adaptation criterion that uses the hydrodynamic flows classifier based on an artificial neural network. Numerical simulation results are compared with simulation results for other adaptation criteria. In particular, the so-called  $\chi$ -criterion of adaptation [1, 2] is considered. This criterion is also capable of tracking shock waves.

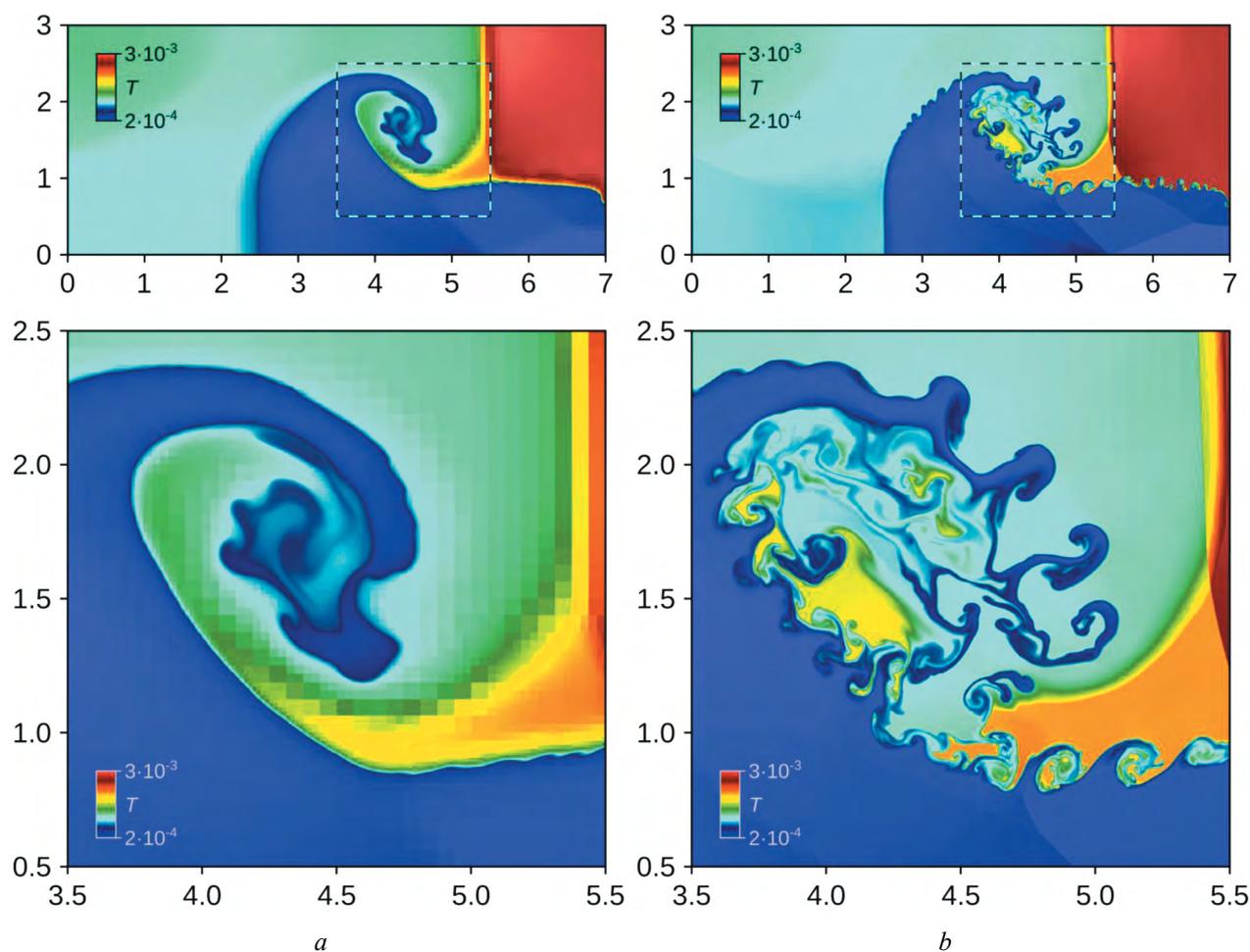


Fig. 1. Results of numerical simulation of triple-point problem using various adaptation criteria:

*a* – interface adaptation; *b* – adaptation with  $\chi$ -criterion

### References

1. **Lohner, R.** An Adaptive Finite Element Scheme for Transient Problems in CFD [Text] // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1987. – Vol. 61. – P. 323–338.

2. Fryxell, B. FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermo-nuclear Flashes [Text] / B. Fryxell, K. Olson, P. Ricker et al. // The Astrophysical Journal Supplement Series. – 2000. – Vol. 131. – P. 273–334.

6-42

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ НА АДАПТИВНО-ВСТРАИВАЕМЫХ СЕТКАХ

*А. М. Мустафин, Н. Н. Веселова, С. Н. Лебедев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

E-mail: geologtema@mail.ru

Данная работа рассматривает методику численного решения уравнения теплопроводности в двумерных задачах с подвижными фазовыми границами на адаптивной сетке с использованием схемы «Ромб». Задачи о распространении тепла при фазовых переходах в литературе называются задачами типа Стефана. Сложность их моделирования заключается в построении вычислительного алгоритма учитывающего такие особенности, как подвижные межфазовые границы и влияние процесса фазового перехода на скорость распространения тепла.

Подход использующий метод сквозного счета на основе применения разностного аналога  $\delta$ -функции и адаптацию разностной сетки в зонах границ фазовых переходов показал свою эффективность для решения одномерных задач. В данной работе исследуется обобщение этой методики на случай двумерных задач с фазовыми переходами.

В докладе приводятся численные решения задач о распространении тепловой волны в неоднородной области и о воздействии теплового пучка на железный брусок. На задаче с тепловой волной наглядно показаны преимущества применения алгоритмов адаптации в области фронта тепловой волны в двумерном пространстве. Из численных результатов, полученных по задаче с железным бруском, следует, что представленный метод сквозного счета достаточно просто обобщается на случай многомерных задач.

Полученные результаты наглядно демонстрируют эффективность применения адаптивно-встраиваемых сеток совместно с методом сквозного счета в случае решения задач типа Стефана.

## NUMERICAL SOLUTION OF 2D PROBLEMS WITH PHASE TRANSITIONS ON ADAPTIVE MESHES

*A. M. Mustafin, S. N. Lebedev, N. N. Veselova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

E-mail: geologtema@mail.ru

The paper discusses a numerical technique for solving the radiative heat transfer equation in 2D problems with moving phase boundaries, using a ROMB scheme on adaptive meshes. Problems on heat transfer during phase transitions are referred to as Stephan type problems. They are difficult to simulate because the calculation algorithm should be constructed so as to allow for moving phase boundaries and the effect of phase transitions on heat velocity.

The approach which uses once-through calculation based on a difference analogue of the  $\delta$ -function and mesh adaptation near phase boundaries has proved to be effective in 1D problems. In this work it is generalized to 2D problems with phase transitions.

The paper provides numerical results for problems on heat wave propagation through a heterogeneous region and on heat beam impact on an iron slab. The first of them vividly demonstrates advantages of mesh adaptation near the heat wave front in 2D space. The second show that the approach is easy to generalize to multidimensional problems.

The results demonstrate the effectiveness of adaptively introduced meshes in the once-through calculation method for solving Stephan type problems.

---

6-43

## **АВТОМОДЕЛЬНАЯ ВОЛНА РАЗРЕЖЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ (ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ)**

*В. Н. Ногин, Н. С. Жилыева*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В настоящее время расчеты деформации материалов конструкций при динамических нагрузках, обусловленных взрывом ВВ, проводятся с учетом их упругопластических свойств. Так как система уравнений, описывающих течение, довольно сложна для анализа, расчеты течений в конкретных системах проводятся численно на ЭВМ. В большинстве численных методик используется один и тот же алгоритм описания пластической текучести [1], основанный на проектировании компонент девиатора тензора напряжений на круг текучести. При простом нагружении, когда компоненты девиатора тензора напряжений меняются пропорционально, такой подход адекватен предположению Мизеса о равенстве второго инварианта тензора напряжений пределу текучести. Возникает вопрос, так ли хорошо алгоритм [1] работает при сложном нагружении, когда компоненты девиатора тензора напряжений меняются непропорционально. Ответ можно получить путем сравнения результатов двумерных численных расчетов с точным аналитическим решением. В данной работе для модельного УРС получено аналитическое решение задачи об одномерной разгрузке упругопластического материала из произвольного напряженного начального состояния. Проведено сравнение с результатами численных расчетов по двумерной программе СПРУТ. Показано, что структура пластического течения существенно зависит от способа корректировки девиатора напряжений в двумерных программных комплексах.

### **Литература**

1. Уилкинс, М. Л. Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике [Текст]. – М. : Мир, 1967. – С. 212–264.

## **A SELF-SIMILAR RAREFACTION WAVE IN ELASTOPLASTIC MATERIAL (EXACT SOLUTION AND NUMERICAL CALCULATIONS)**

*V. N. Nogin, N. S. Zhilayeva*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

Deformation of structural materials under HE detonation induced dynamic loads is calculated with account for their elastoplastic properties. Since the equations that describe the flow are rather difficult to analyze, flows for particular systems are calculated numerically on a computer. Most of the numerical techniques use one and the same algorithm to describe plastic yielding [1]. It is based on the projection of stress deviator components onto the yield circle. For simple loading where the stress deviator components vary

proportionally, this approach is adequate to the Mises assumption that the second invariant of the stress tensor is equal to the yield stress. But does the algorithm perform well in case of sophisticated loading where the stress deviator components do not vary proportionally? The answer can be obtained through comparison of 2D calculations with an exact analytical solution. In this work we present an analytical solution we obtained with a model EOS for the 1D unloading of elastoplastic material from an arbitrary initial state of stress. Comparison with 2D SPRUT calculations is provided. The plastic flow pattern is shown to be strongly dependent on the method of stress deviator correction in 2D codes.

### References

1. **Wilkins, M. L.** Simulation of elastoplastic flows. Computational Methods in Hydrodynamics [Text]. – M. : MIR Publishers, 1967. – P. 212–264.

---

6-44

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ РАЗУМНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

*С. П. Баутин<sup>1</sup>, В. Е. Замыслов<sup>2</sup>, А. Г. Обухов<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Уральский государственный университет путей сообщения», Екатеринбург, Россия

<sup>3</sup>ФГАОУ В «Тюменский индустриальный университет», Тюмень, Россия

В докладе приведены основные результаты созданной в последние годы газодинамической теории восходящих закрученных потоков [1–6], которые в природе встречаются в виде торнадо, тропических циклонов и огненных вихрей. Главный результат этой теории: доказано, что только вращение Земли вокруг своей оси порождает как закрутку газа в указанных потоках, так и кинетическую энергию вращательного движения воздуха в них. В случае Северного полушария закрутка воздуха в тропических циклонах происходит против хода часовой стрелки.

Полученные теоретические и экспериментальные результаты позволяют перейти к практическим применениям созданной газодинамической теории восходящих закрученных потоков.

Одним из важных для практики результатов этой теории являются рекомендации по раннему обнаружению и уничтожению торнадо [4].

Другое приложение теории – создание вихревого энергогенератора, в котором с помощью специально созданного потока воздуха будет производиться электрическая энергия из кинетической энергии вращения Земли вокруг своей оси. В настоящее время ведутся переговоры с Южно-Уральским государственным университетом по созданию соответствующей экспериментальной установки.

Следующее приложение газодинамической теории восходящих закрученных потоков представлено в этом докладе как результат соответствующих трехмерных нестационарных расчетов течений газа. С их помощью моделируется как возникновение и последующий выход тропического циклона на стационарный режим, так и его уничтожение с применением разумных энергетических затрат.

С использованием явной разностной схемы, позволяющей провести распараллеливание вычислений, численно строятся решения полной системы уравнений Навье–Стокса. При этом учитываются сжимаемость газа, эффекты вязкости и теплопроводности, а также действие сил тяжести и Кориолиса.

Результаты расчета одного конкретного циклона, расположенного в Северном полушарии, следующие. Возникновение восходящего вертикального движения в первоначально покоящемся в поле силы тяжести воздухе породило поток со все усиливающейся закруткой газа в соответствующем направлении.

Движение воздуха в возникшем циклоне вышло на стационарное состояние за 72 часа 55 минут, то есть циклон полностью сформировался за трое суток. Диаметр циклона составляет 350–370 км; диаметр глаза циклона 65–70 км; высота вращающейся части циклона примерно 14 км. В процессе счета определялись все газодинамические и энергетические характеристики потока. В частности, максимальная скорость вращательного движения – скорость ветра – равна 83 м/с. Кинетическая энергия различных движущихся потоков в циклоне такова:  $5,599 \cdot 10^{17}$  Дж у вращающейся части циклона;  $2,406 \cdot 10^{14}$  Дж у вертикального движения. Следовательно, у тропического циклона, вышедшего на стационарный режим, кинетическая энергия вращательного движения воздуха в нем в тысячу раз больше кинетической энергии вертикального движения воздуха в циклоне.

После применения внешнего воздействия, прервавшего вертикальное движение воздуха, поток примерно за 26 часов 15 минут перешел в неструктурированное движение, то есть разрушился. Таким образом, вращение Земли вокруг своей оси, а также эффекты вязкости и теплопроводности разрушили циклон чуть более чем за сутки. Это связано с тем, что при отсутствии вертикального потока в циклоне вращение Земли вокруг своей оси закручивает воздух в нем по ходу часовой стрелки. При этом после указанного воздействия затухающий циклон не уходит со своего места на подстилающей горизонтальной плоскости.

### Литература

1. **Баутин, С. П.** Торнадо и сила Кориолиса [Текст]. – Новосибирск : Наука, 2008.
2. **Баутин, С. П.** Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей [Текст] / С. П. Баутин, А. Г. Обухов. – Новосибирск : Наука, 2012.
3. **Баутин, С. П.** Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов, К. В. Баутин. – Новосибирск : Наука, 2013.
4. **Баутин, С. П.** Проблема предсказания и уничтожения смерча [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов // Технологии гражданской безопасности. – 2016. – Т. 13, № 9, 1(47). – С. 70–75.
5. **Баутин, С. П.** Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси [Текст] / С. П. Баутин, С. Л. Дерябин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2017.
6. **Баутин, С. П.** Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков [Текст] / С. П. Баутин, И. Ю. Крутова, А. Г. Обухов. – Екатеринбург : УрГУПС, 2020. [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_44007063\\_99503915.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_44007063_99503915.pdf)

## NUMERICAL SIMULATION OF DESTRUCTION TROPICAL CYCLONES WITH THE USE OF REASONABLE ENERGY COSTS

*S. P. Bautin<sup>1</sup>, V. E. Zamislov<sup>2</sup>, A. G. Obukhov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>Snezhinsky Institute of Physics and Technology of the National Research Nuclear University MEPhI», Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>Ural State University of Railway Transport», Ekaterinburg, Russia

<sup>3</sup>Tyumen Industrial University», Tyumen, Russia

The report presents the main results of the gas-dynamic theory of ascending swirling flows created in recent years [1–6], which occur in nature in the form of tornadoes, tropical cyclones and fire whirlwinds. The main result of this theory is that it is proved that only the rotation of the Earth around its axis generates both the swirling of gas in these flows and the kinetic energy of the rotational movement of air in them. In the case of the Northern Hemisphere, the swirl of air in tropical cyclones occurs counterclockwise.

The obtained theoretical and experimental results allow us to move on to practical applications of the created gas-dynamic theory of ascending swirling flows.

One of the practical results of this theory is recommendations for the early detection and destruction of tornadoes [4].

Another application of the theory is the creation of a vortex energy generator, in which, with the help of a specially created air flow, electrical energy will be produced from the kinetic energy of the Earth's rotation around its axis. Negotiations are currently underway with the South Ural State University to create an appropriate experimental facility.

The following application of the gas-dynamic theory of ascending swirling flows is presented in this report as a result of the corresponding three-dimensional non-stationary calculations of gas flows. With their help, both the emergence and subsequent exit of a tropical cyclone to a stationary regime, and its destruction using reasonable energy costs are modeled.

Using an explicit difference scheme, which allows for parallelization of calculations, numerical solutions are constructed for the complete system of Navier–Stokes equations. This takes into account the compressibility of the gas, the effects of viscosity and thermal conductivity, as well as the action of gravity and Coriolis.

The calculation results for one specific cyclone located in the Northern Hemisphere are as follows. The emergence of an upward vertical motion in the air initially at rest in the gravity field gave rise to a flow with an ever-increasing swirling of the gas in the corresponding direction.

The air movement in the resulting cyclone reached a steady state in 72 hours and 55 minutes, that is, the cyclone was completely formed in three days. The diameter of the cyclone is 350–370 km; cyclone eye diameter 65–70 km; the height of the rotating part of the cyclone is about 14 km. During the calculation, all gas-dynamic and energy characteristics of the flow were determined. In particular, the maximum rotational speed – wind speed – is 83 m/s. The kinetic energy of various moving streams in the cyclone is as follows:  $5.599 \cdot 10^{17}$  J for the rotating part of the cyclone;  $2.406 \cdot 10^{14}$  J for vertical movement. Consequently, in a tropical cyclone that has reached a stationary regime, the kinetic energy of the rotational movement of air in it is a thousand times greater than the kinetic energy of the vertical movement of air in the cyclone.

After applying an external force that interrupted the vertical movement of air, the flow passed into unstructured movement in about 26 hours and 15 minutes, that is, it collapsed. Thus, the rotation of the Earth around its axis, as well as the effects of viscosity and thermal conductivity, destroyed the cyclone in just over a day. This is due to the fact that in the absence of a vertical flow in a cyclone, the rotation of the Earth around its axis spins the air in it in a clockwise direction. In this case, after the specified impact, the damping cyclone does not leave its place on the underlying horizontal plane.

## References

1. **Bautin, S. P.** Tornado and Coriolis force [Text]. – Novosibirsk : Nauka, 2008.
  2. **Bautin, S. P.** Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices [Text] / S. P. Bautin, A. G. Obukhov. – Novosibirsk : Nauka, 2012.
  3. **Bautin, S. P.** Destructive atmospheric vortices: theorems, calculations, experiments [Text] / S. P. Bautin, I. Yu. Krutova, A. G. Obukhov, K. V. Bautin. – Novosibirsk: Nauka, 2013.
  4. **Bautin, S. P.** The problem of predicting and destroying a tornado [Text] / S. P. Bautin, I. Yu. Krutova, A. G. Obukhov // Civil Security Technologies. – 2016. – Vol. 13, No. 9, 1(47). – P. 70–75.
  5. **Bautin, S. P.** Destructive atmospheric whirlwinds and the rotation of the Earth around its axis [Text] / S. P. Bautin, S. L. Deryabin, I. Yu. Krutova, A. G. Obukhov. – Yekaterinburg : UrGUPS, 2017.
  6. **Bautin, S. P.** Gas-dynamic theory of ascending swirling flows [Text] / S. P. Bautin, I. Yu. Krutova, A. G. Obukhov. – Yekaterinburg : UrGUPS, 2020. [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_44007063\\_99503915.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_44007063_99503915.pdf)
-

## ВЫЯВЛЕНИЕ МАЛЫХ СЛАГАЕМЫХ ВРЕМЕННОГО РЯДА

*Г. В. Орлов*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В модуле numba [1] языка Python имеется высоко эффективная векторная программа SVD, реализующая метод разложения двумерной матрицы  $X$  в сумму элементарных, взаимно ортогональных матриц  $\{X_i, i = 1, 2, \dots, \text{rank}(X)\}$  ранга 1, полученных внешним произведением левого и правого собственных векторов, соответствующих собственным (сингулярным) числам  $s_i$  матрицы  $X$ .

Методика SSA [2] реализует идею А. Н. Колмогорова создать из одномерного временного ряда  $U$  Ганкелеву двумерную матрицу  $X$  с постоянными значениями вдоль побочных диагоналей, каждая колонка которой определяется значениями ряда  $U$  в скользящем вдоль этого ряда временном окне заданной длины  $L$ , сдвигаемом на одно значение от предыдущей колонки. Далее, разлагая полученную матрицу  $X$  методом SVD в сумму элементарных матриц  $X_i$  и аппроксимируя их побочные диагонали значением в некоторой метрике, можно получить приближенное представление исходного ряда  $U$  в виде суммы элементарных компонент длины  $L$ , вклад каждой из которых определяется величиной сингулярного значения  $s_i$  матрицы  $X_i$ . Для большинства интересных на практике случаев такое разложение дает высокую точность, что обеспечивают многочисленные теоремы из [2].

В докладе описывается ряд программ на языке Python, которые не только реализуют вышеизложенную идею, но и обеспечивают эффективный и удобный сервис отбора элементарных компонент, которые адекватно соответствуют как временной, так и спектральной априорной информации о них.

Приводится методика работы с программой на примере ряда тестовых задач по разложению исходного временного ряда на аддитивные компоненты – выделение импульса в ожидаемое время и ожидаемой формы, который до сотен раз меньше уровня исходного ряда, фильтрация аддитивного шума с дисперсией, значительно (до десятка и выше раз) превышающей уровень исходного ряда.

Дается краткое описание современных способов автоматической универсальной jit-векторизации [1, 3] и dask-распараллеливания [4].

### Литература

1. Numba Documentation, Release 0.54.0+0.g5888895d3.dirty-py3.7-linux-x86\_64.egg. – Anaconda Aug 19. – 2021. – 741 p. <https://numba.pydata.org>.
2. **Голяндина, Н. Э.** Метод “Гусеница”-SSA: анализ временных рядов [Текст] / Н. Э. Голяндина, В. В. Некруткин, К. А. Браулов // Gistat Group. – 2002. <http://www.gistatgroup.com/gus/>
3. **Постнов, С. С.** Обзор технологий JIT-компиляции [Текст] // International Journal of Open Information Technologies. – 2020. – Vol. 8, No. 9. – P. 8–17. <https://dask.org>

## IDENTIFICATION OF SMALL TERMS OF A TIME SERIES

*G. V. Orlov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

The numba module [1] of Python language offers a highly efficient vector program SVD which implements a method to decompose a two-dimensional matrix  $X$  into a sum of elementary, mutually orthogonal matrices  $\{X_i, i = 1, 2, \dots, \text{rank}(X)\}$  of rank 1, obtained as outer products of left and right eigenvectors corresponding to the singular values  $s_i$  of  $X$ .

The SSA technique [2] implements the idea of A. N. Kolmogorov to form a two-dimensional Hankel matrix  $X$  from a one-dimensional time series  $U$ , such that values along the secondary diagonals are constant and each column is defined by values of  $U$  in a time window of a specified length  $L$ , which moves along the series shifting by one value from the previous column. Then, by decomposing the resulted matrix  $X$  with the

SVD method into the sum of elementary matrices  $X_i$  and approximating their secondary diagonals by a value in some metrics, one can approximately represent the initial series  $U$  as the sum of elementary components of length  $L$ , whose contribution is determined by the singular value  $s_i$  of  $X_i$ . For most cases of practical interest, this decomposition gives high accuracy ensured numerous theorems from [2].

The paper describes a number of Python programs that not only implement the above idea but also provide an effective and convenient service for selecting elementary components that adequately fit both temporal and spectral a priori information about them.

The methodology of working with the program is given by the example of tests where the original time series is decomposed into additive components – separation of a pulse of an expected shape and at an expected time, which is up to hundreds of times lower than the level of the initial series, or filtration of additive noise, whose dispersion is much (ten and more times) higher than the level of the initial series.

A brief description of modern methods for automated universal jit-vectorization [1, 3] and dask-parallelization [4] is given.

### References

1. Numba Documentation, Release 0.54.0+0.g5888895d3.dirty-py3.7-linux-x86\_64.egg. – Anacoda Aug 19. – 2021. – 741 p. <https://numba.pydata.org>.
2. **Golyandina, N. E.** The Caterpillar-SSA method: time series analysis [Text] / N. E. Golyandina, V. V. Nekrutkin, K. A. Braulov // Gistat Group. – 2002. <http://www.gistatgroup.com/gus/>
3. **Postnov, S. S.** Review of JIT compilation technologies [Text] // International Journal of Open Infomation Technologies. – 2020. – Vol. 8, No. 9. – P. 8–17. <https://dask.org>

## КОНКРЕТНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ СИЛЬНОГО СЖАТИЯ ГАЗА И НЕКОТОРЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО МИШЕНЯМ ДЛЯ ЛТС

*С. П. Баутин<sup>1</sup>, Ю. В. Николаев<sup>1</sup>, Е. И. Понькин<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГАОУ ВО «СФТИ НИЯУ МИФИ», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГУП «ПО «Маяк», Озёрск, Россия

E-mail: [spbautin@mail.ru](mailto:spbautin@mail.ru), [unikolaev@list.ru](mailto:unikolaev@list.ru), [epnk@rambler.ru](mailto:epnk@rambler.ru)

Исходные геометрические параметры мишени для лазерного термоядерного синтеза (ЛТС) определяются конфигурацией течения сжатия, возникающего в результате внешнего воздействия на непроницаемую стенку мишени (поршень). В работах [1, 2] построены решения двух начально-краевых задач (НКЗ), описывающих одно- и двумерные течения сжатия политропного газа, которые задают закон движения поверхности сжимающего поршня.

В работе [1] рассматривается НКЗ для системы уравнений газовой динамики (СУГД), описывающая при  $t > 0$  разлет политропного газа в вакуум на косой стенке в пространстве физических автомобильных переменных  $\xi = x/t$ ,  $\eta = y/t$ , а при  $t < 0$  сильное сжатие газа в призматическом объеме. Решение задачи строится в виде сходящихся рядов по степеням переменной  $\vartheta$  для искомым газодинамических параметров  $c$ ,  $u$ ,  $v$  – скорости звука и проекций вектора скорости газа на декартовы оси. Здесь  $\vartheta$  – известная функция независимых переменных, задающая звуковую характеристику, разделяющую искомое течение и центрированную волну Римана. Для известного частного решения рассматриваемой НКЗ [3] можно построить закон движения поршня, сжимающего специальный призматический объем в области двойной волны (ДВ). В работе [4] построен закон движения поршня в области ДВ и установлено, что если газ в области ДВ сжимать воздействием на мишень движением непроницаемого поршня, то вне зависимости от начальной геометрической конфигурации поршень с течением времени начинает выгибаться в сторону косой стенки. В окрестности крайней точки поршня, в которой он касается косой стенки, возникает область большой локальной кумуляции. Эта

область и параметры кумуляции тем больше, чем раньше поверхность непроницаемого поршня будет наклонена к косо́й стенке под острым углом. Отсюда можно дать рекомендацию по исходной геометрии мишени – в качестве мишени брать не шар, а тетраэдр, у которого внешние грани должны быть вогнутыми к центру мишени [5].

В работе [2] рассматривается НКЗ, описывающая безударное одномерное (случаи плоской, цилиндрической и сферической симметрии) «сжатие из покоя в покой»: из исходного покоящегося состояния несжатого газа под воздействием непроницаемого поршня осуществляется безударный переход также в покоящееся, но уже в сжатое однородное состояние. Такое сжатие является энергетически наиболее выгодным, поскольку работа непроницаемого поршня тратится только на сжатие, но не на разгон газа. Используя данное решение НКЗ, было исследовано сжатие газа для двух способов воздействия на мишень. Первый способ – сжатие газа снаружи, когда движение непроницаемого поршня происходит к оси или к центру симметрии сжимаемой области и радиус кривизны поршня стремится к нулю. Второй способ – сжатие изнутри, когда радиус кривизны поршня при сжатии не стремится к нулю. В работе [2] задача о безударном «сжатии из покоя в покой» была решена в обратном направлении изменения времени от  $t = t_*$  к  $t = t_0$  при этом  $t_0 < t_*$ , что соответствует первому способу воздействия на мишень. Здесь  $t_*$  – финальный момент сжатия,  $t_0$  – начальный момент сжатия. В расчете учтено, что в рассматриваемом безударном течении есть конкретная особенность: в финальный момент сжатия  $t = t_*$  возникает скачок плотности на поршне [2]. Численное решение этой задачи в обратном направлении изменения времени позволило получить закон движения сжимающего непроницаемого поршня в виде набора точек пространства переменных  $(t, r)$ , в которых определены скорость и плотность газа. Далее, используя полученный закон движения поршня, задача о безударном «сжатии из покоя в покой» решена в прямом направлении изменения времени от  $t_0$  к  $t_*$ , что соответствует второму способу воздействия на мишень. Это способ является более устойчивым, чем сжатие газа при движении непроницаемого поршня к оси или к центру симметрии. В момент финального сжатия  $t_*$  газ покоится с постоянной плотностью в 10 тысяч раз большей первоначальной. Имеется конкретное свойство течения «сжатия из покоя в покой»: в моменты времени, непосредственно предшествующие итоговому сжатию, происходит отражение газа от неподвижной стенки, которое ведет как к дополнительному повышению плотности газа, так и к уменьшению его скорости. Эта особенность течения «сжатия из покоя в покой» дает основание для следующей рекомендации к мишеням для ЛТС: в центр тетраэдрной мишени заранее помещать тетраэдрный сердечник из очень плохо сжимаемого материала, имеющий соответствующие размеры и стороны которого вогнуты к центру тетраэдра.

Полученные результаты аналитических и численных решений конкретных НКЗ газовой динамики и данные на их основе рекомендации по конструкции мишеней для ЛТС обеспечат более устойчивое и более сильное безударное сжатие.

## Литература

1. **Баутин, С. П.** Автомодельные решения задачи об истечении политропного газа в вакуум с косо́й стенки [Текст] / С. П. Баутин, Е. И. Понькин // Прикладная механика и техническая физика. – 2021. – Т. 62, № 1. – С. 32–42.
2. **Баутин, С. П.** Математическое моделирование сильного сжатия газа [Текст]. – Новосибирск : Наука, 2007. – 312 с.
3. **Сучков, В. А.** Истечение газа в вакуум на косо́й стенке [Текст] // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, № 4. – С. 739–740.
4. **Понькин, Е. И.** Математическое описание двух способов газодинамического воздействия на мишень с использованием решения Сучкова [Текст] // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 2022. – Вып. 2. – С. 27–39.
5. **Баутин, С. П.** Численное решение задачи о сжатии газа из покоя в покой [Текст] / С. П. Баутин, Ю. В. Николаев // Вычислительные технологии. – 2020. – Т. 25, № 5.

## SPECIFIC STRONG GAS COMPRESSION CONFIGURATIONS AND SOME RECOMMENDATIONS ON LTF TARGETS

*S. P. Bautin<sup>1</sup>, Y. V. Nikolaev<sup>1</sup>, E. I. Ponkin<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>Snezhinsk Engineering and Technological Institute of National Research Nuclear University MEPhI,  
Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>FSUE “Mayak Production Association” State Enterprise “Rosatom”, Ozersk, Russia  
E-mail: spbautin@mail.ru, ynikolaev@list.ru, epnk@rambler.ru

The initial geometrical parameters of the target for laser thermonuclear fusion (LTF) are determined by the configuration of the compression flow resulting from external action on the impermeable wall of the target (piston). In [1, 2], solutions of two initial-boundary value problems (IBV) were constructed that describe one- and two-dimensional polytropic gas compression flows, which set the law of motion of the compressing piston surface.

The paper [1] considers the IBV for the system of equations of gas dynamics (SGDE), which describes at  $t > 0$  the expansion of a polytropic gas into vacuum on an oblique wall in the space of physical self-similar variables  $\xi = x/t$ ,  $\eta = y/t$ , and at  $t < 0$  a strong gas compression in a prismatic volume. The solution of the problem is constructed in the form of convergent series in powers of the variable  $\vartheta$  for the desired gas-dynamic parameters  $c$ ,  $u$ ,  $v$  are the speeds of sound and the projections of the gas velocity vector onto the Cartesian axes. Here  $\vartheta$  is a known function of independent variables that defines the sound characteristic separating the desired flow and the centered Riemann wave. For a known particular solution of the considered IBV [3], it is possible to construct the law of motion of a piston compressing a special prismatic volume in the region of a double wave (DW). In [4], the law of motion of the piston in the DW region was constructed and it was found that if the gas in the DW region is compressed by the impact on the target by the movement of an impermeable piston, then, regardless of the initial geometric configuration, the piston begins to bend towards the oblique wall over time. In the vicinity of the extreme point of the piston, where it touches the oblique wall, there is a region of large local cumulation. This area and cumulation parameters are the greater, the earlier the surface of the impermeable piston is inclined to the oblique wall at an acute angle. From here, we can give a recommendation on the initial geometry of the target – as a target, take not a ball, but a tetrahedron, in which the outer faces should be concave towards the center of the target [5].

The work [2] considers an IBV that describes a shock less one-dimensional (cases of plane, cylindrical and spherical symmetry) “compression from rest to rest”: from the initial resting state of an uncompressed gas under the influence of an impermeable piston, a shock less transition is also carried out into a resting, but already compressed homogeneous condition. Such compression is energetically the most favorable, since the work of the impermeable piston is spent only on compression, but not on acceleration of the gas. Using this IBV solution, gas compression was studied for two methods of impact on the target. The first way is to compress the gas from the outside, when the movement of the impermeable piston occurs towards the axis or the center of symmetry of the compressible region and the radius of curvature of the piston tends to zero. The second way is compression from the inside, when the radius of curvature of the piston during compression does not tend to zero. In [2], the problem of shock less “compression from rest to rest” was solved in the reverse direction of time change from  $t = t_*$  to  $t = t_0$  with  $t_0 < t_*$ , which corresponds to the first method of impact on the target. Here  $t_*$  is the final compression moment,  $t_0$  is the initial compression moment. The calculation takes into account that in the shockless flow under consideration there is a specific feature: at the final moment of compression  $t = t_*$ , a density jump occurs on the piston [2]. Numerical solution of this problem in the reverse direction of time change made it possible to obtain the law of motion of a compressing impermeable piston in the form of a set of points in the space of variables  $(t, r)$ , in which the velocity and density of the gas are determined. Further, using the obtained law of piston motion, the problem of shockless “compression from rest to rest” is solved in the forward direction of time change from  $t_0$  to  $t_*$ , which corresponds to the second way of influencing the target. This method is more stable than compressing the gas when the impermeable piston moves towards the axis or towards the center of symmetry. At the moment of final compression  $t_*$ , the gas is at rest with a constant density 10.000 times greater than the initial one. There

is a specific property of the “compression from rest to rest” flow: at the moments of time immediately preceding the final compression, the gas is reflected from the stationary wall, which leads both to an additional increase in the density of the gas and to a decrease in its velocity. This feature of the flow of “compression from rest to rest” gives rise to the following recommendation for targets for LTF: in advance place a tetrahedral core made of a very poorly compressible material in the center of a tetrahedral target, having the appropriate dimensions and the sides of which are concave towards the center of the tetrahedron.

The obtained results of analytical and numerical solutions of specific IBV of gas dynamics and recommendations based on them on the design of targets for LTF will provide more stable and stronger shockless compression.

### References

1. **Bautin, S. P.** Self-similar solutions of the problem of polytropic gas flow along an oblique wall into vacuum [Text] / S. P. Bautin and E. I. Ponkin // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2021. – Vol. 62, No. 1. – P. 32–40 (In Russian).
2. **Bautin, S. P.** Mathematical modeling of strong gas compression [Text]. – Novosibirsk : Nauka, 2007. – 312 p. (In Russian)
3. **Suchkov, V. A.** Flow into a Vacuum along an Oblique Wall [Text] // Prikl. Mat. Mekh. – 1963. – Vol. 27, No. 4. – P. 739–740 (In Russian).
4. **Ponkin, E. I.** Mathematical description of two methods of gas-dynamic impact on the target using Suchkov's solution [Text] // Questions of atomic science and technology. Series “Mathematical modeling of physical processes”. – 2022. – Issue. 2. – P. 27–39.
5. **Bautin, S. P.** Numerical solution of the problem of gas compression from rest to rest [Text] / S. P. Bautin, Yu. V. Nikolaev // Computational technologies. – 2020. – Vol. 25, No. 5.

## ГЕНЕРАТОР НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ МНОГОГРАННЫХ СЕТОК ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ АЭРО- И ГИДРОДИНАМИКИ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ «ЛОГОС»

*Н. В. Попова, О. Н. Борисенко, А. Г. Гиниятуллина, Е. О. Евтифеева, М. В. Кузьменко, В. В. Лазарев, Д. М. Панкратов, Т. В. Цалко, Е. Ю. Арапова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

При численном моделировании течений жидкости или газа, описываемых уравнениями Навье–Стокса, решению основных уравнений и анализу результатов предшествует построение расчетной сетки [1–5]. Наиболее универсальным подходом для дискретизации геометрических моделей с точки зрения времени и эффективности подготовки является использование неструктурированных сеток, которые позволяют проводить описание моделей произвольной сложности в автоматическом режиме. Дополнительно для учета специфики задачи, в сетке могут быть выделены зоны с частично структурированной сеткой (например, сетки из призматических элементов в тонких зонах конструкций). Для разбиения модели на зоны, построения сеток, описывающих специфику задачи, и их объединения желательно использовать автоматические алгоритмы. Автоматизация процесса построения сетки неизбежно накладывает жесткие требования к алгоритмам генерации сетки, увеличивая зависимость качества работы каждого этапа генерации от качества входных данных, полученных с предыдущего этапа. Но использование подобного подхода удобно для инженера, так как позволяет проводить перестроение сетки для получения необходимых характеристик (по описанию особенностей моделиро-

вания, по размерности расчетной модели) за приемлемое время без дополнительных трудозатрат на переподготовку модели.

Приводится описание базовых алгоритмов генератора неструктурированных сеток для тонкостенных конструкций, а также структур представления данных о сетке. Генерация объемной сетки осуществляется от границ поверхностной треугольной сетки [6] по заданному набору входных параметров. Рассматриваются следующие этапы: диагностика исходной сетки, определение характерных особенностей модели, выделение пограничного слоя [7], формирование и обработка поверхностной сетки в тонких областях, построение призматической сетки в тонких областях методом протягивания, формирование замкнутых областей и их дискретизация тетраэдральными ячейками, формирование многогранных ячеек преобразованием (*centroid dual, median dual* [8]), построение призматических ячеек в пограничном слое.

Данная работа проводится в рамках развития препроцессора пакета программ инженерного анализа и суперкомпьютерного моделирования «Логос» [9].

### Литература

1. **Kozelkov, A.** Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes [Text] / A. Kozelkov, V. Kurulin, V. Emelyanov, E. Tyatyushkina, K. Volkov // *Journal of Scientific Computing*. – 2016. – Vol. 67. – P. 176–191.
2. **Sadrehghighi, I.** Mesh generation in CFD [Text] // *A review – CFD Open Series, Patch*. – 2019. – Vol. 1.86.5. – P. 405.
3. **Смолкина, Д. Н.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / Д. Н. Смолкина, О. Н. Борисенко, М. В. Черенкова, А. Г. Гиниятуллина, М. В. Кузьменко и др. // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. – 2018. – Вып. 2. – С. 25–39.
4. **Попова, Н. В.** Автоматический генератор неструктурированных тетраэдральных сеток с призматическими слоями в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / Н. В. Попова, О. Н. Борисенко, И. И. Корнеева, Н. В. Чухманов, Е. В. Потехина и др. // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. – 2020. – Вып. 1. – С. 43–57.
5. **Попова, Н. В.** Автоматический генератор неструктурированных многогранных сеток на основе тетраэдральных сеток с призматическими слоями [Текст] // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. – 2018. – 2021. – Вып. 3. – С. 70 – 83.
6. **Борисенко, О. Н.** Алгоритмы обработки особенностей геометрических моделей при построении поверхностных треугольных сеток в препроцессоре пакета программ «Логос» [Текст] / О. Н. Борисенко, А. Н. Лукичев, Е. О. Евстифеева, Д. М. Панкратов, Т. В. Цалко, А. Г. Гиниятуллина // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. – 2020. – Вып. 3. – С. 40–52.
7. **Лазарев, В. В.** Построение смещенной сетки для выделения пограничного слоя в пакете программ «Логос» [Текст] / В. В. Лазарев, О. Н. Борисенко // *Суперкомпьютерное моделирование и искусственный интеллект: сборник тезисов докладов XXII международной конференция «Харитоновские тематические научные чтения»*. – Саров : ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ», 2021. – С. 81–82.
8. **Barth, T. J.** Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations [Text] // *VKI Lecture Series*. – Belgium : VonKarman Institute for Fluid Dynamics, 1994. – No. 1994-05. – 152 p.
9. ЛОГОС: Пакет программ инженерного анализа и суперкомпьютерного моделирования [Электронный ресурс]. Режим доступа: [www.logos.vniief.ru](http://www.logos.vniief.ru).

## THIN MESHER IN CFD “LOGOS” SOFTWARE PACKAGE

*N. V. Popova, O. N. Borisenko, A. G. Giniyatullina, A. O. Evstifeeva, M. V. Kuzmenko,  
V. V. Lazarev, D. M. Pankratov, T. V. Tsalko, E. Yu. Arapova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov,  
Russia

In the numerical simulation of fluid flows described by Navier–Stokes equations the computational mesh generation is performed prior to the solution of basic equations and analysis of the result [1–5]. Unstructured volume mesh generation is an all-purpose approach for computational domain cell discretization. It takes satisfactory elapsed time, labor intensiveness and provides an arbitrary complex domain with a mesh by virtue of special non-manual mode software. In addition it is necessary that quasi-structured mesh zones to be extracted by reason of the task specific character (e. g. a prismatic cell mesh in thin wall zones). It is advisable to apply practically automatic algorithms for zone partition, meshing, cell uniting. There are strict dictates of cell quality and mesh quality at large and they induce step-to-step interdependence. This kind of approach is easy-to-use since it allows a simulation engineer to save resources related to model parameters resetting and remeshing.

The report describes an automatic generator of unstructured meshes for thin structures and data representation structures. A 3D mesh is generated beginning from the boundaries of a surface triangular mesh approximating an arbitrary closed computational domain [6] and with preliminary setup of a minimal number of parameters. There are multiple stages of the process: surface mesh diagnostics, identification of surface mesh geometric features, boundary layer extraction [7], thin zone surface mesh partition and processing, generation of an extruded prismatic thin mesh, generation of closed regions next to thin regions and their discretization using tetrahedral cells, generation of a secondary polyhedral mesh using a hybrid scheme (*centroid dual, median dual* [8]), generation of prismatic cells in a boundary layer.

The automatic mesh generation is used in the preprocessor of the «Logos» software package for engineering analysis and supercomputer simulation [9].

### References

1. **Kozelkov, A.** Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes [Text] / A. Kozelkov, V. Kurulin, V. Emelyanov, E. Tyatyushkina, K. Volkov // Journal of Scientific Computing. – 2016. – Vol. 67. – P. 176–191.
2. **Sadrehghighi, I.** Mesh generation in CFD [Text] // A review – CFD Open Series, Patch. – 2019. – Vol. 1.86.5. – P. 405.
3. **Smolkina, D. N.** An automatic generator of unstructured polyhedral grids in the Logos software preprocessor [Text] / O. N. Borisenko, M. V. Cherenkova, A. G. Giniyatullina, M. V. Kuz'menko et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2018. – Vol. 2. – P. 25–39.
4. **Popova, N. V.** Automatic generator of unstructured tetrahedral grids with prismatic layers in the «Logos» software package preprocessor [Text] / N. V. Popova, O. N. Borisenko, I. I. Korneeva et al. // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2020. – Vol. 1. – P. 4–57.
5. **Popova, N. V.** Automatic generator of unstructured polyhedral meshes on the base of tetrahedral meshes with prismatic layers [Text] // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2021. – Vol. 3. – P. 70–83.
6. **Borisenk, O. N.** Algorithms of preprocessing singularities in geometric models to generate surface triangular grids in the «Logos» software package preprocessor [Text] / O. N. Borisenko, A. N. Lukichev, A. O. Evstifeeva, D. M. Pankratov, T. V. Tsalko, A. G. Giniyatullina // VANT. Ser.: Mat. Mod. Fiz. Proc. – 2020. – Vol. 3. – P. 40–52.
7. **Lazarev, V. V.** Offset Boundary-Layer Mesh Generation in the «Logos» Software Package [Text] / V. V. Lazarev, O. N. Borisenko // Supercomputer simulations and artificial intelligence : Abstracts. International conference XXII Khariton scientific talks. – Sarov : FSUE «RFNC–VNIIEF», 2021. – P. 81–82.
8. **Barth, T. J.** Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the Euler and Navier–Stokes equations [Text] // VKI Lecture Series. – Belgium : VonKarman Institute for Fluid Dynamics, 1994. – No. 1994-05. – 152 p.

9. LOGOS: A software package for engineering analysis and supercomputing simulations. Available online: [www.logos.vniief.ru](http://www.logos.vniief.ru).

6-48

## КОНВЕКТИВНЫЕ СДВИГОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

*Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков*

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова, УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

При моделировании течений жидкостей одно из основных используемых допущений связано с заменой каждого представительного объема (жидкой частицы) ее приближенным представлением в виде материальной точки, обладающей массой этого объема. Модель материальной точки позволяет пренебрегать геометрическими размерами, полагая ее трех- или двумерным шаром очень маленького радиуса. В виду симметрии формы такого модельного представления и малости его размеров получается пренебрегать наличием части степеней свободы, доступных реальным материальным объектам. Известно, что материальная точка обладает тремя степенями свободы из шести возможных – только линейными смещениями в трех (в случае трехмерной задачи) независимых направлениях. В данной же работе предпринята попытка учесть оставшиеся три степени свободы, отвечающие за вращательные движения.

В докладе обсуждается модель конвективного сдвигового течения вязкой несжимаемой однородной жидкости с учетом моментных напряжений. Изучаются вопросы разрешимости данной переопределенной системы уравнений. В явном виде выводится условие совместности решений данной системы. Обсуждаются вопросы ветвления структуры решения для компонент поля скорости в зависимости от величины вязкости парных (моментных) напряжений.

Представленные в докладе результаты сравниваются с ранее полученными авторами для случая изотермических течений [1] и конвективных течений без учета моментных напряжений [2]. Помимо этого обсуждаются вопросы, связанные с особенностями применения данного подхода к другим видам течений, в том числе и для описания течений стратифицированных по плотности вязких жидкостей [3].

### Литература

1. **Baranovskii, E. S.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses [Text] / E. S. Baranovskii, N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13, No. 8. – P. 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
2. **Бурмашева, Н. В.** Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением [Текст] / Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков // *Изв. вузов. матем.* – 2021. – № 7. – С. 12–22. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22.
3. **Burmasheva, N. V.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows [Text] / N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* – 2021. – Т. 25, No. 3. – P. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.

## CONVECTIVE SHEAR FLOWS OF VISCOUS FLUIDS WITH COUPLE STRESSES

*N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov*

Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg,  
Russia

Department of Information Technologies and Control Systems, Ural Federal University, Ekaterinburg,  
Russia

When modeling fluid flows, one of the main assumptions used is associated with the replacement of each representative volume (fluid particle) by its approximate representation in the form of a material point that has the mass of this volume. The model of a material point allows one to neglect the geometric dimensions, assuming it to be a three- or two-dimensional ball of a very small radius. In view of the symmetry of the form of such a model representation and the smallness of its dimensions, it turns out to neglect the presence of a part of the degrees of freedom available to real material objects. It is known that a material point has three degrees of freedom out of six possible – only linear displacements in three (in the case of a three-dimensional problem) independent directions. In this work, an attempt was made to take into account the remaining three degrees of freedom, which are responsible for rotational motions.

The report discusses a model of a convective shear flow of a viscous incompressible homogeneous fluid, taking into account couple stresses. The questions of solvability of this redefined system of equations are studied. The condition for the compatibility of solutions of this system is derived explicitly. The questions of branching of the structure of the solution for the components of the velocity field depending on the value of the viscosity of pair (moment) stresses are discussed.

The results presented in the report are compared with those previously obtained by the authors for the case of isothermal flows [1] and convective flows without taking into account couple stresses [2]. In addition, issues related to the peculiarities of applying this approach to other types of flows, including those for describing flows of density-stratified viscous fluids [3], are discussed.

### Reference

1. **Baranovskii, E. S.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses [Text] / E. S. Baranovskii, N. V. Burmasheva, E. Y. Prosviryakov // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13, No. 8. – P. 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
2. **Бурмашева, Н. В.** Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением [Текст] / Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвирыков // *Изв. вузов. матем.* – 2021. – № 7. – С. 12–22. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22.
3. **Burmasheva, N. V.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows [Text] / N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* – 2021. – Т. 25, No. 3. – P. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.

## РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

*Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвирыков*

Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова, УрО РАН, Екатеринбург, Россия

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

Динамика изотермических течений невращающейся вязкой несжимаемой жидкости описывается векторным уравнением Навье–Стокса, дополненным уравнением несжимаемости. Указанные дифференциальные уравнения представляют собой четыре связи, накладываемые на четыре неизвестные характеристики – три проекции вектора скорости и давление. При этом данные связи являются нелинейными в виду наличия в левых частях уравнений Навье–Стокса членов конвективной производной. По этой причине вопрос о существовании нетривиального решения указанной системы является крайне сложным.

В докладе рассматривается трехмерное установившееся изобарическое течение. Решение соответствующей системы уравнений ищется в классе Линя–Сидорова–Аристова скоростей, линейных по части координат [1–4]. Рассмотрение изобарического случая позволит дистанцироваться от неоднородности распределения давления и изучить топологию поля скорости без учета этого фактора. Основная гипотеза состоит в том, что сложная структура течения образуется не только за счет термосиловых факторов, но и в виду учета неоднородностей в структуре выбранного класса точных решений.

Подстановка указанного класса решений в систему уравнений Навье–Стокса приводит к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В докладе обсуждается вопрос совместности ее решений, в явном виде приводится условие совместности. Помимо этого, обсуждается способ приведения рассматриваемой системы к виду, в котором каждое уравнение становится изолированным, правда, с функциональными коэффициентами. Обсуждаются вопросы ветвления структуры решения в зависимости от сочетаний параметров, определяющих конкретную краевую задачу.

### Литература

1. **Аристов, С. Н.** Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии [Текст] / С. Н. Аристов, Е. Ю. Просвиряков // Теоретические основы химической технологии. – 2016. – Т. 50, № 3. – С. 294–301.
2. **Baranovskii, E. S.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses [Text] / E. S. Baranovskii, N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, No. 8. – P. 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
3. **Бурмашева, Н. В.** Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением [Текст] / Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвиряков // Изв. вузов. матем. – 2021. – № 7. – С. 12–22. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22.
4. **Burmasheva, N. V.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows [Text] / N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2021. – Т. 25, № 3. – С. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.

## CONVECTIVE SHEAR FLOWS OF VISCOUS FLUIDS WITH COUPLE STRESSES

*N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov*

Sector of Nonlinear Vortex Hydrodynamics, Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg,  
Russia

Department of Information Technologies and Control Systems, Ural Federal University, Ekaterinburg,  
Russia

The dynamics of isothermal flows of a non-rotating viscous incompressible fluid is described by the vector Navier–Stokes equation, supplemented by the incompressibility equation. These differential equations are four links superimposed on four unknown characteristics - three projections of the velocity vector and pressure. At the same time, these relationships are non-linear due to the presence of terms of the convective derivative in the left parts of the Navier–Stokes equations. For this reason, the question of the existence of a non-trivial solution of this system is extremely difficult.

The report considers a three-dimensional steady state isobaric flow. The solution of the corresponding system of equations is sought in the class of Lin–Sidorov–Aristov velocities that are linear in part of the coordinates [1–4]. Consideration of the isobaric case will make it possible to distance ourselves from the inhomogeneity of the pressure distribution and to study the topology of the velocity field without taking this factor into account. The main hypothesis is that the complex flow structure is formed not only due to thermal force factors, but also due to the inclusion of inhomogeneities in the structure of the chosen class of exact solutions.

Substitution of the indicated class of solutions into the system of Navier–Stokes equations leads to a re-defined system of ordinary differential equations. The report discusses the question of the compatibility of its solutions, explicitly gives the condition of compatibility. In addition, a method is discussed for reducing the system under consideration to a form in which each equation becomes isolated, albeit with functional coefficients. The issues of branching the structure of the solution depending on the combinations of parameters that determine a particular boundary value problem are discussed.

### Reference

1. **Aristov, S. N.** A New Class of Exact Solutions for Three-Dimensional Thermal Diffusion Equations [Text] / S. N. Aristov, E. Yu. Prosviryakov // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50, No. 3. – P. 286–293.
2. **Baranovskii, E. S.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses [Text] / E. S. Baranovskii, N. V. Burmasheva, E. Y. Prosviryakov // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, No. 8. – P. 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
3. **Бурмашева, Н. В.** Точные решения для установившихся конвективных слоистых течений с пространственным ускорением [Текст] / Н. В. Бурмашева, Е. Ю. Просвирыков // Изв. вузов. матем. – 2021. – № 7. – С. 12–22. DOI: 10.26907/0021-3446-2021-7-12-22.
4. **Burmasheva, N. V.** Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows [Text] / N. V. Burmasheva, E. Yu. Prosviryakov // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2021. – Т. 25, № 3. – С. 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.

## ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА SPH ТИПА ГОДУНОВА ПУТЕМ ЛИНЕЙНОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ЗНАЧЕНИЙ НА КОНТАКТЕ ЧАСТИЦ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЯЗКИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

*Г. Д. Рублев, С. А. Дьячков, А. Н. Паришков*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

Метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH) с решением задачи Римана на контакте частиц [1] широко используется для моделирования вязких и упругопластических сред с разрывами. Этот метод не требует использования искусственной вязкости для устойчивости решения в окрестности разрыва: устойчивое монотонное решение обеспечивается за счет значительной численной диссипации схемы. Однако, в этом методе используется кусочно-постоянная аппроксимация физических величин на контактах между частицами, что может приводить к излишней схемной вязкости, которая приводит к чрезмерному сглаживанию фронта ударной волны.

Для преодоления этой проблемы в данной работе предлагается метод SPH, где на контактах между частицами используется линейная реконструкция физических величин, аналогично схеме MUSCL в сеточном методе Эйлера. Этот подход применим как для моделирования жидкостей и газов, так и для моделирования упругопластических сред. Предлагаемый в этой работе метод позволяет сущес-

твенно снизить численную диффузию без ущерба для монотонности, что продемонстрировано на рис. 1 и 2.

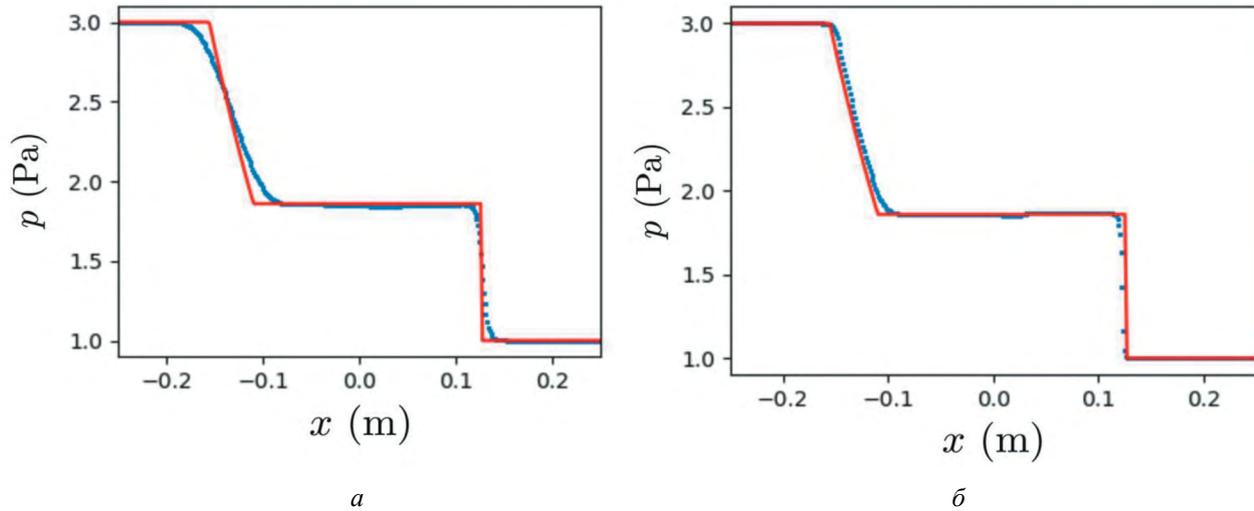


Рис. 1. Распад разрыва в идеальном газе:

*a* – контактный метод SPH; *б* – MUSCL-SPH. Синими точками показано численное решение, сплошная линия – аналитическое решение

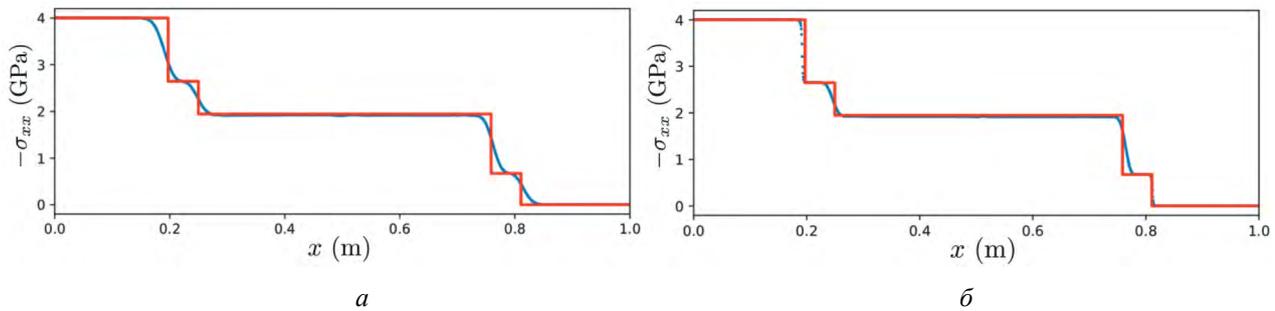


Рис. 2. Распад разрыва в упруго-пластической среде:

*a* – контактный метод SPH, *б* – MUSCL-SPH. Синими точками показано численное решение, сплошная линия – аналитическое решение

В работе оценивается схемная вязкость полученного метода MUSCL-SPH по методике, представленной в работе [2]. Показано, что схемная вязкость нового метода существенно ниже таковой в исходном контактном методе SPH [1].

Предлагаемый метод применяется для моделирования процесса пыления гофрированной свободной поверхности металла при выходе на нее ударной волны в соответствии с работой [3]. На рис. 3 показано, что скорость кумулятивных струй находится в лучшем согласии с экспериментом, в то время как метод [1] дает сильно заниженные значения скорости.

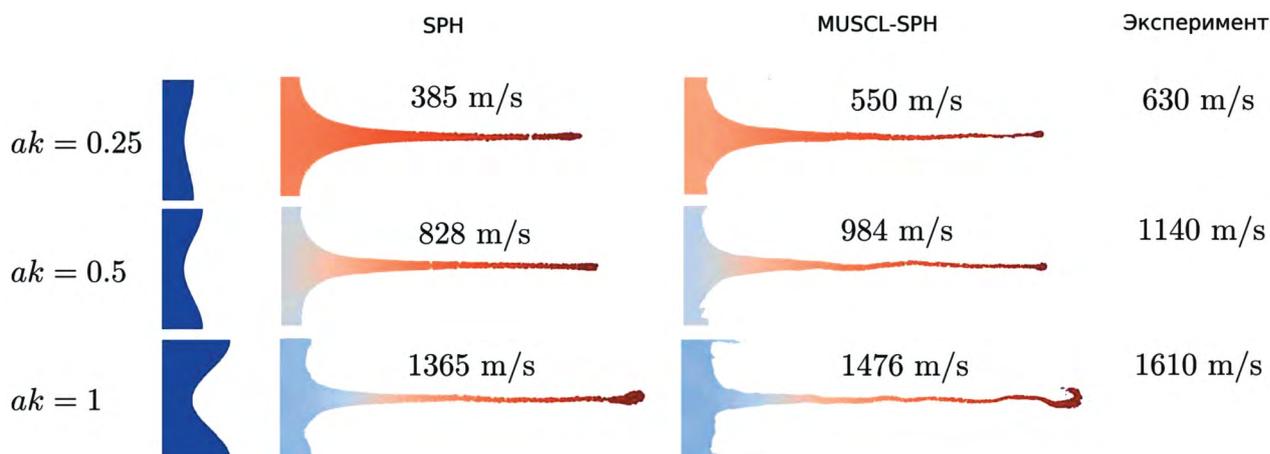


Рис. 3. Моделирование образования струи жидкого олова методами SPH и MUSCL-SPH:  
 $a$  – амплитуда гофрировки,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda = 550$  мкм. На рисунках приведены скорости струй относительно свободной поверхности в сравнении с экспериментом

### Литература

1. **Parshikov, A. N.** Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms [Text] / A. N. Parshikov, S. A. Medin // *Journal of Computational Physics* – 2002. – Vol. 180. – P. 358–382.
2. **Parshikov, A. N., Rublev G. D., Medin S. A., Dyachkov S. A.** // *Proceedings of the 16th SPHERIC International Workshop*. – 2022. – Vol. 16. – P. 186 – 191.
3. **Buttler, W. T.** Unstable Richtmyer–Meshkov growth of solid and liquid metals in vacuum [Text] / W. T. Buttler et al. // *J. Fluid Mech.* – 2012. – Vol. 703. – P. 60–84.

## ENHANCING THE ACCURACY OF THE GODUNOV-TYPE SPH METHOD USING LINEAR RECONSTRUCTION OF THE VALUES AT INTERPARTICLE CONTACTS FOR MODELING VISCOUS AND ELASTIC-PLASTIC MEDIA

*G. D. Rublev, S. A. Dyachkov, A. N. Parshikov*

FSUE “N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics”, Moscow, Russia

The method of smoothed particle hydrodynamics (SPH) with the Riemann problem solution at interparticle contacts [1] is widely used to model liquid and elastic-plastic media with discontinuities. This method does not require the use of artificial viscosity for the stability of the solution in the vicinity of the discontinuity: a stable monotonic solution is provided at the expense of a significant numerical dissipation of the scheme. However, this method uses a piecewise constant approximation of the physical quantities at the contacts between the particles, which may lead to excessive numerical viscosity, which leads to excessive smoothing of the shock front.

To overcome this problem, this paper proposes the SPH method, where a linear reconstruction of physical quantities is used at the contacts between particles, similar to the MUSCL scheme in the finite volume method. This approach is applicable both for modeling liquids and gases and for modeling elastic-plastic media. The method proposed in this work allows one to significantly reduce the numerical diffusion without compromising the monotonicity, as demonstrated in figs. 1 and 2.

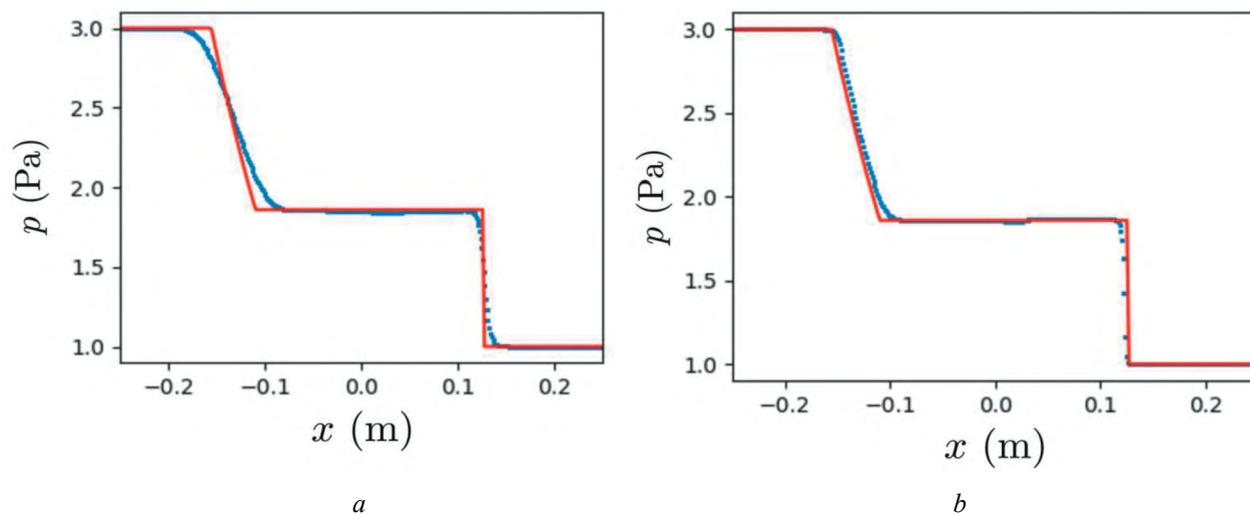


Fig. 1. Shock propagation in an ideal gas:  
*a* – SPH contact method, *b* – MUSCL-SPH. The blue dots show the numerical solution,  
 and the solid line shows the analytical solution

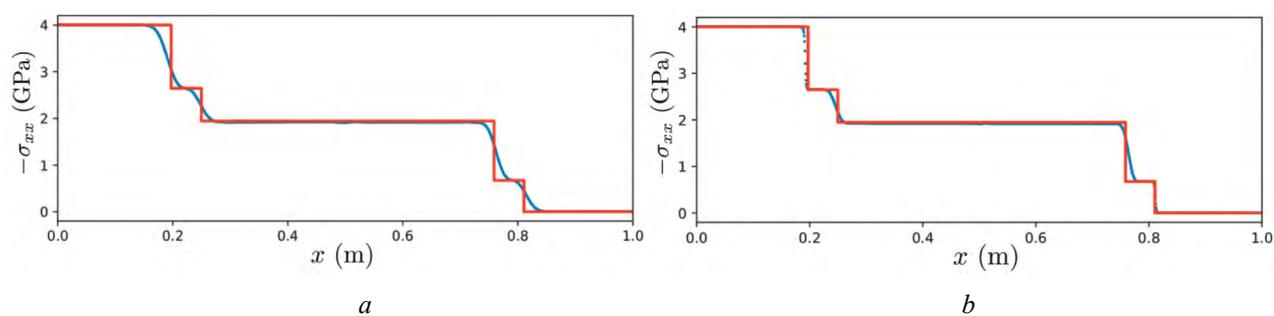


Fig. 2. Shock propagation in an elastic-plastic medium:  
*a* – SPH contact method, *b* – MUSCL-SPH. The blue dots show the numerical solution,  
 and the solid line shows the analytical solution

In this work, the numerical viscosity of the obtained MUSCL-SPH method is evaluated according to the method presented in [2]. It is shown that the numerical viscosity of the new method is significantly lower than that of the original contact SPH method [1].

The proposed method is used to simulate the ejection of material from the corrugated free surface of the metal under shock compression in accordance with the study [3]. fig. 3 shows that the velocities of cumulative jets are in good agreement with the experiment, while the method [1] underestimates velocity values.

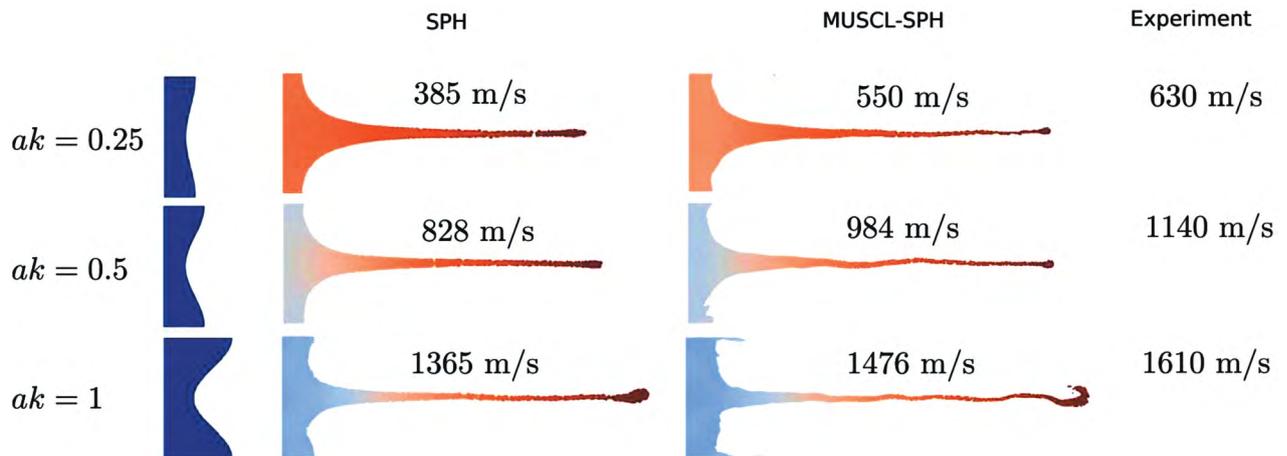


Fig. 3. Simulation of liquid tin jet formation by SPH and MUSCL-SPH methods:

$a$  – corrugations amplitude,  $k = 2\pi/\lambda$  – wave number,  $\lambda = 550$  m. In the figures jet velocities related to the free surface are compared with the experimental ones

### References

1. **Parshikov, A. N.** Smoothed particle hydrodynamics using interparticle contact algorithms [Text] / A. N. Parshikov, S. A. Medin // Journal of Computational Physics – 2002. – Vol. 180. – P. 358–382.
2. **Parshikov, A. N., Rublev G. D., Medin S. A., Dyachkov S. A.** // Proceedings of the 16th SPHERIC International Workshop. – 2022. – Vol. 16. – P. 186 – 191.
3. **Buttler, W. T.** Unstable Richtmyer–Meshkov growth of solid and liquid metals in vacuum [Text] / W. T. Buttler et al. // J. Fluid Mech. – 2012. – Vol. 703. – P. 60–84.

## ПОДСЕТОЧНОЕ ВОСПОЛНЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

*А. А. Серёжкин, С. А. Дьячков, Р. В. Муратов*

ФГУП «Всероссийский НИИ автоматики имени Н. Л. Духова», Москва, Россия

Отличительной особенностью систем дифференциальных уравнений первого порядка гиперболического типа является существование устойчивых разрывных решений. Таких как решение в виде ударной волны для системы уравнений гидродинамики или контактный разрыв для уравнения переноса. Численный расчет данных решений на Эйлеровых сетках приводит к размытию разрывов, в результате чего решение принимает вид непрерывного распределения параметров задачи с конечным градиентом. Это в том числе является следствием кусочно-непрерывной дискретизации переменных в ячейках при расчете временного шага. С целью повышения качества аппроксимации разрывных решений предлагается схема подсеточного восполнения разрывных решений разрывными функциональными зависимостями. При этом возникает задача идентификации разрывных решений на дискретном наборе данных численного расчета. Для этого предлагается использовать анализ дискретных значений переменных в ячейке и ее ближайшем окружении с помощью нейросети, на выходе которой выдается информация о типе решения (непрерывное или разрывное) в локальной области около ячейки.

В докладе предлагаемая методика рассматривается на основе системы уравнений гидродинамики Эйлера. Представлена архитектура нейросети, алгоритм ее обучения и тестирование на базе характерных решений типа ударной волны, переноса контактного разрыва и изэнтропического течения в виде волны разгрузки. Кроме того приводятся алгоритмы подсеточного восполнения разрывных

решений и пример их использования для моделирования одномерных и двумерных течений методом конечного объема.

## **SUB-CELL RECONSTRUCTION OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS WITH USING MACHINE LEARNING ALGORITHMS**

*A. A. Serezhkin, S. A. Dyachkov, R. V. Muratov*

FSUE «N. L. Dukhov All-Russian Research Institute of Automatics», Moscow, Russia

A distinctive feature of hyperbolic systems of first order differential equations is the existence of stable discontinuous solutions. Such as a solution in the form of a shock wave for the system of equations of hydrodynamics or a contact discontinuity for the transport equation. Numerical calculation of these solutions on Euler grids leads to smoothing of discontinuities, as a result of which the solution takes the form of a continuous distribution of state parameters with a finite gradient. This is also a consequence of the piecewise continuous discretization of variables in cells when calculating the time step. In order to improve the quality of approximation of discontinuous solutions, a scheme of sub-cell reconstruction of discontinuous solutions with discontinuous functional dependencies is proposed. This raises the problem of identifying discontinuous solutions on a discrete set of numerical calculation data. To do this, it is proposed to use the analysis of discrete values of variables in the cell and its immediate neighbours using a neural network, the output of which provides information about the type of solution (continuous or discontinuous) in the local region near the cell.

The proposed technique is considered on the basis of the Euler system of equations of hydrodynamics. The architecture of the neural network, the algorithm for its training and testing based on typical solutions such as a shock wave, transfer of a contact discontinuity and isentropic flow in the form of an unloading wave are presented. In addition, algorithms for sub-cell reconstruction of discontinuous solutions and an example of their use for modeling one-dimensional and two-dimensional flows by the finite volume method are given.

---

6-52

## **АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

*С. А. Серов*

Институт теоретической и математической физики,  
ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики», Саров, Россия

E-mail: S.A.Serov@inbox.ru

Обсуждаются асимптотические решения кинетического уравнения Больцмана для разреженных газов. Отмечается несостоятельность известного метода Энского асимптотического решения уравнения Больцмана и рассматривается его корректная модификация.

Получена система уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики, соответствующая первому порядку в приближенном (асимптотическом) методе решения системы кинетических уравнений Больцмана в асимптотическом пределе (подходе), предложенном В. В. Струминским. Эту систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики предлагается использовать для описания турбулентных течений разреженных газов

Показано, что функции распределения скоростей частиц, полученные предлагаемым методом и методом Энского, в подходе Энского, эквивалентны с точностью до членов первого порядка малости асимптотического разложения, но, вообще говоря, различаются в следующем порядке асимптотического разложения.

## ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE BOLTZMANN EQUATION AND TURBULENCE

*S. A. Serov*

Institute of Theoretical and Mathematical Physics,  
FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov,  
Russia

E-mail: S.A.Serov@inbox.ru

Asymptotic solutions of the kinetic Boltzmann equation for rarefied gases are discussed. Groundlessness of the known Enskog method of the asymptotic solution of the equation Boltzmann is noted and his correct modification is considered.

The equations system of multicomponent non-equilibrium gas dynamics is derived, that corresponds to the first order in the approximate (asymptotic) method for solution of the system of kinetic Boltzmann equations in an approximate limit (approach) offered by V. V. Struminskii. This system of equations of multicomponent non-equilibrium gas dynamics is proposed to be used to describe turbulent flows of rarefied gases.

It is shown, that the velocity distribution functions of particles, obtained by the proposed method and by Enskog's method within Enskog's approach, are equivalent up to the infinitesimal first order terms of the asymptotic expansion but (generally speaking) differ in the next order.

---

6-53

## ВЛИЯНИЕ МАКСИМУМА ПЛОТНОСТИ ВОДЫ НА ТЕМПЫ ОХЛАЖДЕНИЯ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД

*О. А. Симонов<sup>1,3</sup>, Л. Н. Филимонова<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Тюменский Научный Центр СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>2</sup>Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Тюмень, Россия

<sup>3</sup>Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

При проектировании и сооружении зданий, скважин, трубопроводов, а также других объектов, постоянно находящихся в условиях отрицательных температур, необходимо учитывать промерзание и протаивание грунтов. В теплый период поверхностный слой грунта, подстилаемый многолетне-мерзлыми породами, чаще всего высокопористый песок, оттаивает и образует переувлажненный слой породы. При охлаждении протаявшего слоя термостабилизатором, в пористой среде возникают градиенты температуры, приводящие к конвекции.

Влияние конвективного переноса тепла в пористых средах хорошо изучено, но недостаточное внимание уделяется исследованию влияния инверсии плотности воды на конвективные течения в пористых средах. Хорошо известно, что при атмосферном давлении максимальная плотность воды ( $999,9720 \text{ кг/м}^3$ ) наблюдается при температуре  $3,984^\circ\text{C}$  [1]. Это явление приводит к полной структурной перестройке всего течения и изменяет темп охлаждения (нагрева) пористой среды. При определенных условиях холодная жидкость начинает подниматься, охлаждая верхние слои пористой среды, что приводит к изменению характера теплопереноса и возникновению гидродинамической неустойчивости [2].

Целью настоящей работы – в численном эксперименте оценить влияние инверсии плотности воды на теплоперенос в влагонасыщенной пористой среде в окрестности вертикально расположенной трубы охлаждающего устройства.

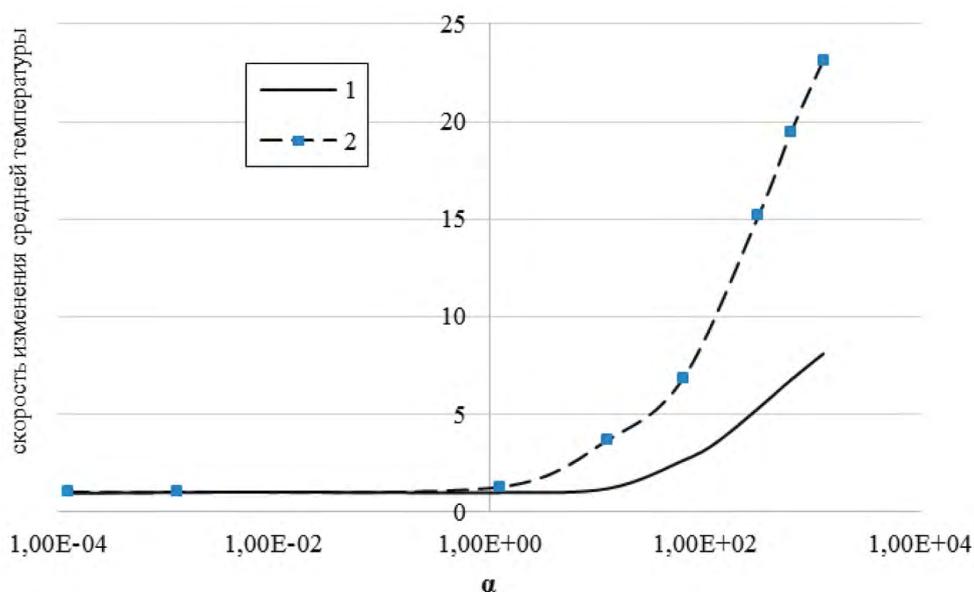
Конвективное течение в пористой среде моделировалось в приближении Бринкмана–Буссинеска. Для оценки влияния конвективного и кондуктивного механизма теплопереноса предлагается исполь-

звать безразмерный параметр  $\alpha$  – аналог числа Релея, как отношение изменения температуры за счет молекулярной теплопроводности к изменению температуры за счет конвекции:

$$\alpha = \frac{(\rho - \rho_0) C_w m k g h}{(\rho C)_{ef} \nu \chi} \quad (1)$$

где  $k$  – проницаемость пористой среды ( $\text{м}^2$ );  $\nu$  – кинематическая вязкость воды ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $g$  – ускорение свободного падения ( $\text{м}/\text{с}^2$ );  $h$  – характерный размер системы ( $\text{м}$ );  $(\rho - \rho_0)$  – характерная разница между максимальными и минимальными значениями плотности воды ( $\text{кг}/\text{м}^3$ ); за  $\rho_0$  – примем плотность воды при нулевой температуре, а за  $\rho$  примем максимальную плотность воды, следовательно,  $\Delta\rho = 0,129$ ;  $(\rho C)_{ef} = m\rho_w C_w + (1 - m)\rho_s C_s$  – эффективный коэффициент теплосодержания насыщенной пористой среды ( $\text{Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К})$ );  $\rho_{w,s}$  – плотность воды и скелета пористой среды ( $\text{кг}/\text{м}^3$ );  $C_{w,s}$  – теплоемкость воды и скелета ( $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ );  $\chi$  – коэффициент температуропроводности ( $\text{м}^2/\text{с}$ ).

Для анализа зависимости скорости охлаждения от проницаемости (параметр  $\alpha$ ), по зависимостям средней температуры от времени, вычислена скорость охлаждения вблизи максимума плотности воды ( $277^\circ\text{К}$ ) для различных значений параметра  $\alpha$ . На рис. приведены результаты сравнения с расчетами, в которых инверсия плотности не учитывается. Скорости обезразмерены на скорость охлаждения, рассчитанную без учета конвекции. Данные представлены в логарифмическом масштабе.



Зависимость средней скорости охлаждения пористой среды от параметра  $\alpha$  (проницаемости):

1 – с учетом максимума плотности воды; 2 – без учета максимума плотности воды

Приведенные данные подтверждают роль параметра  $\alpha$  в формировании режимов конвективного течения в пористой среде. В расчетах, выполненных без учета наличия у воды максимума плотности перенос тепла водой, начинает играть существенную роль при  $\alpha$  больших, чем единица.

Наличие максимума плотности у воды приводит к тому, что конвекция начинает играть решающую роль при более высокой проницаемости пористой среды. Критическим является значение  $\alpha$  близкое к 100. При  $\alpha < 1$  скорости охлаждения слабо различаются для любых принятых в расчетах допущений. При значениях  $\alpha$  близких к единице, приближения в которых не учитывается наличие максимума плотности будут давать ошибочные результаты. Из-за перестройки течения конвекция начинает играть решающую роль в охлаждении системы только тогда, когда  $\alpha$  становится значительно больше десяти.

Из приведенных данных следует, что при выборе методики решения задач тепломассопереноса в водонасыщенных пористых средах вблизи нулевых температур необходимо оценить характерные

параметры системы и рассчитать параметр  $\alpha$ . В случае если этот параметр меньше единицы, возможно провести расчет без учета конвективных потоков. В других случаях необходим расчет с учетом конвекции и обязательным использованием модели воды учитывающей наличие максимума плотности. Не учет этой особенности строения воды будет приводить к кратным (в 3–4 раза) ошибкам определения интегральных параметров.

Статья подготовлена в рамках технологического проекта «Цифровой керн» Западно-Сибирского межрегионального научно-образовательного центра мирового уровня.

### Литература

1. **Anselmi, C.** Free convection experiments in water and deuterated mixtures at temperatures including the density maxima [Text] / C. Anselmi, M. De Paz, A. Marciano, M. Pilo, G. Sonnino // Int. J. Heat Mass Transf. – 1990. – Vol. 33, No. 11. – P. 2519–2524.
2. **СИМОНОВ, О. А.** Численное исследование влияния поверхностного натяжения на структуру течения в цилиндрическом сосуде с учетом максимума плотности воды [Текст] / О. А. Симонов, Л. Н. Филимонова // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2019. – Т. 5, № 3. – С. 131–146. DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-131-146.

## EFFECT OF THE MAXIMUM DENSITY OF WATER ON COOLING RATES OF WATER-SATURATED POROUS MEDIA

*O. A. Simonov<sup>1,3</sup>, L. N. Filimnova<sup>2,3</sup>*

<sup>1</sup>Tyumen Scientific Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>2</sup>Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia

<sup>3</sup>Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

When designing and constructing buildings, wells, pipelines, as well as other objects that are constantly in conditions of negative temperatures, it is necessary to take into account the freezing and thawing of soils. During the warm period, the surface layer of soil underlain by permafrost rocks, most often highly porous sand, thaws and forms a waterlogged rock layer. When the thawed layer is cooled by a heat stabilizer, temperature gradients occur in a porous medium, leading to convection

The influence of convective heat transfer in porous media is well studied, but insufficient attention is paid to the study of the effect of water density inversion on convective flows in porous media. It is well known that at atmospheric pressure the maximum density of water ( $999.9720 \text{ kg/m}^3$ ) is observed at a temperature of  $3.984^\circ\text{C}$  [1]. This phenomenon leads to a complete structural restructuring of the entire flow and changes the rate of cooling (heating) of the porous medium. Under certain conditions, the cold liquid begins to rise, cooling the upper layers of the porous medium, which leads to a change in the nature of heat transfer and the occurrence of hydrodynamic instability [2].

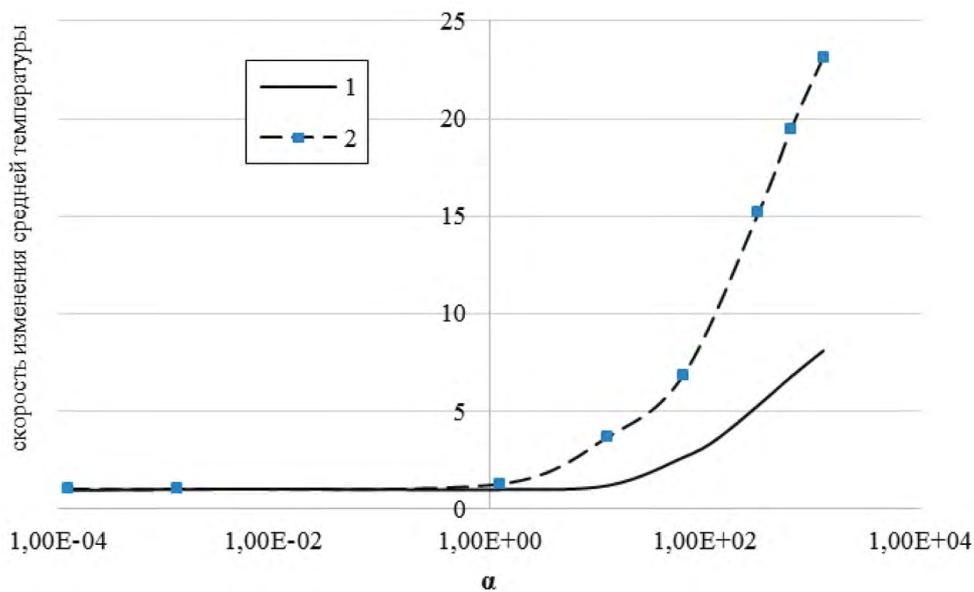
The aim of this work is to evaluate in a numerical experiment the effect of inversion of water density on heat and mass transfer in a moisture-saturated porous medium in the vicinity of a vertically positioned cooling device pipe.

Convective flow in a porous medium was modeled in the Brinkman–Boussinesq approximation. To assess the influence of the convective and conductive mechanism of heat transfer, it is proposed to use the dimensionless parameter  $\alpha$  – an analogue of the Rayleigh number, as the ratio of temperature change due to molecular heat conduction to temperature change due to convection:

$$\alpha = \frac{(\rho - \rho_0) C_w m k g h}{(\rho C)_{ef} \nu \chi} \quad (1)$$

where  $k$  is the permeability of the porous medium ( $m^2$ );  $\nu$  is the kinematic viscosity of water ( $m^2/s$ );  $g$  is the free fall acceleration ( $m/s^2$ );  $h$  is the characteristic size of the system ( $m$ );  $(\rho - \rho_0)$  – characteristic difference between the maximum and minimum values of water density ( $kg/m^3$ ); for  $\rho_0$  – we will take the density of water at zero temperature, and for  $\rho$  we will take the maximum density of water, therefore,  $\Delta\rho = 0,129$ ;  $(\rho C)_{ef} = m\rho_w C_w + (1 - m)\rho_s C_s$  – the effective coefficient of heat content of the saturated porous medium ( $J/(m^3 \cdot K)$ );  $\rho_{w,s}$  – the density of water and the skeleton of the porous medium ( $kg/m^3$ );  $C_{w,s}$  – heat capacity of water and skeleton ( $J/(kg \cdot K)$ );  $\chi$  is the coefficient of thermal diffusivity ( $m^2/s$ ).

To analyze the dependence of the cooling rate on the permeability (parameter  $\alpha$ ), according to the dependences of the average temperature on time, the cooling rate was calculated near the maximum water density ( $277^\circ K$ ) for various values of the parameter  $\alpha$ . The figure shows the results of a comparison with calculations in which the density inversion is not taken into account. The velocities are dimensionless to the cooling rate calculated without taking into account convection. Data are presented on a logarithmic scale.



Dependence of the average cooling rate of the pores of the medium on the parameter  $\alpha$  (permeability):

1 – taking into account the stability of the maximum increase in water; 2 – without taking into account the maximum density of water

The data presented confirm the role of the parameter  $\alpha$  in the formation of convective flow regimes in a porous medium. In calculations performed without taking into account the presence of a density maximum in water, the heat transfer by water begins to play a significant role at  $\alpha$  greater than unity.

The presence of a maximum density in water leads to the fact that convection begins to play a decisive role at a higher permeability of the porous medium. The critical value is  $\alpha$  close to 100. At  $\alpha < 1$ , the cooling rates differ little for any assumptions made in the calculations. For values of  $\alpha$  close to unity, approximations in which the presence of a density maximum is not taken into account will give erroneous results. Due to the restructuring of the flow, convection begins to play a decisive role in cooling the system only when  $\alpha$  becomes significantly greater than ten.

It follows from the above data that when choosing a method for solving problems of heat and mass transfer in water-saturated porous media near zero temperatures, it is necessary to estimate the characteristic parameters of the system and calculate the parameter  $\alpha$ . If this parameter is less than one, it is possible to carry out the calculation without taking into account convective currents. In other cases, it is necessary to calculate taking into account convection and the obligatory use of a water model that takes into account the presence of a maximum density. Not taking into account this feature of the structure of water will lead to multiple (3–4 times) errors in determining the integral parameters.

## References

1. **Anselmi, C.** Free convection experiments in water and deuterated mixtures at temperatures including the density maxima [Text] / C. Anselmi, M. De Paz, A. Marciano, M. Pilo, G. Sonnino // Int. J. Heat Mass Transf. – 1990. – Vol. 33, No. 11. – P. 2519–2524.
2. **Simonov, O. A.** Numerical study of the influence of surface tension on the structure of the flow in a cylindrical vessel, taking into account the maximum density of water [Text] / O. A. Simonov, L. N. Filimonova // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, gas, energy. – 2019. – Vol. 5, No. 3. – P. 131–146. DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-131-146.

6-54

## СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ТЕОРИИ ИНТЕНСИВНЫХ УНИПОЛЯРНЫХ И БИПОЛЯРНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ И ИХ ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*М. А. Завьялов, В. А. Сыровой*

Всероссийский электротехнический институт – филиал ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Москва, Россия

Постановки основных задач теории интенсивных пучков и экспериментальные результаты приведены в монографиях [1, 2].

Главные направления современной теории сводятся к перечисленным ниже проблемам.

1. Расчет формирующих электродов в двумерном и трехмерном случаях [1, 3].
2. Формулировка нетрадиционных моделей и приближенных методов расчета с ранее не существовавшими возможностями (геометризованная теория в  $l$ -,  $\varphi$ -,  $W$ -представлениях) [1, 4, 5].
3. Тестирование известных и новых приближенных моделей на эталонных точных решениях [6].
4. Исследование адекватности численных пакетов траекторного анализа в разномасштабных задачах с пучками, испытывающими линейную компрессию  $L \gtrsim 30$  [7].
5. Оценка численных моделей транспортировки ленточных пучков с вытянутым прямоугольным сечением [8].
6. Использование плазменных анодов и дополнительной инжекции ионов из-за катода для увеличения в 4–8 раз мощности прибора без повышения напряжения. В случае плазменного анода – упрощение конструкции за счет устранения электронной системы подогрева катода, высоковольтных подводов и трансформаторов [9–14]. Теоретические модели подтверждены экспериментом [2].

## Литература

1. **Сыровой, В. А.** Теория интенсивных пучков заряженных частиц [Текст]. – США : Эльзевр, 2011. – 734 с.
2. **Завьялов, М. А.** Биполярные пучки заряженных частиц: эксперимент, теория и технические приложения [Текст] / М. А. Завьялов, В. А. Сыровой. – Снежинск : Изд-во РФЯЦ – ВНИИТФ, 2019. – 530 с.
3. **Сыровой, В. А.** Формирование интенсивных квазицилиндрических пучков заряженных частиц [Текст] // Письма в ЭЧАЯ. – 2020. – Т. 17, № 2. – С. 169–210.
4. **Сыровой, В. А.** Геометризованная теория ленточных релятивистских электронных пучков в  $\varphi$ -представлении [Текст] // РЭ. – 2019. – Т. 64. – № 1. – С. 82–95.
5. **Сыровой, В. А.** Геометризованная теория потенциальных электронных пучков [Текст] // РЭ. – 2022. Т. 67, № 6. – С. 614–634.
6. **Сапронова, Т. М.** Тестирование параксиальной модели ленточных электронных пучков [Текст] / Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // РЭ. – 2020. – Т. 65, № 12. – С. 1209–1233.

7. **Акимов, П. И.** К вопросу об адекватности численных моделей при расчете электронно-оптических систем приборов СВЧ с осесимметричными и ленточными электронными пучками [Текст] / П. И. Акимов, А. П. Никитин, В. А. Сыровой // Электронная техника. СВЧ-техника. – 2018. – № 1. – С. 32.
8. **Сапронова, Т. М.** Транспортировка электронных пучков с сечением, близким к прямоугольному [Текст] / Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // РЭ. – 2022. – Т. 67, № 4. – С. 391–403.
9. **Завьялов, М. А.** Режим «ионного фонтана» для плоских униполярных и биполярных диодов при релятивистских скоростях электронов [Текст] / М. А. Завьялов, П. М. Стальков, В. А. Сыровой // РЭ. – 2017. – Т. 62, № 8. – С. 799–811.
10. **Завьялов, М. А.** К теории биполярных потоков заряженных частиц [Текст] / М. А. Завьялов, Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // РЭ. – 2018. – Т. 63, № 6. – С. 597–606.
11. **Завьялов, М. А.** К теории компенсированных биполярных пучков [Текст] / М. А. Завьялов, Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // РЭ. – 2018. – Т. 63, № 6. – С. 590–596.
12. **Завьялов, М. А.** Биполярные системы с закатодным и анодным источниками плазмы [Текст] / М. А. Завьялов, Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // Изв. вузов. Физика. – 2020. – Т. 63, № 10. – С. 74–79.
13. **Завьялов, М. А.** Режим «ионного фонтана» для плоских диодов с ненулевым полем в плоскости отражения ионов [Текст] / М. А. Завьялов, Т. М. Сапронова, П. М. Стальков, В. А. Сыровой // РЭ. – 2021. – Т. 66, № 5. – С. 500–510.
14. **Завьялов, М. А.** Одномерные диоды с учетом собственного магнитного поля [Текст] / М. А. Завьялов, Т. М. Сапронова, В. А. Сыровой // РЭ. – 2022. – Т. 67, № 3. – С. 303–312.

## UP-TO-DATE TENDENCIES OF INTENSE UNIPOLAR AND BIPOLAR BEAMS OF CHARGED PARTICLES THEORY

*M. A. Zav'yalov, V. A. Syrovoy*

All-Russian Electro-Engineering Institute – Branch of FSUE «Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All – Russia Research Institute of Technical Physics», Moscow, Russia

The formulations of basic problems of intense beam theory and experimental results are discussed in monographs [1, 2].

The main trends of up-to-date theory are as follows.

1. Calculation of forming electrodes in 2D and 3D cases [1, 3].
2. Formulation of non-traditional models and approximate methods of beam calculation (geometrized theory in  $l$ -,  $\varphi$ -, and  $W$ -representations) [1, 4, 5].
3. Testing of well-known and new approximate models on basis of standart exact solutions [6].
4. Investigation of adequacy of numerical codes for trajectory analysis in multi-scale problems with high linear compression ( $L \geq 30$ ) beams [7].
5. Evaluation of numerical models of ribbon beam transportation in case of beam with long rectangle cross-section [8].
6. Using of plasma anode and additional ion injection from behind the cathode for 4–8 power increase without growth of voltage. In case of plasma anode – simplification of device due to elimination of electronic heating of cathode, high-voltage conductors and transformers [9–14].

Theoretical models are corroborated by experiment [2].

### References

1. **Syrovoy, V. A.** Theory of Intense Beams of Charged Particles [Text]. – US : Elsevier, 2011. – 734 p.
2. **Zav'yalov, M. A.** Bipolar Beams of Charged Particles: Experiment, Theory and Technical Applications [Text] / M. A. Zav'yalov, V. A. Syrovoy. – Snezhinsk : RFNC – VNIITF, 2019. – 530 p. [in Russian].
3. **Syrovoy, V. A.** Formation of intense quasicylindrical charged-particle beams [Text] // Letters to ECHAYA. – 2020. – Vol. 17, No. 2. – P. 169–210. [in Russian].

4. **Syrovoy, V. A.** Geometrized theory of ribbon relativistic electron beams in the  $\varphi$ -representation [Text] // J. of Communications Technology and Electronics. – 2019. – Vol. 64. – No. 1. – P. 82–85.
5. **Syrovoy, V. A.** Geometrized theory of potential electron beams [Text] // J. of Communications Technology and Electronics. – 2022. – Vol. 67. – No. 6. – P. 614–634.
6. **Sapronova, T. M.** Testing of the paraxial model of sheet electron beams [Text] / T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. 2020. – Vol. 65, No. 12. – P. 1209–1233.
7. **Akimov, P. I.** To adequacy of numerical models for electron-optical system calculations of microwave tubes with axisymmetric and sheet electron beams [Text] / P. I. Akimov, A. P. Nikitin, V. A. Syrovoy // Electronic equipment. Microwave technology. – 2018. – No. 1. – P. 32. [in Russian].
8. **Sapronova, T. M.** Transportation of electron beams with a near-rectangular cross-section [Text] / T. M. Sapronova V. A. Syrovoy, // J. of Communications Technology and Electronics. – 2022. – Vol. 67, No. 4. – P. 391–403.
9. **Zav'yalov, M. A.** Ion fountain in plane unipolar and bipolar diodes at relativistic velocities of electrons [Text] / M. A. Zav'yalov, P. M. Stalkov, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. – 2017. – Vol. 62, No. 8. – P.799–811.
10. **Zav'yalov, M. A.** On the Theory of bipolar flows of charged particles [Text] / M. A. Zav'yalov, T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. – 2018. – Vol. 63, No. 6. – P. 597–606.
11. **Zav'yalov, M. A.** On the theory of compensated bipolar beams [Text] / M. A. Zav'yalov, T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. – 2018. – Vol. 63, No. 6. – P. 590–596.
12. **Zav'yalov, M. A.** Bipolar systems with anode and ahead of cathode plasma sources [Text] / M. A. Zav'yalov, T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy // Russian Physics J. 2021 – Vol. 63, No. 10. – P.1721–1727.
13. **Zav'yalov, M. A.** Ion fountain mode for plane diodes with a non-zero field in the ion reflection plane [Text] / M. A. Zav'yalov, T. M. Sapronova, P. M. Stalkov, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. – 2021. – Vol. 66, No. 5. – P. 500–510.
14. **Zav'yalov, M. A.** One-dimensional diodes with self magnetic field [Text] / M. A. Zav'yalov, T. M. Sapronova, V. A. Syrovoy // J. of Communications Technology and Electronics. – 2022. – Vol. 67, No. 3. – P. 303–312.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ГЕРМОПРОХОДНИКА

*И. В. Минаев<sup>1</sup>, А. В. Мкртумян<sup>1,3</sup>, М. В. Никульшин<sup>1</sup>, О. С. Путилин<sup>1</sup>, В. В. Сергодеев<sup>1</sup>,  
А. А. Табатчиков<sup>1</sup>, Н. Н. Тулаева<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет», Челябинск, Россия

<sup>3</sup>ФГОУ ВО «Снежинский государственный физико-технический институт НИЯУ МИФИ», Снежинск, Россия

В волоконно-оптической технике соединение оптических линий между собой осуществляется при помощи ферул, изготовленных из керамики, имеющей коэффициент теплового расширения близкий по своему значению к коэффициенту теплового расширения стекла, из которого производят оптические волокна, что обеспечивает стабильное оптическое соединение для рабочего диапазона температур. Также ферулы можно использовать для фиксации волокна в корпусах изделий с обеспечением герметизации при помощи клея и резиновых уплотнителей. Данное техническое решение ограни-

чивает величину рабочего давления (не более 27 МПа). Герметизация ферул в несущем корпусе при помощи технологии металлостеклянных спаев предполагает повышение пределов рабочих давлений (рис. 1). Керамическая ферула впекается в корпус 4 при помощи стекла 1. Температура впекания 1100°C. Далее во внутреннее отверстие ферулы 3 (оптический канал) при помощи герметика вклеивается кварцевое волокно 2. За счет разницы коэффициентов температурного расширения используемых материалов после остывания образуется натяг, обеспечивающий прочное герметичное соединение ферулы, стекла и корпуса при действии давления  $P$ .

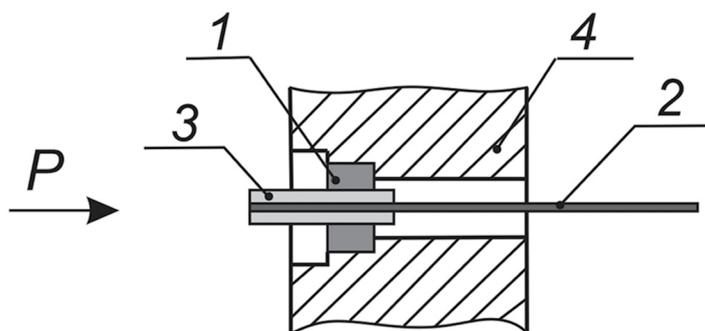


Рис. 1. Конструкция герметичного элемента:

1 – втулка (стекло), 2 – стекловолокно (кварц), 3 – ферула (керамика  $ZrO_2+Al_2O_3$ ), 4 – корпус (сталь 12Х18Н10Т)

Рассмотрена процедура процесса образования металлостеклянного спаев. Определено усилие натяга после затвердевания стекла. Анализ НДС герметичного элемента показал, что при затвердевании стекла формируются локальные области пластической деформации в корпусе.

Проведен анализ НДС конструкции при действии рабочего давления. Оценена предельная прочность стеклоспаев при действии внешнего давления. Получена расчетная и аналитическая оценка значений предельных давлений, которые соответствуют моменту страгивания ферулы относительно стекла.

## INVESTIGATION INTO THE STRENGTH OF THE HERMETIC ADAPTER CONSTRUCTION ELEMENTS

*I. V. Minaev<sup>1</sup>, A. V. Mkrtumyan<sup>1,3</sup>, M. V. Nikulshin<sup>1</sup>, O. S. Putilin<sup>1</sup>, V. V. Sergodeev<sup>1</sup>,  
A. A. Tabatchikov<sup>1</sup>, N. N. Tulaeva<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup>FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>FSAEI of HE «South Ural State University», Chelyabinsk, Russia

<sup>3</sup>FSEI of HE «Snezhinsk State Institute of Physics and Technology», Snezhinsk, Russia

The interconnection of optical lines is carried out using ferrules in fiber-optic technology. The thermal expansion coefficient of the material ferrule (ceramics) is similar to the thermal expansion coefficient of glass, thus, providing constant optical connection for the operating temperature range. Also, the ferrules, sealed with glue and rubber seals, can be used for fixing the fiber inside the housings. This technical solution limits the operating pressure value (no more than 27MPa). Sealing of ferrules in the bearing housing using the technology of metal-glass junctions assumes an increase in operating pressure limits (fig.1). The ceramic ferrule is baked into the housing 4 using a bushing 1. The baking temperature is 1100°C. Further, the quartz fiber 2 is glued into the inner hole of the ferrule 3 (optical channel) with the help of a sealant. Due to the difference in the thermal expansion coefficients of the materials used, a tension is formed after cooling, providing a strong hermetic connection of the ferrule, glass and housing. The pressure  $P$  is applied according to the arrow.

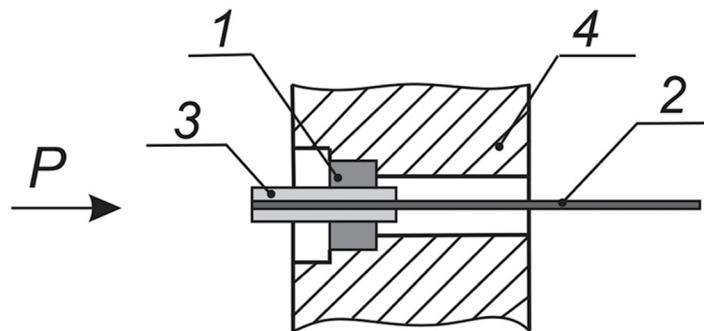


Fig. 1. The design of the sealed element:

1 – bushing (glass), 2 – fiberglass (quartz), 3 – ferrule (ceramic  $ZrO_2+Al_2O_3$ ), 4 – housing (steel 12X18H10T)

The procedure for the formation of a metal-to-glass junction is considered. The tension force after the glass solidification is determined. The analysis of stress-strain state has shown the formation of localized plastic deformation areas during glass solidification. The stress-strain state analysis of the structure under the action of the operating pressure is carried out. The ultimate strength of the glass layer under the action of external pressure is estimated. The calculated and analytical estimations of the limit pressures are obtained.

6-56

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГИИ ГРАНИЦ ЗЕРЕН РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ В АЛЮМИНИИ МЕТОДАМИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

*Е. В. Фомин*

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Данная работа посвящена изучению энергии и структуры границ зерен (ГЗ) наклона, скручивания и смешанных случаев перечисленных разориентировок зерен кристалла. Результаты исследования были получены на основе численного эксперимента путем моделирования методом классической молекулярной динамики при помощи кода LAMMPS [1]. Рассматривались бикристаллы чистого алюминия, созданные в программном пакете ATOMSK [2], размером  $30 \times 16 \times 15 \text{ нм}^3$  с начальными кристаллографическими направлениями  $[100]$   $[010]$   $[001]$  (рис. 1). Удельная энергия границ зерен вычислялась путем определения избытка энергии атомов в области ГЗ и идеальном кристалле для

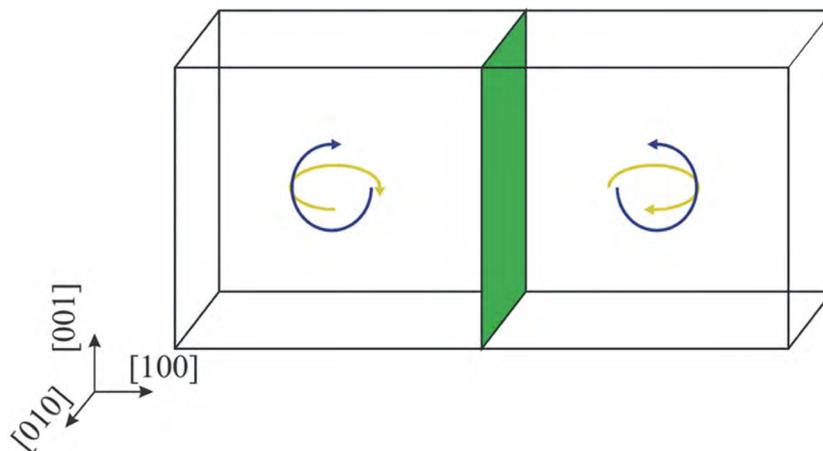


Рис. 1. Схема бикристалла с исследуемой границей зерна (отмечена зеленым цветом) – разориентировка зерен кристалла задавалась поворотами зерен кристалла, схематично показанными синей и желтой стрелками

углов скручивания, относительно оси  $X$ , в диапазоне  $[0, 90]$  градусов и наклона, относительно оси  $Y$ , в диапазоне  $[0, 90]$  градусов:

$$\gamma_{GB} = \frac{NE_{lat} - NE_{gb}}{2A}, \quad (1)$$

где  $N$  – количество атомов в выбранных областях (совпадает для области решетки и ГЗ);  $E_{lat}$  и  $E_{gb}$  – полная энергия на атом для идеальной решетки и ГЗ соответственно;  $A$  – площадь ГЗ.

Полученные значения энергии ГЗ использовались для обучения искусственной нейронной сети прямого распространения для описания зависимости энергии ГЗ от разориентировки зерен. Построение функций такого типа является актуальным, так как анизотропия энергии ГЗ определяет эволюцию микроструктуры [3, 4].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-71-00090, <https://rscf.ru/project/22-71-00090/>

### Литература

1. **Plimpton, S.** Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics [Text] // J. Comput. Phys. – 1995. – Vol. 117. – Iss. 1. – P. 1–19.
2. **Hirel, P.** AtomsK: A tool for manipulating and converting atomic data files [Text] // Comput. Phys. Commun. – 2015. – Vol. 197. – P. 212–219.
3. **Hallberg, H.** Modeling of grain growth under fully anisotropic grain boundary energy [Text] / H. Hallberg, V. V. Bulatov // Modell. Simul. Mater. Sci. Eng. – 2019. – Vol. 27. – P. 045002.
4. **Niño, J. D.** Influence of grain boundary energy anisotropy on the evolution of grain boundary network structure during 3D anisotropic grain growth [Text] / J. D. Niño, O. K. Johnson // Comput. Mater. Sci. – 2023. – Vol. 217. – P. 111879.

## INVESTIGATION THE ENERGY OF VARIOUS TYPE GRAIN BOUNDARIES IN ALUMINUM BY MACHINE LEARNING METHODS

*E. V. Fomin*

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

This work is devoted to the study of the energy and structure of grain boundaries (GB) of tilt, twist and mixed cases of the listed above crystal grain orientations. The results of this study were obtained on the basis of a numerical experiment by modelling via classical molecular dynamics using the LAMMPS code [1]. Pure aluminum bicrystals with initial crystallographic directions  $[100]$   $[010]$   $[001]$  and size  $30 \times 16 \times 15 \text{ nm}^3$  created in the ATOMSK software package [2] (Fig. 1). The specific energy of grain boundaries was calculated by determining the excess energy of atoms in the GB region and the ideal crystal for twist angles relative to the  $X$  axis, in the range of  $[0, 90]$  degrees and tilt angles, relative to the  $Y$  axis, in the range of  $[0, 90]$  degrees:

$$\gamma_{GB} = \frac{NE_{lat} - NE_{gb}}{2A}, \quad (1)$$

where  $N$  is the number of atoms in the selected regions (the same for the lattice area and GB);  $E_{lat}$  and  $E_{gb}$  are the total energy per atom for the ideal lattice and GB area, respectively;  $A$  is the area of GB.

The obtained values of GB energy were used to train the feedforward artificial neural network to describe the dependence of GB energy on grain orientation. The construction of functions of this type is relevant, as the anisotropy of GB energy determines the evolution of the microstructure [3, 4].

The study was carried out at the expense of the grant from the Russian Science Foundation No. 22-71-00090, <https://rscf.ru/project/22-71-00090/>

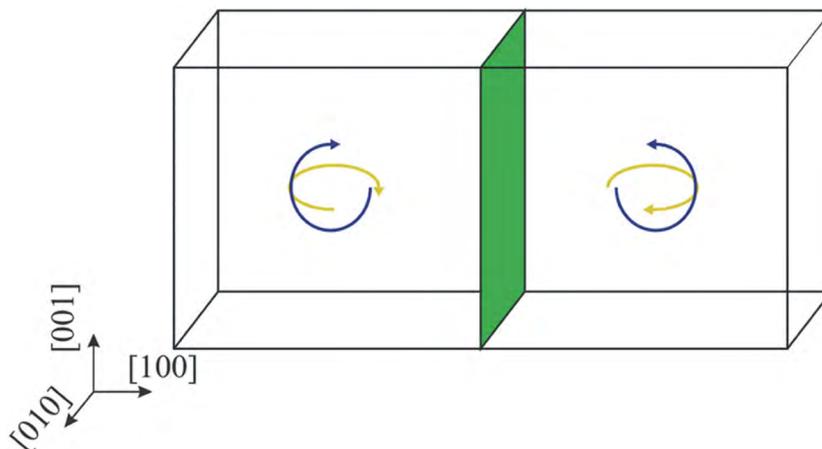


Fig. 1. The scheme of the bicrystal with studied grain boundary (marked in green): the orientation of crystal grains was set by the turns of crystal grains that schematically shown by the blue and yellow arrows

### References

1. **Plimpton, S.** Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics [Text] // J. Comput. Phys. – 1995. – Vol. 117. – Iss. 1. – P. 1–19.
2. **Hirel, P.** Atomsk: A tool for manipulating and converting atomic data files [Text] // Comput. Phys. Commun. – 2015. – Vol. 197. – P. 212–219.
3. **Hallberg, H.** Modeling of grain growth under fully anisotropic grain boundary energy [Text] / H. Hallberg, V. V. Bulatov // Modell. Simul. Mater. Sci. Eng. – 2019. – Vol. 27. – P. 045002.
4. **Niño, J. D.** Influence of grain boundary energy anisotropy on the evolution of grain boundary network structure during 3D anisotropic grain growth [Text] / J. D. Niño, O. K. Johnson // Comput. Mater. Sci. – 2023. – Vol. 217. – P. 111879.

---

6-57

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПЕРЕНОСА РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИТС ДЛЯ МИШЕНЕЙ С НЕПРЯМЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*В. А. Лыков, И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Во всем мире ведутся работы по развитию технологии расчетов мишеней ИТС для расчетной оптимизации постановки экспериментов на мощных лазерных установках. Для быстрого и равномерного нагрева поверхности мишени используются два способа облучения: прямой и непрямой. В прямом способе облучения лазерное излучение направляется непосредственно на поверхность мишени, а в непрямом способе лазерные лучи направляются на окружающий мишень корпус (конвертор) и мишень сжимается под действием рентгеновского излучения от стенок корпуса. Благодаря многократному переизлучению рентгена, поток падающего на мишень теплового излучения получается намного более равномерный, чем в случае облучения мишени непосредственно лазерным излучением. Для непрямого облучения мишеней используются конверторы разной геометрии: сферической, цилиндрической, «регби».

В данной работе представлены результаты моделирования переноса рентгеновского излучения в конверторах цилиндрической и сферической форм с учетом модели поглощения лазерного излучения, описанной в статье [1].

### Литература

1. **Вронский, А. В.** Моделирование переноса и поглощения лазерного излучения в мишенях ИТС с непрямым воздействием. [Текст] / И. С. Чубарешко, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2022. – Вып. 1. – С. 3–16.

## RESULTS OF RESEARCH ON X-RAY TRANSPORT IN ICF PROBLEMS FOR INDIRECTLY DRIVEN TARGETS

*V. A. Lykov, I. S. Chubareshko, A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

ICF target calculation technology is developed by scientists all over the world in order to allow computer-aided optimization of experiments on high-power laser facilities. Two methods of target irradiation – direct and indirect – are used to attain the fast and uniform heating of its surface. In the first case, laser radiation is directed right on the target surface, and in the second, on a convertor surrounding the target to compress it by X-rays from the convertor wall. Due to X-ray re-emission, the flow of heat incident on the target becomes much more uniform than that from direct irradiation. Convertors of different shapes – a sphere, cylinder, or rugby – are used for indirect irradiation.

The paper presents results obtained in the simulation of X-ray transport in cylindrical and spherical convertors with a laser radiation absorption model described in [1].

### References

1. **Vronsky, A. V.** Simulation of radiation transport and absorption in indirectly driven ICF targets [Text] / A. V. Vronsky, I. S. Chubareshko, A. A. Shestakov // VANT. – 2022. – Iss. 1. – P. 3–16.

---

6-58

## 50 ЛЕТ ЗАДАЧАМ ФЛЕКА

*А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Проблема тестирования стоит перед каждой программой. В 1971 году специалистами по переносу излучения из Ливерморской национальной лаборатории США J. A. Fleck и J. D. Cummings [1] было предложено 4 задачи, которые со временем превратились в классические тестовые задачи для переноса излучения. Для краткости в дальнейшем их стали называть задачами Флека. Во всех задачах Флека плоский слой прогревается потоком излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна нулю, плотность вещества единичная, задача рассматривается без учета газодинамического движения и рассеяния, используется уравнение состояния идеального газа.

Основными достоинствами задач Флека являются:

- 1) простота постановки граничных и начальных условий, что позволяет считать эти задачи в различных приближениях и геометриях;
- 2) аналитические формулы для спектральных пробегов;
- 3) широкий диапазон изменения спектрального коэффициента поглощения;

- 4) моделирование разрывов коэффициента поглощения по пространству и спектру;
- 5) простейшее уравнение состояния вещества.

Многие методики, создаваемые для решения задач переноса излучения, используют задачи Флека для тестирования и по рейтингу цитируемости в статьях по переносу излучения работа [1], на мой взгляд, занимает 1 место.

Задачи Флека рассматривались в простейшей плоской геометрии без учета движения, поэтому для тестирования многомерных методик радиационной газовой динамики применяются их модификации, например, задачи с отверстиями в плотном слое [2] или с учетом движения вещества [3]. В работе [3] была предложена задача о разлете слоистой системы, которая объединяет 6 вариантов задач Флека, поэтому условно названа «седьмой задачей Флека». Для численного моделирования в многомерной постановке в «седьмой задаче Флека» плоский слой заменен на сферический, дополнительно учитывается рассеяние излучения и движение вещества.

Частое использование в численных методиках тестов Флека привело к потребности иметь аналитические формулы для решений этих задач. В работе [4] построены упрощенные решения стационарной системы уравнений переноса спектрального излучения и энергии в первой и второй задачах Флека.

Доклад посвящен полувековому юбилею использования тестов Флека в методиках численного решения переноса теплового излучения. В данной работе приведены постановки и численные расчеты различных модификаций этих задач.

### Литература

1. **Fleck, J. A.** An Implicit Monte Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport. [Text] / J. A. Fleck, J. D. Cummings // J. of Comput. Phys. – 1971. – Vol. 8. – P. 313–342.
2. **Кошутин, Д. А.** Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса [Текст] / Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков // ВАИТ. – 2017. – Вып. 3. – С. 39–50.
3. **Шестаков, А. А.** Седьмая задача Флека. [Текст] // Тезисы докладов XI Международной конференции ЗНЧ. – Снежинск : Изд-во РФЯЦ – ВНИИТФ, 2012. – С. 333.
4. **Завьялов, В. В.** Упрощенные решения задач Флека / В. В. Завьялов, А. А. Шестаков // ВАИТ. – 2013. – Вып. 1. – С. 45–52.

## FLECK'S PROBLEMS TURNED 50

*A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

Each code needs testing. In 1971, J. A. Fleck и J. D. Cummings, experts from the Lawrence Livermore National Laboratory, USA, proposed 4 problems [1] that later became classical tests for radiation transport. Now they are referred to as Fleck's problems. In all these problems, a plane layer of matter is heated by a flow of radiation corresponding to a temperature of 1 keV. The initial matter temperature is zero; the matter density is unity; no hydrodynamic motion and scattering; the equation of state for ideal gas is used.

The main advantages of Fleck's problems are:

- 1) simple statements of boundary and initial conditions which allows calculation in different approximations;
- 2) analytical expressions for continuous-energy opacities;
- 3) a wide range of values the continuous-energy absorption coefficient takes;
- 4) simulation of discontinuities in the absorption coefficient in space and energy; and
- 5) a simple equation of state.

Many techniques being developed for radiation transport use Fleck's problems for testing, and the citation index of Ref. [1] seems to take the first place.

Multidimensional radiation hydrodynamics techniques are tested on modified Fleck's problems, for example, with holes in the dense layer [2] or with allowance for material motion [3]. The authors of Ref. [3] proposed a problem on the expansion of a layered system where the plane layer is replaced by a spherical one and radiation scattering and material motion are taken into account. The problem unites the 6 variants of Fleck's problem and was called "Fleck's problem number seven".

The often use of Fleck's tests made it necessary to have simple formulas for them. In [4], simple solutions for stationary radiation transport and energy equations were derived for first and second Fleck's problems.

The paper is devoted to the fiftieth anniversary of Fleck's tests usage in numerical techniques for solving radiative heat transfer. It provides statements and numerical calculations of these problems in different modifications.

### References

1. **Fleck, J. A.** An Implicit Monte Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Non-linear Radiation Transport. [Text] / J. A. Fleck, J. D. Cummings // J. of Comput. Phys. – 1971. – Vol. 8. – P. 313–342.
2. **Koshutin, D. A.** Solution of a 2D radiative heat transfer equation in a multi-group quasi-transport approximation [Text] / D. A. Koshutin, A. A. Shestakov // VANT. – 2017. – Iss.3. – P. 39–50.
3. **Shestakov, A. A.** Fleck's problem number seven [Text] // Abstract of a presentation to the ZST-XI conference. – Snezhinsk : RFNC – VNIITF, 2012. – P. 333.
4. **Zavialov, V. V.** Simple solutions to Fleck's problems [Text] / V. V. Zavialov, A. A. Shestakov // VANT. – 2013. – Iss. 1. – P. 45–52.

---

6-59

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОДА КВАЗИПЕРЕНОСА

*А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Метод квазипереноса [1, 2] сводит численное решение кинетического уравнения к решению диффузионного уравнения через введение корректирующих коэффициентов. Переход к диффузионному уравнению упрощает численное решение кинетического уравнения и дает возможность использовать монотонные схемы второго порядка точности при решении задач переноса теплового излучения. При этом важно знать, как ведут себя корректирующие коэффициенты, потому что для корректности диффузионного уравнения обязательным является требование положительности скорректированного коэффициента диффузии. Наиболее просто это проверить в задачах, имеющих аналитические решения. Целью данной работы является исследование поведения корректирующих коэффициентов метода квазипереноса в задачах с аналитическим решением.

### Литература

1. **Карлыханов, Н. Г.** Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения [Текст] / Н. Г. Карлыханов, М. Ю. Козманов // ВАНТ. – 2010. – Вып. 4. – С. 3–9.
2. **Кошутин, Д. А.** Решение двумерного уравнения переноса теплового излучения в приближении многогруппового квазипереноса [Текст] / Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2017. – Вып. 3. – С. 39–50.

## ANALYTICAL TESTS TO INVESTIGATE CORRECTING COEFFICIENTS IN THE QUASI-TRANSPORT METHOD

*A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

The quasi-transport method [1, 2] reduces the numerical solution of the kinetic equation to the solution of the diffusion equation with correcting coefficients. The transition to the diffusion equations makes it easier to numerically solve the kinetic equation and allows the use of monotone second order schemes for solving radiative heat transfer. In this case it is important to know how the correcting coefficients behave because the corrected diffusion coefficient in the correct diffusion equation is required to be positive. Whether the requirement is satisfied or not can easily be checked in problems which have analytical solutions. This work aims to investigate the behavior of the correcting coefficients in analytical tests.

### References

1. **Karlykhanov, N. G.** Kinetic effects in a diffusion approximation for solving radiation transport / N. G. Karlykhanov, M. Y. Kozmanov [Text] // VANT. – 2010. – Iss.4. – P. 3–9.
2. **Koshutin, D. A.** Solution of the 2D heat transfer equation in a multigroup quasi-transport approximation [Text] / D. A. Koshutin, A. A. Shestakov // VANT. – 2017. – Iss. 3. – P. 39–50.

---

6-60

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ TVDR

*A. A. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Одним из путей построения схем повышенного порядка аппроксимации с улучшенными монотонными свойствами для решения уравнения переноса является переход к нелинейным схемам TVD. Применяются как явные, так и неявные схемы TVD для решения гиперболических систем уравнений. Если рассматривать неявные схемы TVD при аппроксимации уравнения переноса, то это будут трехточечные или четырехточечные схемы из-за использования односторонних производных в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство одного из самых эффективных методов решения уравнения переноса – метода  $DS_n$ , где для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета. В 2009 году в работе [1] был найден способ, как обойти эти трудности в методологии TVD. Такие схемы в дальнейшем были названы TVDR [2].

Из теории разностных схем известно, что классические аппроксимации метода  $DS_n$  – неявные схемы  $St$  и  $DD$  безусловно устойчивы. Возникает вопрос: будут ли безусловно устойчивыми неявные схемы TVD и TVDR? В данной работе проведены исследования устойчивости разностных схем TVDR с использованием спектрального признака Неймана для одномерного уравнения переноса.

### Литература

1. **Гаджиев, А. Д.** Применение TVD подхода к  $DS_n$  методу решения уравнения переноса теплового излучения [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков // ВАИТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2009. – Вып. 2. – С. 37–48.
2. **Шестаков, А. А.** TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения [Текст] // ВАИТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. – 2019. – Вып. 2. – С. 17–36.

## STABILITY OF THE TVDR DIFFERENCE SCHEMES

*A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

A way to derive higher-order approximation schemes with better monotonicity for radiation transport is the use of nonlinear TVD schemes. Both explicit and implicit TVD schemes are used to solve hyperbolic equations. In case of implicit TVD schemes, we will have three- or four-point schemes due to one-sided derivatives in each spatial direction thus losing an important advantage of the most effective radiation transport method – the DS<sub>n</sub> method where difference equations are solved by economic substitutions. In 2010, the authors of Ref. [1] proposed how to remove this difficulty in TVD methodology using schemes which were later called TVDR [2].

It is known from the theory of finite-difference schemes that the classical approximations of the DS<sub>n</sub> method – the implicit St and DD schemes – are unconditionally stable. Are the TVD and TVDR schemes unconditionally stable too? In this paper, stability of the TVDR schemes is investigated with the Neumann criterion for the 1D transport equation.

### References

1. **Gadzhiev, A. D.** Application of the TVD approach to the DS<sub>n</sub> method of solving a radiative heat transfer equation in axially symmetric RZ geometry [Text] / A. D. Gadzhiev, V. V. Zavialov, A. A. Shestakov // VANT. Mathematical Modeling of Physical Processes Series. – 2010. – Iss. 2. – P. 30–39.
2. **Shestakov, A. A.** TVDR schemes for solving the system of heat transfer equations [Text] // VANT. Mathematical Modeling of Physical Processes Series. – 2019. – Iss. 2. – P. 17–36.

---

6-61

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОПРАВОЧНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

*A. A. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Использование неявных схем в математическом моделировании переноса теплового излучения требует серьезного внимания к проблеме сходимости итерационного процесса, используемого для решения данной задачи. В 1907 году Е. Шмидтом [1] был предложен метод, основанный на определении главной части ошибки, допущенной на простой итерации. Этот метод, названный методом поправок, получил в дальнейшем широкое применение. Ошибка, допущенная на простой итерации, вычислялась приближенно каким-либо более простым методом, а новый чередующийся итерационный процесс сходился быстрее метода простой итерации. В дальнейшем методы ускорения, базирующиеся на упрощении исходного оператора переноса и решении дополнительной упрощенной системы, стали называться в России КР-методами [2], а за рубежом – синтетическими методами [3]. В РФЯЦ – ВНИИЭФ успешно применяется поправочный КМ-метод [4], являющийся обобщением метода оценки итерационных отклонений [5] на нестационарный групповой случай.

В РФЯЦ – ВНИИТФ для решения уравнения переноса нейтронов предложен поправочный метод ускорения итераций RDSA (Romb Diffusion Synthetic Acceleration) [6]. Для совместного решения уравнения энергии и группового уравнения переноса излучения предложен поправочный метод PSAC (P1 Synthetic Acceleration Correction Methods) [7]. В этих методах для ускорения итераций по кинетическому уравнению используется приближение низкого уровня, а именно – P1 приближение. Чтобы методы RDSA и PSAC были сходящимися, в них обеспечивается согласованность разностной

схемы P1 уравнений со схемой решения кинетического уравнения. Согласовывать разностные схемы в диффузионном или P1 приближениях со схемой решения кинетического уравнения довольно непросто, поэтому в докладе предлагается использовать новые приближения и методы, не требующие согласования разностных схем.

Метод ВДЭПФ был предложен в работах [8–10] для разных приближений уравнения переноса. Он сочетает в себе достоинства метода выделения диагонального элемента [11] и синтетического метода ускорения в поправочной форме для плотности излучения. На первом этапе метода ВДЭПФ решается уравнение переноса методом простой итерации. На втором этапе метода ВДЭПФ используются односторонние потоки, полученные на первом этапе, составляется уравнение для поправок плотности излучения, которая подставляется в уравнение энергии. Уравнение для поправок в методе ВДЭПФ, в отличие от синтетических методов, не решается, а используется только для получения температуры через зависимость плотности излучения от функции Планка. В докладе также предлагается для снятия проблемы согласования разностных схем использовать приближения квазипереноса [12] и квазитеплопроводности [13]. Приводится описание и численные исследования методов RDSA, PSAC, ВДЭПФ.

### Литература

1. Schmidt, E. Auflosung der allgemeiner linearen integralgleichungen [Text] // Math. Ann. – 1907. – Vol. 64. – P. 161.
2. Лебедев, В. И. О КР-методе ускорения сходимости итераций при решении кинетического уравнения. [Текст] // Численные методы решения задач математической физики. – М. : Наука, 1966.
3. Корр, Н. J. Synthetic Method Solution of the Transport Equation [Text] // Nucl. Sci. Eng. – 1963. – Vol. 17. – P. 65.
4. Федотова, Л. П. Конечно-разностный КМ метод для математического моделирования двумерных нестационарных процессов переноса в многогрупповом кинетическом приближении. [Текст] / Л. П. Федотова, Р. М. Шагалиев // Математическое моделирование. – 1991. – Т. 3, № 6. – С. 29–42.
5. Морозов, В. Н. О решении кинетических уравнений с помощью Sn-метода [Текст] / Теория и методы расчета ядерных реакторов. – М. : Госатомиздат, 1962. – С. 91–117.
6. Гаджиев, А. Д. RDSA-метод для численного решения уравнения переноса нейтронов [Текст] / А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2007. – Вып. 2. – С. 3–19.
7. Гаджиев, А. Д. Метод дискретных ординат с TVD-реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения [Текст] / А. Д. Гаджиев, Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2013. – Вып. 3. – С. 3–15.
8. Гаджиев, А. Д. DS<sub>n</sub> метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели [Текст] / А. Д. Гаджиев, В. Н. Селезнев, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2003. – Вып. 4. – С. 33–46.
9. Гаджиев, А. Д. ВДЭ – метод ускорения итераций для уравнения переноса нейтронов [Текст] / А. Д. Гаджиев, И. А. Кондаков, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2008. – Вып. 3. – С. 19–31.
10. Гаджиев, А. Д. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P1 приближении по схеме РОМБ [Текст] / А. Д. Гаджиев, А. А. Шестаков // ВАНТ. – 2006. – Вып. 1. – С. 3–13.
11. Гусев, В. Ю. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения [Текст] / В. Ю. Гусев, М. Ю. Козманов, Е. Б. Рачилов // ЖВМ и МФ. – 1984. – Т. 24, № 12. – С. 1842–1849.
12. Карлыханов, Н. Г. Учет кинетических эффектов в диффузионном приближении для расчета переноса излучения [Текст] / Н. Г. Карлыханов, М. Ю. Козманов // ВАНТ. – 2010. – Вып. 4. – С. 3–9.
13. Карлыханов, Н. Г. Учет спектральных и кинетических эффектов в приближении лучистой теплопроводности для расчета задач переноса излучения [Текст] / ВАНТ. – 2019. – Вып. 4. – С. 21–32.

## APPLICATION OF CORRECTION METHODS FOR SOLVING RADIATIVE HEAT TRANSFER

*A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

The use of implicit schemes for solving radiative heat transfer requires that thorough attention to issues related to iteration convergence. In 1907, E. Schmidt [1] proposed a method based on the estimation of the error the simple iteration gives. The method called the method of corrections found wide application. The error was estimated with a simple method and the new alternating iterative process converged faster than the simple iteration method. Acceleration methods based on the simplification of the initial transport operator and the solution of the simplified system are referred to as KP methods [2] in Russia and synthetic methods [3] abroad. At RFNC – VNIIEF, a KM method [4] is used which is a generalization of the iteration error estimation method [5] to the nonstationary grouped-energy case.

At RFNC – VNIITF, a Romb Diffusion Synthetic Acceleration (RDSA) method [6] is used for solving the neutron transport equation and a P1 Synthetic Acceleration Correction Method (PSAC) method [7] is used for the simultaneous solution of the energy equation and the grouped-energy radiation transport equation. In these methods, a low-level approximation, specifically, the P1 approximation, is used to accelerate iterations for the kinetic equation. To allow RDSA and PSAC to converge, the difference scheme of P1 equations must be consistent with the scheme used for the kinetic equation. It is however far from trivial to ensure their consistency and the paper offers new approximations and methods which are free from this requirement.

A method of diagonal element identification in the correction form (VDEPF) was proposed in [8], [9], [10] for different approximations of the transport equation. It combines the advantages of the diagonal element identification method [11] and the synthetic acceleration method in the correction form for radiation density. The method first solves the transport equation by the simple iteration method and then uses the resulted unidirectional fluxes to construct an equation for corrections to radiation density to be substituted in the energy equation. Unlike the synthetic methods, the equation for correction is not solved; it is only used to obtain the temperature from the dependence of radiation density on the Planck function. It is also proposed that the problem of consistency between difference schemes should be resolved through the use of quasi-transport [12] and quasi-heat-transfer [13] approximations. Description and numerical testing of the RDSA, PSAC, and VDEPF methods are provided.

### References

1. **Schmidt, E.** Auflösung der allgemeiner linearen Integralgleichungen [Text] // Math. Ann. – 1907. – Vol. 64. – P. 161.
2. **Lebedev, V. I.** A KP iteration acceleration method for solving the kinetic equation [Text] // Numerical Techniques for Mathematical Physics Problems. – M. : Nauka Publishers, 1966.
3. **Kopp, H. J.** Synthetic Method Solution of the Transport Equation [Text] // Nucl. Sci. Eng. – 1963. – Vol. 17. – P. 65.
4. **Fedotova, L. P.** A finite-difference KM method for numerical simulation of 2D nonstationary transport in a multi-group kinetic approximation [Text] / L. P. Fedotova, R. M. Shagaliev // J. Mathematical Modeling. – 1991. – Vol. 3, No. 6. – P. 29–42.
5. **Morozov, V. N.** Solution of kinetic equations with the Sn method. Theory and methods for nuclear reactor calculation. – M. : Gosatomizdat Publishers. – 1962. – P. 9–117.
6. **Gadzhiev, A. D.** RDSA method for solving neutron transport [Text] / A. D. Gadzhiev, I. A. Kondakov, A. A. Shestakov // VANT. – 2007. – Iss. 2. – P. 3–19.
7. **Gadzhiev, A. D.** The method of discrete ordinates with TVD reconstruction and a synthetic iteration acceleration method for solving the radiative heat transfer equation [Text] / A. D. Gadzhiev, D. A. Koshutin, A. A. Shestakov // VANT. – 2013. – Iss. 3. – P. 3–15.

8. **Gadzhiev, A. D.** The DS<sub>n</sub> method with artificial dissipation and the VDM iteration acceleration method for solving a 2D radiative heat transfer equation in the kinetic model [Text] / A. D. Gadzhiev, V. N. Seleznyov, A. A. Shestakov // VANT. – 2003. – Iss.4. – P. 33–46.
9. **Gadzhiev, A. D.** VDE iteration acceleration method for solving neutron transport [Text] / A. D. Gadzhiev, I. A. Kondakov, A. A. Shestakov // VANT. – 2008. – Iss. 3. – P. 19–31.
10. **Gadzhiev, A. D.** A diagonal matrix method for solving radiation transport in P<sub>1</sub> approximation by the ROMB scheme [Text] / A. D. Gadzhiev, A. A. Shestakov // VANT. – 2006. – Iss. 1. – P. 3–13.
11. **Gusev, V. Y.** A method for solving implicit finite-difference approximations to radiation transport and diffusion equations [Text] / V. Y. Gusev, M. Y. Kozmanov, E. B. Rachilov // J. Comput. Mathematics and Math. Physics. – Vol. 24, No. 12. – 1984. – P. 1842–1849.
12. **Karlykhanov, N. G.** Kinetic effects in a diffusion approximation for solving radiation transport [Text] / N. G. Karlykhanov, M. Y. Kozmanov // VANT. – 2010– Iss. 4. – P. 3–9.
13. **Karlykhanov, N. G.** Spectral and kinetic effects in a radiative heat transfer approximation for solving radiation transport [Text] // VANT. – 2019. – Iss. 4. – P. 21–32.

---

6-62

## ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ЭНЕРГИИ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

*А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений для уравнения переноса излучения достигнут, но этих решений не всегда достаточно для разных классов задач переноса.

Используя разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана можно получить аналитические решения задачи переноса излучения в стационарном случае. Разложение в ряд Неймана позволяет по известному температурному распределению получать спектрально-угловые характеристики поля излучения [1].

В данной работе на основе разложения резольвенты оператора переноса в ряд Неймана созданы аналитические формулы для определения параметров теплового излучения в многомерной геометрии. Эти формулы позволяют при известной равновесной интенсивности, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти в явном виде аналитические выражения основных спектральных величин: интенсивности, плотности и потока излучения. Приведены решения в сером и спектральном приближениях для одномерной, двумерной и трехмерной геометрий.

### Литература

1. **Larsen, E. W.** Simplified PN Approximations to the Equations of Radiative Heat Transfer and Applications I [Text] / E. W. Larsen, G. Thommes, A. Klar, M. Sead, T. Gotz. // J. of Comput. Phys. – 2002. – Vol. 183. – P. 652–675.

## EXACT SOLUTIONS OF MULTIDIMENSIONAL STATIONARY RADIATION AND ENERGY TRANSFER EQUATIONS

*A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

It is desirable to test codes on model problems that have analytical solutions. Though some progress is seen in the derivation of analytical solutions for radiation transport equations, they are still lacking for some problems.

Analytical solutions for stationary radiation transport can be derived by expanding the resolvent of the transport operator in a Neumann series. The expansion helps get the spectral-angular characteristics of a radiation field from a known temperature distribution [1].

In this work the expansion was used to derive analytical formulas for radiative heat parameters in the multidimensional case. For a known equilibrium intensity which is defined by the temperature distribution only, and for given absorption and scattering coefficients, the formulas give explicit analytical expressions for the main spectral quantities – radiation intensity, density, and flux. 1D, 2D and 3D solutions in gray and spectral approximations are provided.

### References

1. **Larsen, E. W.** Simplified PN Approximations to the Equations of Radiative Heat Transfer and Applications1 [Text] / E. W. Larsen, G. Thommes, A. Klar, M. Sead, T. Gotz. // J. of Comput. Phys. – 2002. – Vol. 183. – P. 652–675.

---

6-63

## УЧЕТ КИНЕТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЛУЧИСТОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

*Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики  
имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

Одной из наиболее трудных задач радиационной газовой динамики является решение многомерного уравнения переноса теплового излучения, сложность которого определяется главным образом большой размерностью фазового пространства. В связи с этим применяют различные приближения, упрощающие задачу переноса излучения. К таким приближениям относится, например, приближение лучистой теплопроводности (ЛТП). При этом снимаются достаточно сложные вопросы выбора эффективного итерационного метода и построения монотонной схемы повышенного порядка точности для кинетического уравнения. Однако приближение ЛТП не всегда дает решение эквивалентное кинетической модели.

В 2016 году М. Ю. Козмановым, Д. А. Кошутиным и А. А. Шестаковым предложено систему двумерных уравнений переноса заменять уравнениями квазитеплопроводности, где решения получают по уравнениям теплопроводности с введением нелинейных множителей. Для решения двумерной системы параболических уравнений квазитеплопроводности использовались метод расщепления по направлениям и разностная схема второго порядка аппроксимации. В дальнейшем идеи квазитеплопроводности были развиты в работах Н. Г. Карлыханова [1, 2], где было дополнительно применено усреднение многогруппового уравнения переноса по спектру фотонов.

## Литература

1. **Карлыханов, Н. Г.** Учет спектральных и кинетических эффектов в приближении лучистой теплопроводности для расчета задач переноса излучения [Текст] // ВАНТ. – 2019. – Вып. 4. – С. 21–32.
2. **Карлыханов, Н. Г.** Квазиспектральный метод решения кинетического уравнения переноса излучения в двумерной осесимметричной постановке [Текст] / Н. Г. Карлыханов, А. Д. Хмельницкая // ВАНТ. – 2022. – Вып. 3. – С. 37–47.

## KINETIC EFFECTS IN RADIATIVE HEAT TRANSFER APPROXIMATION FOR SOLVING RADIATION TRANSPORT

*D. A. Koshutin, A. A. Shestakov*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”, Snezhinsk, Russia

One of the most challenging problems in radiative hydrodynamics is to solve the heat transfer equation with its very high phase space dimension. Various approximations are used to ease the problem. One of them is the radiative heat transfer approximation, which helps remove difficulties related to the choice of an effective iterative method and a monotone higher order scheme for the kinetic equation. But it is not always that the approximation gives a solution equivalent to the kinetic model.

In 2016, M. Y. Kozmanov, D. A. Koshutin, and A. A. Shestakov proposed that the system of 2D transport equations should be replaced by quasi heat transfer equations with solutions obtained from heat transfer equations with nonlinear multipliers. The 2D parabolic quasi heat transfer equations were solved using a method of splitting over directions and a second order difference scheme. Later the quasi heat transfer approach was developed in [1, 2], where the multigroup transport equation was averaged over the photon spectrum.

## References

1. **Karlykhanov, N. G.** Spectral and kinetic effects in a radiative heat transfer approximation for solving radiation transport [Text] // VANT. – 2019. – Is. 4. – P. 21–32.
2. **Karlykhanov, N. G.** A quasi-spectral method for solving a 2D axially symmetric kinetic radiation transport equation [Text] / N. G. Karlykhanov, A. D. Khmel'nitskaya // VANT. – 2022. – Is. 3. – P. 37–47.

6-64

## ДИНАМИКА РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ В СЛОЯХ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

*В. М. Шмаков, С. А. Орлова, Л. Ф. Гордейчук*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ технической физики имени академика Е. И. Забабахина», Снежинск, Россия

В докладе рассматривается поведение временных характеристик размножения нейтронов в слоистой шаровой системе от момента начального распределения нейтронов до выхода распределения нейтронных потоков на собственную функцию.

Для расчетов интенсивности размножения нейтронов  $\lambda$  используется динамический метод (или метод установления) [1–3], в котором рассматривается уравнение переноса нейтронов относительно плотности нейтронов  $n \equiv n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left\{ \iiint \rho \left[ \sigma'_f v'_f f'_f + \sigma'_s f'_s \right] v' n' dE' d\vec{\Omega}' - \rho \sigma_t v n \right\} - \vec{\Omega} \vec{\nabla} v n + q. \quad (1)$$

В процессе решения уравнения (1) ищется логарифмическая производная по времени  $\lambda(t) = \partial \text{Ln}(N)/\partial t$  от полного числа нейтронов  $N(t)$  во всей системе. В этом случае  $\lambda(t)$  можно назвать динамической интенсивностью размножения нейтронов.

В докладе рассматривается поведение  $\lambda(t)$  в слоистой шаровой системе от момента начального распределения нейтронов в системе до выхода распределения потоков на собственную функцию.

Численные расчеты задач на собственные значения  $\lambda_0$  методом установления начинаются с произвольного мгновенного по времени распределения источника  $q(t) = q_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)\delta(t)$  и заключаются в прослеживании потока нейтронов во времени. Предполагается, что, в конечном счете, распределение плотности нейтронов в системе установится (релаксирует) в соответствии с собственной функцией. К этому моменту происходит разделение энергетических, пространственных и угловых переменных  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  и времени  $t$ . В результате последующее поведение системы будет характеризоваться простой экспоненциальной зависимостью полного числа нейтронов в системе  $N(t) = N_0 \exp[\lambda_0 t]$ . Таким образом в процессе установления нейтронного потока  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0$ .

Заметим, что производную  $\partial N/\partial t$ , при известной плотности  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  во всей системе, можно вычислить для любого момента времени  $t$  непосредственно из правой части уравнения (1). Для этого уравнение (1) надо проинтегрировать по объему, углам и энергиям нейтронов  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . В результате получится выражение из трех членов:  $\partial N/\partial t = B - J + Q$ , где  $B$  – полное воспроизводство нейтронов или интеграл от выражения в фигурных скобках в уравнении (1),  $J$  – полная утечка нейтронов из системы,  $Q$  – полный независимый источник нейтронов. Используя эти три функционала, получим выражение для расчета  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{B}{N} - \frac{J}{N} + \frac{Q}{N} = \lambda^{rep} - \lambda^J + \lambda^Q, \quad (2)$$

где  $\lambda^{rep}$ ,  $\lambda^J$ ,  $\lambda^Q$  – интенсивности воспроизводства, утечки и источника (если он есть), соответственно.

Оказывается, что для расчета интенсивности воспроизводства  $B$  (3) естественно использовать микроскопические сечения воспроизводства нейтронов –  $\sigma_{rep}(E) = \sigma_t(\bar{\nu}_t - 1)$ , где  $\sigma_t$  – полное микроскопическое сечение и  $\bar{\nu}_t$  – среднее число вторичных нейтронов на одно столкновение нейтрона с ядром мишени. Таблицы сечений  $\sigma_{rep}(E)$  рассчитываются в узлах  $\sigma_t(E)$  и стандартно присутствуют в файлах библиотек нейтронных констант для каждого материала.:

$$B = \iiint_{V, E, \vec{\Omega}} \left\{ \iint_{E', \vec{\Omega}'} \left[ \Sigma'_f \nu'_f \sigma'_f + \Sigma'_s \sigma'_s \right] \nu' n' dE' d\vec{\Omega}' - \Sigma_t \nu n \right\} d\vec{r} dE d\vec{\Omega} = \iint_{V, E} \rho \sigma_t(\bar{\nu}_t - 1) \phi d\vec{r} dE = \iint_{V, E} \rho \sigma_{rep} \phi d\vec{r} dE, \quad (3)$$

где  $\phi = \phi(\vec{r}, E, t) = \int_{\vec{\Omega}} \nu n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) d\vec{\Omega}$  полный поток.

Для интенсивности размножения нейтронов в  $l$ -том слое системы введем определение, аналогичное для  $\lambda(t)$  всей системы,  $\lambda_l(t) = \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t}$ , где  $N_l$  – число нейтронов в слое.

Связь между интенсивностью  $\lambda(t)$  и интенсивностями  $\lambda_l(t)$  следует из следующей алгебры:

$$\lambda(t) = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{\partial \sum_l N_l}{\partial t} = \sum_l \frac{N_l}{N} \left( \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t} \right) = \sum_l w_l \lambda_l(t). \quad (4)$$

В свою очередь интенсивность  $\lambda_l(t)$  в слоях выражается через соответствующие интенсивности воспроизводства –  $\lambda_l^{rep}$ , баланса нейтронных утечек из слоя и притоков в слой –  $\lambda_l^{\Delta J}$ , и источника –  $\lambda_l^Q$ :

$$\lambda_l(t) = \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t} = \frac{B_l}{N_l} - \frac{\Delta J_l}{N_l} + \frac{Q_l}{N_l} = \lambda_l^{rep} - \lambda_l^{\Delta J} + \lambda_l^Q. \quad (5)$$

В групповом приближении принципиально ничего не меняется. Интегрирование заменяется суммированием и, например, для расчета воспроизводства  $B$ , получается выражение, аналогичное (3):

$$B = \sum_g \rho \sigma_g^{rep} \phi_g, \quad \text{где } \rho \sigma_g^{rep} = \left( \sum_k \beta_{0,gk} - \alpha_g \right) \equiv \rho \sigma_g' (\bar{v}_g' - 1). \quad (6)$$

В данном докладе представлен новый ВЈN-метод расчета динамической интенсивности размножения нейтронов  $\lambda(t)$ , в котором используются поточечные или групповые микроскопические сечения воспроизводства нейтронов. Показано полное совпадение  $\lambda(t)$  в групповых расчетах по ВЈN-методу и по традиционному методу вычисления  $\lambda(t)$  через логарифмическую производную. Показано, что для достижения близких среднестатистических отклонений  $\lambda(t)$  в расчетах Монте–Карло по ВЈN-методу можно моделировать в сто раз меньше историй, чем при вычислении динамической интенсивности размножения нейтронов традиционным методом.

### Литература

1. **Белл, Д.** Теория ядерных реакторов [Текст] / Д. Белл, С. Г. Глесстон. – М. : Атомиздат, 1974.
2. **Dermott, E. C.** Static and Dynamic Criticality: Are They Different? [Text] // Report: UCRL-TR-201506. – 2003 (November 22). <http://www.llnl.gov/tid/Library.html>.
3. **Perel, R. L.** Direct and Indirect Computation of the Transport Equation Eigenvalues [Text] / R. L. Perel, J. J. Wagschal // NucL Sci. Eng. – 1986. – Vol. 94, No. 4. – P. 409–412. DOI: 10.13182/NSE94-409.

## DYNAMICS OF NEUTRON MULTIPLICATION IN LAYERS OF A STATIONARY SYSTEM

*V. M. Shmakov, S. A. Orlova, L. F. Gordeychuk*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics”,  
Snezhinsk, Russia

The paper studies the behavior of the temporal characteristics of neutron multiplication in a layered spherical system beginning from the initial distribution of neutrons in the system to the time when the distribution of neutron fluxes relaxes to its fundamental mode.

The neutron multiplication rate  $\lambda$  is calculated with a dynamic method (or relaxation method) [1–3], which solves the neutron transport equation for the neutron density  $n \equiv n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left\{ \iint \rho \left[ \sigma'_{f'} v'_{f'} f'_{f'} + \sigma'_s f'_s \right] v' n' dE' d\vec{\Omega}' - \rho \sigma_t v n \right\} - \vec{\Omega} \vec{\nabla} v n + q. \quad (1)$$

Equation (1) is solved to find the logarithmic time derivative  $\lambda(t) = \partial \ln(N) / \partial t$  of the total number of neutrons,  $N(t)$ . In this case,  $\lambda(t)$  can be referred to as the dynamic neutron multiplication rate.

The paper considers the behavior of  $\lambda(t)$  in a layered spherical system from the initial distribution of neutrons in the system to the time when the neutron flux relaxes to its fundamental mode.

Numerical calculations of problems on the eigenvalue  $\lambda_0$  by the relaxation method start from an arbitrary prompt source distribution  $q(t) = q_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \delta(t)$  and consist in the tracking of neutrons in time. It is assumed that the neutron density distribution in the system eventually relaxes to its fundamental mode. At that time, the spatial, energy, angular  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , and time ( $t$ ) variables separate, and the further behavior of the system will be characterized by a simple exponential dependence of the total number of neutrons in the system,  $N(t) = N_0 \exp[\lambda_0 t]$ . Thus,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0$  during neutron flux relaxation.

Note that the derivative  $\partial N / \partial t$ , for a known density  $n(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t)$  in the entire system, can be calculated for an arbitrary time  $t$  directly from the right-hand side of equation (1). To this end, equation (1) should be integrated over the volume, and neutron angles and energies  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  to give the following expression of three terms:  $\partial N / \partial t = B - J + Q$ , where  $B$  is the total neutron reproduction or the integral of the braced ex-

pression in equation (1),  $J$  is the total leakage of neutron from the system, and  $Q$  is the total independent neutron source. With these three functional we obtain the following expression to calculate  $\lambda(t)$ :

$$\lambda(t) = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{B}{N} - \frac{J}{N} + \frac{Q}{N} = \lambda^{rep} - \lambda^J + \lambda^Q, \quad (2)$$

where  $\lambda^{rep}$ ,  $\lambda^J$ ,  $\lambda^Q$  are reproduction, leakage, source (if present) rates, respectively.

It appeared natural to calculate the neutron reproduction rate  $B$  (3) using the microscopic neutron reproduction cross-section  $\sigma_{rep}(E) = \sigma_t(\bar{\nu}_t - 1)$ , where  $\sigma_t$  is the total microscopic cross-section and  $\bar{\nu}_t$  is the total number of secondary neutrons per one neutron collision with the target nucleus. The cross-sections  $\sigma_{rep}(E)$  are calculated in nodes  $\sigma_t(E)$  and are standardly present in the files of neutron data libraries for each material

$$B = \iiint_{V,E,\bar{\Omega}} \left\{ \iint_{E',\bar{\Omega}'} \left[ \Sigma'_f \nu'_f \sigma'_f + \Sigma'_s \sigma'_s \right] \nu' n' dE' d\bar{\Omega}' - \Sigma_t \nu n \right\} d\bar{r} dE d\bar{\Omega} = \iint_{V,E} \rho \sigma_t(\bar{\nu}_t - 1) \phi d\bar{r} dE = \iint_{V,E} \rho \sigma_{rep} \phi d\bar{r} dE, \quad (3)$$

where  $\phi = \phi(\bar{r}, E, t) = \int_{\bar{\Omega}} \nu n(\bar{r}, \bar{\Omega}, E, t) d\bar{\Omega}$  is the total flux.

For the neutron multiplication rate in the  $l$ -th layer of the system, let us introduce a definition similar to

$\lambda(t)$  for the entire system, specifically,  $\lambda_l(t) = \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t}$ , where  $N_l$  is the number of neutrons in the layer.

The relation between  $\lambda(t)$  and  $\lambda_l(t)$  follows from the algebra:

$$\lambda(t) = \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{N} \frac{\partial \sum_l N_l}{\partial t} = \sum_l \frac{N_l}{N} \left( \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t} \right) = \sum_l w_l \lambda_l(t). \quad (4)$$

In turn,  $\lambda_l(t)$  is expressed in terms of appropriate reproduction rates,  $\lambda_l^{rep}$ , the balance of neutron inflow and outflow in the layer,  $\lambda_l^{\Delta J}$ , and the source  $\lambda_l^Q$ :

$$\lambda_l(t) = \frac{1}{N_l} \frac{\partial N_l}{\partial t} = \frac{B_l}{N_l} - \frac{\Delta J_l}{N_l} + \frac{Q_l}{N_l} = \lambda_l^{rep} - \lambda_l^{\Delta J} + \lambda_l^Q. \quad (5)$$

Nothing principally changes in the grouped-energy approximation. Integration changes to summation and, for example, for  $B$  we obtain the expression similar to (3):

$$B = \sum_g \rho \sigma_g^{rep} \phi_g, \quad \text{where } \rho \sigma_g^{rep} = \left( \sum_k \beta_{0,gk} - \alpha_g \right) \equiv \rho \sigma_g^t (\bar{\nu}_g^t - 1). \quad (6)$$

The paper presents a new BJN-method to calculate the dynamic neutron multiplication rate  $\lambda(t)$ , based on the use of pointwise or grouped-energy microscopic neutron reproduction cross-sections. The rates from grouped-energy calculation by the BJN-method and from the traditional method through the calculation of the logarithmic derivate completely agree. It is shown that almost the same, on average, deviations of  $\lambda(t)$  can be achieved in Monte–Carlo calculations by the BJN-method with about a hundred times smaller number of histories than in the traditional calculation.

## References

1. Белл, Д. Теория ядерных реакторов [Текст] / Д. Белл, С. Г. Глессон. – М. : Атомиздат, 1974.
2. Dermott, E. C. Static and Dynamic Criticality: Are They Different? [Text] // Report: UCRL-TR-201506. – 2003 (November 22). <http://www.llnl.gov/tid/Library.html>.
3. Perel, R. L. Direct and Indirect Computation of the Transport Equation Eigenvalues [Text] / R. L. Perel, J. J. Wagschal // Nucl Sci. Eng. – 1986. – Vol. 94, No. 4. – P. 409–412. DOI: 10.13182/NSE94-409.

## **АНИЗОТРОПНАЯ МОДЕЛЬ ЗАМЫКАНИЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГОПЛАСТИКИ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ В СМЕШАННЫХ ЯЧЕЙКАХ**

*Ю. В. Янилкин, А. Л. Стадник, О. О. Топорова*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

Смешанные ячейки, содержащие два и более веществ, в лагранжево-эйлеровых методах расчета газодинамических и упругопластических течений, как правило, содержат в себе контактные границы (КГ) между различными веществами. Эти методы используют двухэтапный подход. На первом этапе рассматриваются уравнения лагранжевой газодинамики или упругопластики без конвективных членов, то есть осуществляется учет членов уравнений, содержащих давление и напряжения. Учет конвективного переноса за счет перестроения счетной сетки осуществляется на втором этапе.

Проблема расчета смешанных ячеек на первом этапе является объектом исследования в данной работе. Основной проблемой на этом этапе является определение дивергенций компонентов, которые необходимы при определении их термодинамического состояния. Для этого применяются разные модели замыкания уравнений газодинамики в таких ячейках, в том числе использующих релаксацию давлений компонентов. Эти модели могут использоваться и при решении уравнений упругопластики, однако в силу того, что напряжения представляют собой анизотропные величины (в отличие от изотропного давления), точности этих моделей может оказаться недостаточно при моделировании упругопластических течений. В настоящей работе предлагается модель замыкания для уравнений упругопластики, использующая релаксацию напряжений и, в силу этого, обладающая свойством анизотропности. Модель реализована следующим образом. В смешанной ячейке восстанавливается положение КГ в виде отрезка и определяются компоненты напряжения в системе координат, оси которой направлены вдоль и по нормали к КГ. Затем в направлении вдоль КГ используется модель равенства дивергенций компонентов. В направлении нормали к этому отрезку также используется модель замыкания равенства дивергенций, однако с последующей релаксацией соответствующей компоненты напряжения в этом направлении. Приводятся результаты численного решения тестовых задач, демонстрирующие преимущества новой модели замыкания.

## **ANISOTROPIC MODEL OF CLOSING ELASOPLASTICITY EQUATIONS FOR MULTI-MATERIAL MEDIUM IN MIXED CELLS**

*Yu. V. Yanilkin, A. L. Stadnik, O. O. Toporova*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov, Russia

Mixed cells that have two and more materials in Lagrangian-Eulerian methods to compute gas dynamic and elastoplastic flows have contact boundaries between different materials, as a rule. These methods implement a two-stage approach. On the first stage, Lagrangian gas dynamics or elasto-plasticity equations without convective terms are considered, that is the terms of equations for the pressure and stress are accounted for. Convective transfer due to re-meshing is accounted for at the second stage.

The problem of mixed cells computing at the first stage is an object of the research in this paper. The basic problem at this stage is to determine divergences of the materials that are necessary in finding their thermodynamic state. Different closing models for the gas-dynamics equations are used for this purpose in such cells, including the ones that use components pressure relaxation. These models can be used when solving

the equations of elasto-plasticity; however, due to the fact that the stresses are anisotropic values (opposite to the isotropic pressure) the accuracy of these models can happen to be insufficient when modeling elasto-plastic flows. This paper proposes a closing model for the elasto-plasticity equations that uses relaxation of stresses and, due to this fact, has the property of anisotropy. The model is realized as follows. The position of the contact boundary is restored in the mixed cell as a section, and stress components are determined in the system of coordinates, where the axes are directed along contact boundaries and along the normal to the contact boundaries. Then the equality model of the divergences of the materials is used in the direction along the contact boundary. A closing model of equal divergences is also used in the direction of the normal to this section; however, it is used with the follow-up relaxation of the respective stress component in this direction. The results of numerical solution of some test problems that demonstrate the advantages of a new closing model are provided.

---

6-66

## **МЕТОД РАСЧЕТА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ, ГРАНИЦА КОТОРОГО ПРОХОДИТ ВНУТРИ НЕПОДВИЖНЫХ ЯЧЕЕК**

*О. М. Войтенко, Ю. В. Янилкин*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

При решении задач взаимодействия недеформируемых твердых тел с окружающей средой часто возникает проблема корректного моделирования движения газодинамических течений в окрестности этих тел. Можно выделить два подхода, применяемые для решения таких задач на эйлеровых сетках. Согласно первому подходу контактная граница твердого тела и окружающей среды совпадает с линиями сетки, согласно второму – граница твердого тела может проходить внутри ячейки, что приводит к появлению смешанных ячеек, содержащих вещество твердого тела и вещества окружающей среды. В данном докладе рассматривается метод, относящийся ко второму подходу.

В докладе представлен двумерный метод расчета смешанных ячеек с твердым телом, реализованный в методике ЭГАК [1]. Данная методика использует произвольно лагранжево-эйлеров (ALE) подход, аппроксимация уравнений газовой динамики производится в два этапа. Первый из них представляет собой решение уравнений газодинамики в лагранжевых переменных, а второй – учет конвективных потоков на этапе адвекции, имеющих место из-за построения новой сетки. В докладе описана аппроксимация уравнений газодинамики в смешанных ячейках с твердым телом на каждом из указанных этапов. В методе для минимизации погрешностей, связанных с малыми объемными долями вещества окружающей среды в смешанных ячейках, производится корректировка сетки перемещением ближайших узлов таких ячеек на границу твердого тела, что позволяет избавляться от таких смешанных ячеек.

Приводятся результаты одномерных и двумерных расчетов, демонстрирующие эффективность и точность предлагаемого метода.

### **Литература**

1. Дарова, Н. С. Комплекс программ ЭГАК. Лагранжево-эйлерова методика расчета двумерных газодинамических течений многокомпонентной среды [Текст] / Н. С. Дарова, О. А. Дибиров, Г. В. Жарова, А. А. Шанин, Ю. В. Янилкин // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моде-

лирование физических процессов. – 1994. – Вып. 2. – С. 51–58.

## **A COMPUTATIONAL METHOD FOR GAS DYNAMIC FLOWS WITH A RIGID BODY HAVING AN INTERFACE INSIDE MOTIONLESS CELLS**

*O. M. Voytenko, Yu. V. Yanilkin*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”,  
Sarov, Russia

When solving the problem of a rigid body interacting with the environment, the problem of adequately simulating the motion of gas dynamic flows in the vicinity of such bodies often occurs. Two approaches to the solution of such problems using Eulerian meshes can be mentioned. In one of them the interface between the rigid body and the environment coincides with the mesh lines, in the another approach the rigid body interface may be inside a cell of the mesh and this leads to the occurrence of mixed cells containing the rigid body material and the environment materials. The method considered in the paper is used in the second approach.

The paper describes a 2D computational method for mixed cells with a rigid body, which has been implemented in the EGAK code [1]. This code uses the arbitrarily Lagrangian-Eulerian (ALE) approach, the gas dynamic equations are approximated in two stages. First, the gas dynamic equations are solved in Lagrangian variables and then the convective flows in the advection phase are taken into account, which take place due to the generation of a new mesh. The paper describes the gas dynamic equation approximation in mixed cells with a rigid body in each of the two stages above. In this method, to minimize errors occurring due to small volume fractions of the environment materials in mixed cells, the mesh is corrected by moving the nodes neighboring these cells to the rigid body interface and this allows avoiding such mixed cells.

Results of 2D and 3D computations demonstrating the proposed method efficiency and accuracy are presented.

### **References**

1. Darova, N. S. The EGAK software package. The Lagrangian-Eulerian technique for solving two-dimensional multicomponent fluid flows [Text] / N. S. Darova, O. A. Dibirov, G. V. Zharova, A. A. Shanin, Yu. V. Yanilkin // *Voprosy Atomnoy Nauki i Tekhniki. Ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov.* – 1994. – Вып. 2. – С. 51–58 (in Russian).

---

6-67

## **МОДИФИКАЦИЯ СХЕМЫ ТИПА «КРЕСТ» ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ «ШАХМАТНОЙ» ПОГРЕШНОСТИ**

*Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. М. Ерофеев*

ФГУП «Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский НИИ экспериментальной физики, Саров, Россия

В настоящее время при создании методик, предназначенных для численного моделирования газодинамических течений с сопутствующими процессами, такими как упругопластика, теплопроводность и др., нашли широкое применение методы, основанные на произвольно лагранжево-эйлеровом подходе. При использовании этого подхода аппроксимация уравнений механики сплошной среды производится в два этапа. На первом (лагранжевом) этапе решаются уравнения без конвективных членов, т. е. уравнения в лагранжевых переменных. На втором (эйлеровом) этапе производится построение новой счетной сетки по заданному закону движения узлов сетки и осуществляется пересчет

величин на новую сетку, т. е. аппроксимация отброшенных на первом этапе членов уравнений. При этом в качестве начальных данных используются значения величин, полученные на первом этапе вычислений. Частным случаем такого рода численных методов являются чисто эйлеровы методы, основанные на использовании неподвижной счетной сетки.

На лагранжевом этапе вычислений часто используются классические разностные схемы типа «крест» с разнесенными величинами, в которых скорость определяется в узлах счетной сетки, а скалярные величины – в ячейках. В данной работе показано, что эти схемы обладают особенностью, приводящей к «шахматному» распределению термодинамических величин на сетке.

Схема типа «крест» используется и в методике ЭГАК [1], нашедшей достаточно широкое применение при 2D и 3D моделировании разнообразных задач газодинамики с сопутствующими процессами. В настоящей работе предлагается модификация 2D разностной схемы методики, свободная от указанной «шахматной» погрешности. Приводятся тестовые расчеты, на которых показано, что новая схема позволяет минимизировать погрешность исходной схемы, связанной с «шахматным» распределением термодинамических величин. Модификация носит достаточно общий характер и может быть использована и в других аналогичных схемах.

### Литература

1. Янилкин, Ю. В. Комплекс программ ЭГАК для расчетов двумерных течений многокомпонентной среды [Текст] / Ю. В. Янилкин, А. А. Шанин, Н. П. Ковалев и др. // ВАНТ, сер. ММФП. – 1993. – Вып. 4. – С. 69–75.

## THE “KREST” TYPE SCHEME MODIFICATION TO ELIMINATE THE “STAGGERED” ERROR

*Yu. V. Yanilkin, O. O. Toporova, A. M. Erofeev*

FSUE “Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics”, Sarov,  
Russia

Today, methods based on the arbitrarily Lagrangian-Eulerian approach are widely used to develop codes for the numerical simulation of gas dynamic flows with accompanying processes, such as elastoplasticity, heat conduction, etc. In this approach, the continuum mechanics equations are approximated in two stages. In the first (Lagrangian) stage the equations without convective terms are solved, i.e. the equations in Lagrangian variables. In the second (Eulerian) stage a new computational mesh is built according to the given motion law of the mesh nodes and all values are recalculated to this new mesh, i. e. the equation terms rejected in the first stage are approximated. The values of quantities calculated in the first stage are used as the initial data. Purely Eulerian methods based on the use of a fixed computational mesh are a special case of such numerical methods.

In the Lagrangian stage of computations, the classic difference schemes of the “krest” (cross) type with staggered values are used, where the velocity is calculated at nodes and all scalar values are calculated in cells of the computational mesh. The paper shows that these schemes have a characteristic feature leading to the staggered distribution of thermodynamic quantities over the mesh.

The “krest” scheme is also used in the EFAK code [1], which is often used in the 2D and 3D simulation of various CFD problems with accompanying processes. The paper offers a modification to the 2D difference scheme implemented in the code, which is free of the “staggered” error above. Test computations are described, their results demonstrate that the new scheme allows minimizing the original scheme error caused by the staggered distribution of thermodynamic quantities. The modification described has a sufficiently general nature and can be used in the other similar schemes.

### References

1. Yanilkin, Yu. V. The EGAK software package for simulation of two-dimensional multicomponent fluid flows [Text] / Yu. V. Yanilkin, A. A. Shanin, N. P. Kovalyev et al. // VANT, Ser. MMFP. – 1993. – Issue 4. – P. 69–75, (in Russian).