Точные решения стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае

А.А. Шестаков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Россия

Проблема тестирования стоит перед каждой программой. При тестировании программ в качестве модельных задач желательно выбирать задачи, которые имеют аналитические решения. Хотя определенный прогресс в построении аналитических решений для уравнения переноса теплового излучения достигнут [1], [2], [3], [4], но этих решений не всегда достаточно для разных классов задач переноса.

Для получения аналитических решений в оптически плотных средах можно использовать разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана. Получение решений одномерных задач переноса теплового излучения через разложение в ряд Неймана использовалось ранее в работах [5], [6], [7], [8]. Разложение резольвенты оператора переноса в ряд Неймана позволяет по известному температурному распределению получать спектрально-угловые характеристики поля излучения. После представления интенсивности через ряд Неймана в уравнении энергии приходится решать две задачи: интегрирование операторов разложения в пространстве направлений полета фотонов и интегрирование спектральных величин по энергии излучения. Вычислению этих интегралов помогает использование ряда упрощений. Интегрирование в пространстве направлений полета фотонов упрощается, так как ряд Неймана записывается через функцию Планка, которая не зависит от этих направлений, а для оставшихся выражений используются аналитические формулы интегрирования по направлениям.

В теории переноса теплового излучения по аналогии с температурой вещества вводят радиационную температуру или температуру излучения, которая может существенно отличаться от температуры вещества [9,10,11]. Это отличие называется ‘отрывом’ температур. В данной работе рассматриваются способы построения таких решений.

Целями работы являются:

1. получение аналитических решений стационарной системы уравнений переноса излучения и энергии в многомерном случае;
2. получение аналитических решений с ‘отрывом’ температур.

1. Система уравнений переноса спектрального излучения и энергии

Рассмотрим спектральную систему уравнений переноса излучения и энергии для многомерной геометрии [12]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)+(\kappa_\nu+\chi_\nu)I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}', \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega(I_\nu-I_{\nu p})d\vec{\Omega}d\nu+Q, \qquad (1.2)$$

где t - время, $\vec{r}$ - радиус-вектор, c - скорость света,

$\vec{\Omega}'$ – единичный вектор в направлении движения фотонов до рассеяния,

$\vec{\Omega}$ – единичный вектор в направлении движения фотонов после рассеяния,

ν - частота, $\varepsilon = h\nu$ - энергия фотона, h=6.625·10^{-16} эрг·сек - постоянная Планка,

κ_ν - коэффициент поглощения фотонов, κ_ν>0,

$\beta_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)$ - индикатриса рассеяния фотонов, β_ν≥0,

χ_ν - коэффициент рассеяния фотонов, $\chi_\nu=\frac{1}{16\pi^2}\int\limits_\Omega\int\limits_{\Omega'}\beta_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}$ ≥0,

$I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega})$ - спектральная интенсивность излучения,

$U_\nu=\int\limits_\Omega I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega})d\vec{\Omega}$ - спектральная плотность излучения, умноженная на скорость света,

$I_{p\nu}=\frac{1}{4\pi}B_\nu$ - спектральная интенсивность равновесного излучения,

$B_\nu=\frac{8\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{\mathrm{e}^{h\nu/KT}-1}=\frac{p_0\varepsilon^3}{\mathrm{e}^{\varepsilon/KT}-1}$ - спектральная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света (функция Планка с множителем $p_0=\frac{8\pi}{c^2h^2}$), K=1.38·10^{-16} эрг/град - постоянная Больцмана, $\int\limits_0^\infty\frac{\varepsilon^3}{\mathrm{e}^{\varepsilon/KT}-1}d\varepsilon=\frac{\pi^4}{15}T^4$,

$B=\int\limits_0^\infty B_\nu d\nu=\frac{1}{h}\int\limits_0^\infty B_\nu d\varepsilon=c\sigma T^4$ - полная плотность равновесного излучения, умноженная на скорость света, $\sigma=4\sigma_0/c$, σ_0=5.67·10^{-5} эрг/(см^2·сек·град^4) - постоянная Стефана-Больцмана,

$T_f=\sqrt[4]{\frac{1}{c\sigma}\int\limits_0^\infty U_\nu d\nu}$ - температура излучения, T – температура вещества,

E – внутренняя энергия, Q – тепловой источник.

Температуре в 1 электрон-вольт соответствует энергия KT=1.6·10^{-12} эрг, поэтому в дальнейшем при использовании формулы для B_ν будем пользоваться системой единиц в которой K=1 и $B_\nu = \dfrac{p_0\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T}-1}$. Для краткости изложения функцию U_ν будем называть плотностью излучения, функцию B_ν - функцией Планка.

В стационарном случае получаем систему

$$\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)+(\kappa_\nu+\chi_\nu)I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}+\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(t,\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}', \qquad (1.3)$$

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega (I_\nu - I_{p\nu})d\vec{\Omega}d\nu = -Q.$$

Уравнение энергии можно упростить, если записать его через поток и вспомогательную функцию F:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega (I_\nu - I_{p\nu})d\vec{\Omega}d\nu = F-\int_0^\infty\int_\Omega\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu = F-\int_0^\infty div\vec{S}_\nu d\nu = F-div\vec{S}=-Q, \qquad (1.4)$$

где $\vec{S}_\nu=\int_\Omega \vec{\Omega}I_\nu d\vec{\Omega}$ - спектральный поток излучения, $\vec{S}=\int_0^\infty \vec{S}_\nu d\nu$ - полный поток излучения, $F=\int_0^\infty\int_\Omega\left(\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega'}\beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}'-\chi_\nu I_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu=\int_0^\infty\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_{\Omega'}\beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}-\chi_\nu U_\nu\right)d\nu$.

2. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае без рассеяния

Для начала рассмотрим решение уравнения (1.3) без рассеяния при $\beta_\nu=0$, F=0:

$$\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)+\kappa_\nu I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}. \qquad (1.5)$$

Запишем уравнение (1.5) в операторном виде $LI_\nu = I_{p\nu}$, где $L=E+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)$, $EI_\nu=I_\nu$.

Тогда точное значение интенсивности можно записать в виде $I_\nu = L^{-1}I_{p\nu}$.

Следуя работе [1], разложим в ряд Неймана резольвенту оператора $\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)$:

$$\left[E+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right]^{-1}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n=E-\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2-\ldots$$

Отсюда можно получить точное значение интенсивности в виде бесконечного ряда от равновесной интенсивности:

$$I_\nu = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu} = I_{p\nu} - \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right) I_{p\nu} + \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu} - \ldots \qquad (1.6)$$

Разложение интенсивности в ряд Неймана позволяет после интегрирования по Ω записать точные значения плотности и потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка. Обоснование применения ряда Неймана для решения уравнения переноса приведено в работах Ларсена [1,2].

Запишем уравнение (1.6) в операторном виде с выделением первых четырех слагаемых

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}L_1 + \kappa_\nu^{-1}L_2 - \kappa_\nu^{-1}L_3 + \ldots,$$

где $L_1 = \kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right) I_{p\nu} = \left(\vec{\Omega}, \nabla I_{p\nu}\right)$,

$$L_2 = \kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu} = \kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right) I_{p\nu} = \left(\vec{\Omega}, \nabla \kappa_\nu^{-1} L_1\right),$$

$$L_3 = \kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^3 I_{p\nu} = \kappa_\nu \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right)\right) I_{p\nu} = \left(\vec{\Omega}, \nabla \kappa_\nu^{-1} L_2\right)$$ и т.д.

Интегрирование по Ω можно упростить, используя известные соотношения [1]:

$$\int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega} = 0$$ для нечетных значений n=1,3,5,…, (1.7)

$$\int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{n+1}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n$$ для четных значений n=0,2,4,…,

где последнее выражение выполняется для четных значений κ_ν, не зависимых от пространства $\vec{r}$ (зависимость от частоты остается). В общем случае оно выполняется только для первых двух значений n=0,2:

$$\int_\Omega d\vec{\Omega} = 4\pi, \quad \int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 = \frac{4\pi}{3}\kappa_\nu^{-1} div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right).$$

Из соотношений (1.7) получаем:

$$\int_\Omega L_1 d\vec{\Omega} = 0,$$

$$\int_\Omega L_2 d\vec{\Omega} = \int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}, \nabla I_{p\nu}\right)\right) d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3} div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right),$$

$$\int_\Omega L_3 d\vec{\Omega} = \int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}, \nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega}\nabla I_{p\nu}\right)\right)\right) d\vec{\Omega} = 0.$$

Используя соотношения (1.7) можно записать точные значения плотности и потока излучения в виде бесконечного ряда от функции Планка

$$U_\nu = \int_\Omega I_{p\nu} d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1} \int_\Omega L_1 d\vec{\Omega} + \kappa_\nu^{-1} \int_\Omega L_2 d\vec{\Omega} - \kappa_\nu^{-1} \int_\Omega L_3 d\vec{\Omega} + \ldots = B_\nu + \frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} div\left(\kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu\right) + \ldots, \tag{1.8}$$

$$\vec{S}_\nu = \int_\Omega \vec{\Omega} I_\nu d\vec{\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_\Omega \vec{\Omega} \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu} d\vec{\Omega} = -\frac{1}{3} \kappa_\nu^{-1} \nabla B_\nu + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \int_\Omega \vec{\Omega} \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu} d\vec{\Omega}.$$

Для этих выражений должно выполняться уравнение баланса частиц $div\vec{S}_\nu + \kappa_\nu U_\nu = \kappa_\nu B_\nu$, т.е., если при приближенном вычислении потока брать несколько членов ряда, то плотность необходимо вычислять не из формулы (1.8), а через поток и функцию Планка по формуле $U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} div\vec{S}_\nu$, чтобы не нарушать условие сохранения частиц в системе.

Выражения (1.6), (1.8) позволяют при известной равновесной интенсивности $I_{p\nu}(T)$, которая определяется только распределением температуры, и при заданных коэффициентах поглощения и рассеяния найти по явной формуле аналитические выражения основных спектральных величин $I_\nu, U_\nu, \vec{S}_\nu$. После нахождения этих величин можно перейти к получению температуры из уравнения (1.4). Для нахождения температуры подставим выражение (1.6) в (1.4):

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n I_{p\nu}\right] d\vec{\Omega} d\nu = -Q.$$

Если ввести оператор $M_n = \int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1} \nabla\right)^n d\vec{\Omega}$, n =0,1,2,..., (1.9)

то остается суммирование только по четным значениям M_{2n} и уравнение для нахождения температуры принимает вид

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \left(\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n} I_{p\nu}\right) d\nu = -Q. \tag{1.10}$$

Первые четыре значения оператора M_n имеют простой вид: $M_0 = 4\pi$, M_1=0, $M_2 I_{p\nu} = \frac{4\pi}{3} \kappa_\nu^{-1} div\left(\kappa_\nu^{-1} \nabla I_{p\nu}\right)$, M_3=0. Освободиться от интеграла по $\vec{\Omega}$ в операторе M_4 в общем случае уже не удается. В самом простом случае при постоянном коэффициенте поглощения $\kappa_\nu = \kappa = const$ оператор M_n можно записать в виде

$$M_n = \int\limits_{\Omega} \left(\vec{\Omega}, \kappa^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega} = \left[1 + (-1)^n\right] \frac{2\pi}{n+1} \left(\kappa^{-1}\nabla\right)^n$$, n =0,1,2,....

При $\kappa = const$ уравнение для нахождения температуры (1.10) принимает вид

$$\frac{1}{3\kappa}\nabla^2 T^4 + \frac{1}{5\kappa^3}\nabla^4 T^4 + \frac{1}{7\kappa^5}\nabla^6 T^4 + ... = -Q \quad (1.11)$$

Общее решение уравнения (1.11) даже в простейшем одномерном случае получить не удается. Но частными решениями уравнения (1.11) при Q= const будут все решения дифференциального уравнения второго порядка $\nabla^2 T^4 = \nabla \cdot \nabla T^4 = \Delta T^4 = -3\kappa Q$. То есть для получения решения можно рассматривать не все члены бесконечного ряда (1.11), а только первое слагаемое.

Если использовать **первый член в разложении** резольвенты в ряд Неймана (нет зависимости интенсивности от Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu},\ U_\nu = B_\nu,\ \vec{S}_\nu = \int\limits_{\Omega} \vec{\Omega} I_{p\nu} d\vec{\Omega} = 0,\ U = c\sigma T^4,\ S=0. \quad (1.12)$$

Из уравнения (1.4) в этом случае получаем Q=0. Из уравнения (1.3) получаем $\left(\vec{\Omega}, \nabla I_{p\nu}\right) = 0$ или после интегрирования $\nabla T = 0$, откуда следует тривиальное решение $T_f = T$ =const, описывающее локальное термодинамическое равновесие в среде.

Если рассматривать **первые два члена в разложении** резольвенты (линейную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$$I_\nu = I_{p\nu} - \frac{1}{\kappa_\nu} L_1,\ U_\nu = B_\nu,\ \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu,\ U = c\sigma T^4,\ \vec{S} = -\frac{1}{3}\left(\int\limits_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu\right)\nabla T. \quad (1.13)$$

Система (1.13) отличается от (1.12) выражениями для интенсивности и потока излучения. В этом случае 'отрыва' температур как и в предыдущем случае не происходит, т.е. $T_f = T$.

Для проверки полученного решения подставим выражение интенсивности из (1.13) в уравнение (1.5), записанное в виде равенства двух операторов $\left(\vec{\Omega}, \nabla I_\nu\right) = \kappa_\nu \left(I_{p\nu} - I_\nu\right)$. После подстановки оператор переноса равен $\left(\vec{\Omega}, \nabla I_\nu\right) = L_1 - L_2$, а оператор взаимодействия излучения с веществом равен $\kappa_\nu \left(I_{p\nu} - I_\nu\right) = L_1$. Операторы переноса и взаимодействия излучения с веществом в уравнении (1.3) совпадают с точностью до члена L_2, который при постоянном коэффициенте поглощения пропорционален κ^{-1} и становится малым в оптически плотных средах.

Если рассмотреть **первые три члена в разложении** резольвенты (квадратичную зависимость интенсивности в пространстве Ω), то решение уравнения переноса принимает вид

$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right)$, $U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} div\vec{S}_\nu$, $\vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu$, $U = c\sigma T^4 + \delta U$, $\vec{S} = -\frac{1}{3}\left(\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu\right)\nabla T$,

где $\delta U = -\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} div\vec{S}_\nu d\nu$. (1.14)

Из уравнения энергии (1.4) получаем:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega \left(I_\nu - I_{p\nu}\right) d\vec{\Omega} d\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu M_2 I_{p\nu} d\nu = \frac{1}{3}\int_0^\infty div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right) d\nu = -div\vec{S} = -Q \quad (1.15)$$

Система (1.14) отличается от (1.13) выражениями для интенсивности и плотности излучения и может давать решения с ‘отрывом’ температур, то есть $T_f \neq T$. Это возможно даже при условии $div\vec{S} = 0$, если выполняются неравенства $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} div S_\nu d\nu \neq 0$ или $U_\nu \neq B_\nu$.

Точные аналитические решения системы (1.14), (1.15) должны удовлетворять 3 условиям:

1. аналитическое нахождение интеграла $\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}d\nu$ для формулы полного потока;
2. аналитическое нахождение интеграла $\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} div\vec{S}_\nu d\nu$ для формулы полной плотности;
3. выполнение условия L_3=0 для того, чтобы решение удовлетворяло уравнению переноса (1.5).

Выполнение условия 1 и уравнение $div\vec{S} = Q$ дают формулы нахождения температуры. Выполнение условия 2 и требование $\int_0^\infty \kappa_\nu^{-1} div\vec{S}_\nu d\nu \neq 0$ дают решения с ‘отрывом’ температур.

Выполнение условия 3 требуется для получения аналитических решений уравнения переноса без рассеяния. При учете рассеяния оно видоизменяется. Для анализа условия 3 подставим интенсивность из системы (1.14) в уравнение (1.5). После подстановки оператор переноса имеет вид $\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)=L_1-L_2+L_3$. Оператор взаимодействия излучения с веществом имеет вид $\kappa_\nu\left(I_{p\nu}-I_\nu\right)=L_1-L_2$. Видно, что операторы переноса и взаимодействия совпадают с точностью до члена L_3. Для всех направлений в пространстве Ω условие L_3=0 выполняется, когда коэффициент поглощения пропорционален ∇B_ν, так как из равенства $\nabla\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)=0$ следует условие $L_3=\frac{\kappa_\nu}{4\pi}\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right)\right)B_\nu=0$. Однако в этом случае 'отрыва' температур не происходит, так как $\int_0^\infty\frac{1}{\kappa_\nu}div\vec{S}_\nu d\nu=-\frac{1}{3}\int_0^\infty\kappa_\nu^{-1}\nabla\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)d\nu=0$, то есть не выполняется условие 2.

В сером приближении при $I_p=\frac{1}{4\pi}B(T)$ с постоянным коэффициентом поглощения $\kappa_\nu=\kappa$ решения с 'отрывом' температур можно найти для функции B(T) с квадратичной зависимостью от координат, так как для неё выполняется условие $L_3=\frac{1}{4\pi\kappa^2}\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\vec{\Omega},\nabla\right)\right)\right)B=0$.

В этом случае решение системы (1.14), (1.15) имеет вид

$I=\frac{1}{4\pi}\left[B-\frac{1}{\kappa}\left(\vec{\Omega},\nabla B\right)+\frac{1}{\kappa^2}\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\vec{\Omega},\nabla B\right)\right)\right]$, $U=B+\delta U$, $\delta U=-\frac{1}{\kappa}div\vec{S}=-\frac{Q}{\kappa}$,

$\vec{S}=-\frac{1}{3\kappa}\nabla B$, $B=c\sigma T^4$, $\Delta T^4=-\frac{3\kappa}{c\sigma}Q$, $\beta=\chi$=0.

3. Решение системы уравнений переноса и энергии в стационарном случае с анизотропным рассеянием

Для получения решений в более общем случае при учете первых трёх членов в разложении подставим выражения $I_\nu=I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}\left(L_1-L_2\right)$, $\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)=L_1-L_2+L_3$ в систему (1.3), (1.4) .

Из уравнения (1.3) получаем соотношение

$$L_3+\chi_\nu\left[I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}\left(L_1\left(\vec{\Omega}\right)-L_2\left(\vec{\Omega}\right)\right)\right]=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)\left[I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}\left(L_1\left(\vec{\Omega}'\right)-L_2\left(\vec{\Omega}'\right)\right)\right]d\vec{\Omega}' . \quad (1.16)$$

Рассмотрим частный случай зависимости индикатрисы от координат $\vec{r}$ и $\vec{\Omega}$ при $\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)=\frac{1}{4\pi}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$. Тогда правая часть уравнения (1.16) принимает вид

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)I_\nu(\vec{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}'=\frac{1}{16\pi^2}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)U_\nu(\vec{r}). \qquad (1.17)$$

С учетом выражения (1.17) из уравнения (1.16) получаем

$$\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)=4\pi U_\nu^{-1}\left(\chi_\nu I_\nu+L_3\right)=4\pi U_\nu^{-1}\left[\chi_\nu I_\nu+\kappa_\nu\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^3 I_{p\nu}\right], \qquad (1.18)$$

$$\beta_\nu^1=16\pi^2\left\{\chi_\nu\left[I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}\left(L_1-L_2\right)\right]+L_3\right\}U_\nu^{-1}=4\pi\left(\chi_\nu B_\nu-\chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{1\nu}+\chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{2\nu}+B_{3\nu}\right)U_\nu^{-1},$$

где $B_{1\nu}^1=\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right),\quad B_{2\nu}=\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right)\right),\quad B_{3\nu}=\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right)\right)\right)=4\pi L_3$.

Полученное выражение для индикатрисы рассеяния удовлетворяет условию

$$\frac{1}{16\pi^2}\int_\Omega\int_{\Omega'}\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},\vec{\Omega}'\right)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}=\frac{1}{16\pi^2}\int_\Omega\int_{\Omega'}\frac{1}{4\pi}\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}=\frac{1}{16\pi^2}\int_\Omega\beta_\nu^1\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\frac{\int_\Omega L_3 d\vec{\Omega}+\chi_\nu\left[\int_\Omega I_{p\nu}d\vec{\Omega}-\kappa_\nu^{-1}\left(\int_\Omega L_1 d\vec{\Omega}-\int_\Omega L_2 d\vec{\Omega}\right)\right]}{U_\nu}=\frac{\chi_\nu\left[B_\nu+\kappa_\nu^{-1}\frac{4\pi}{3}div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right)\right]}{B_\nu+\frac{1}{3}\kappa_\nu^{-1}div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)}=\chi_\nu\left(\vec{r}\right).$$

Неотрицательность индикатрисы рассеяния проверяется после нахождения формулы для температуры.

Используя соотношения $\int_\Omega L_1 d\vec{\Omega}=0$, $\int_\Omega L_3 d\vec{\Omega}=0$, $\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)=L_1-L_2+L_3$,

$$F=\int_0^\infty\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_{\Omega'}\beta_\nu I_\nu d\vec{\Omega}'d\vec{\Omega}-\chi_\nu U_\nu\right)d\nu=\int_0^\infty\left(\frac{1}{4\pi}\int_\Omega\beta_\nu d\vec{\Omega}-\chi_\nu\right)U_\nu d\nu=\int_0^\infty\left(\frac{1}{16\pi^2}\int_\Omega\beta_\nu^1 d\vec{\Omega}-\chi_\nu\right)U_\nu d\nu=0,$$

из уравнения (1.4) получаем уравнение для нахождения температуры

$$\int_0^\infty\kappa_\nu\int_\Omega(I_\nu-I_{p\nu})d\vec{\Omega}d\nu=-\int_0^\infty\int_\Omega\left(\vec{\Omega},\nabla I_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu=\int_0^\infty\int_\Omega\left(L_1-L_2+L_3\right)d\vec{\Omega}d\nu=\frac{1}{3}\int_0^\infty div\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla B_\nu\right)d\nu=-Q. \qquad (1.19)$$

Для примера рассмотрим решения системы (1.3), (1.4) с индикатрисой рассеяния вида (1.18) в одномерном плоском, двумерном осесимметричном и трехмерном декартовом случаях. Решения с ‘отрывом’ температур будем искать в двух вариантах:

1. в сером приближении с постоянными коэффициентами рассеяния χ, поглощения κ и постоянным источником Q;

2. в спектральном приближении с коэффициентами рассеяния и поглощения, зависящими от температуры и спектра фотонов, где в качестве спектрального коэффициента поглощения используется формула из работы Флека [13].

4. Одномерная плоская геометрия

Вариант 1.

Пусть $0 \le r \le R$, $\kappa = \chi = 1$, $Q = \dfrac{2c\sigma}{3}$, $c\sigma = 4110$, $a_0 = -\dfrac{3\kappa}{2c\sigma}Q = -1,$ $a_1 = 0,\ a_2 = \left(R+1\right)^2 + 1$.

Тогда $I = \dfrac{c\sigma}{4\pi}\left(R^2 - r^2 + 2\left(R + r\mu + 1 - \mu^2\right)\right) \ge 0$, $S = Qr = \dfrac{2}{3}c\sigma r$, $U = c\sigma\left(R^2 - r^2 + 2R + \dfrac{4}{3}\right) > 0$,

$B = c\sigma T^4$, $T = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2\left(R+1\right)} > 0$, $T_f = \sqrt[4]{R^2 - r^2 + 2\left(R + \dfrac{2}{3}\right)} > 0$,

$$\beta = \frac{R^2 - r^2 + 2\left(R + \mu r + 1 - \mu^2\right)}{R^2 - r^2 + 2R + \dfrac{4}{3}} \ge 0.$$

Вариант 2.

Пусть $0 \le r \le R$, $\chi_\nu = 1$, $Q = \dfrac{2m}{21}$, $m = \dfrac{15c\sigma}{\pi^4}\dfrac{m_0}{\kappa_0} \approx \dfrac{3230310}{\kappa_0}$, $c\sigma = 4110$, $a_0 = -1,\ \ a_1 = 0,$

$a_2 = \left(R+1\right)^2 + 1$, n=0, $\kappa_0 = 10^3$, $\kappa_\nu = \kappa_0 \dfrac{(e^{\varepsilon/T} - 1)}{\varepsilon^3 e^{\varepsilon/T}}$.

Тогда $I_\nu = \dfrac{1}{4\pi}\left[B_\nu - \dfrac{\mu}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r} + \dfrac{\mu^2}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right]$, $U_\nu = B_\nu + \dfrac{1}{3\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)$, $S_\nu = -\dfrac{1}{3\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}$,

$S = Qr = \dfrac{2m}{21}r$, $U = B + \delta U$, $B = c\sigma T^4$, $T = \sqrt[7]{R^2 - r^2 + 2\left(R+1\right)} > 0$,

$\delta U = \dfrac{30c\sigma T^3}{21\kappa_0^2\pi^4}\left(\dfrac{2r^2}{7T^7}m_4 - m_1\right)$, $m_4 = 3m_3 - 2m_2 - 8m_1 \approx 10898177$, $m_1 \approx 3636098$,

$$\beta_\nu\left(\mu, r, T\right) = \frac{\left[B_\nu - \dfrac{\mu}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r} + \dfrac{\mu^2}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right] + \mu^3\dfrac{\partial}{\partial r}\left[\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)\right]}{B_\nu + \dfrac{1}{3\kappa_\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{\kappa_\nu}\dfrac{\partial B_\nu}{\partial r}\right)}.$$

5. Двумерная осесимметричная геометрия

Вариант 1.

$I=\frac{B}{4\pi}-\frac{1}{4\pi\kappa}\left\{\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}-\frac{1}{\kappa}\left[\xi\frac{\partial}{\partial r}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi\frac{\partial B}{\partial r}+\mu\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]\right\}$, $U=B-\frac{Q}{\kappa}$, $\vec{S}=-\frac{1}{3\kappa}\nabla B$,

$T=\sqrt[4]{a_0r^2-\left(2a_0+0.5Q\right)z^2+a_2r+a_3z+a_4}$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I,U,T.

Вариант 2.

$I_\nu=I_{p\nu}-\kappa_\nu^{-1}\left(L_1-L_2\right)$, $U_\nu=B_\nu-\kappa_\nu^{-1}div\vec{S}_\nu$, $\vec{S}_\nu=-\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu$, $U=c\sigma T^4+\delta U$,

$$\delta U=m_6T^{n+3}+\frac{m_5}{T^{n+4}}\left[T_0^2r^2+\left(2T_0+0.5Q_1\right)^2z^2\right],\quad \vec{S}=-\frac{m}{3(n+7)}\nabla T^{n+7}, \tag{1.21}$$

$\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},T\right)=\left(\chi_\nu B_\nu-\chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{1\nu}+\chi_\nu\kappa_\nu^{-1}B_{2\nu}+B_{3\nu}\right)U_\nu^{-1}$, $T^{n+7}=T_0r^2-\left(2T_0+0.5Q_1\right)z^2+T_2z+T_3$,

где $B_{1\nu}^1=\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right)=\left(\xi\frac{\partial B_\nu}{\partial r}+\mu\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right)$, $div\vec{S}=Q$,

$B_{2\nu}=\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right)\right)=\xi^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial B_\nu}{\kappa_\nu\partial r}\right)+\xi\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial B_\nu}{\kappa_\nu\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_\nu}{\kappa_\nu\partial r}\right)\right]+\mu^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_\nu}{\kappa_\nu\partial z}\right)$,

$B_{3\nu}=\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla\kappa_\nu^{-1}\left(\vec{\Omega},\nabla B_\nu\right)\right)\right).$ Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

6. Трехмерная геометрия

Вариант 1.

$I=I_\nu-\kappa^{-1}\left(L_1-L_2\right)$, $U=c\sigma T^4-\frac{Q}{\kappa}$, $\vec{S}=-\frac{c\sigma}{3\kappa}\nabla T^4$,

где $L_1=\frac{1}{4\pi}\left(\Omega_1\frac{\partial B}{\partial x_1}+\Omega_2\frac{\partial B}{\partial x_2}+\Omega_3\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)$, $L_2=\frac{1}{4\pi\kappa}\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\Omega_1\frac{\partial B}{\partial x_1}+\Omega_2\frac{\partial B}{\partial x_2}+\Omega_3\frac{\partial B}{\partial x_3}\right)\right)$,

$L_3=\frac{1}{4\pi\kappa^2}\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\vec{\Omega},\nabla\left(\vec{\Omega},\nabla B\right)\right)\right)$,

$T^4=a_0x_1^2+a_1x_1+a_2+b_0x_2^2+b_1x_2+b_2+c_0x_3^2+c_1x_3+c_2$, $a_0+b_0+c_0=-\frac{3\kappa}{2c\sigma}Q$. Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Вариант 2.

$$I_\nu = I_{p\nu} - \kappa_\nu^{-1}\left(L_1 - L_2\right),\quad U_\nu = B_\nu - \kappa_\nu^{-1} div \vec{S}_\nu,\quad \vec{S}_\nu = -\frac{1}{3\kappa_\nu}\nabla B_\nu,\quad \vec{S} = -\frac{m}{3(n+7)}\nabla T^{n+7},$$

$$U = c\sigma T^4 + \delta U,\quad \delta U = m_7 T^{n+3} + \frac{m_8}{T^{n+4}}\left[\left(2a_0 x_1 + a_1\right)^2 + \left(2b_0 x_1 + b_1\right)^2 + \left(2c_0 x_1 + c_1\right)^2\right],$$

$$\beta_\nu\left(\vec{r},\vec{\Omega},T\right) = \left(\chi_\nu B_\nu - \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{1\nu} + \chi_\nu \kappa_\nu^{-1} B_{2\nu} + B_{3\nu}\right) U_\nu^{-1},$$

$$T^{n+7} = a_0 x_1^2 + a_1 x_1 + a_2 + b_0 x_2^2 + b_1 x_2 + b_2 + c_0 x_3^2 + c_1 x_3 + c_2,\qquad a_0 + b_0 + c_0 = -\frac{3(n+7)}{2m}Q.$$

Остальные константы выбираются из условий согласования с граничными и начальными условиями, а также неотрицательности функций I, U, T, σ.

Литература

[1] Думкина Г.В., Козманов М.Ю. Точное решение нелинейной системы уравнений энергии и нестационарного переноса излучения. ЖВМ и МФ, 1979, т.19, в.4, с.1061-1063.

[2] Гусев В.Ю., Козманов М.Ю. О некоторых точных решениях системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом рассеяния. ВАНТ, 1986, в.3, с.20-21.

[3] Тихомиров Б.П. Об одном классе точных решений системы уравнений радиационного теплопереноса. ВАНТ, 1986, в.2, с.3-8.

[4] Шестаков А.А. Точные решения системы уравнений энергии и переноса излучения с учетом анизотропного рассеяния в многомерном случае. ВАНТ, 1991, в.3, с.12-14.

[5] Edward W. Larsen, Guido Thommes, Axel Klar, Mohammed Sead and Thomas Gotz. Simplified *PN* Approximations to the Equations of Radiative Heat Transfer and Applications1. J. of Comput. Phys. 183, 652-675 (2002).

[6] Edward W. Larsen, J.E. Morel, John M. McGhee. Asymptotic Derivation of the Multigroup P1 and Simplified PN Equations with Anisotropic Scattering. Nuclear Science and Engineering. 123,328-342 (1996).

[7] Patrick S. Brantley and Edward W. Larsen. The Simplified P_3 Approximation. Nuclear Science and Engineering. 134, 1-21 (2000).

[8] В.В. Завьялов, А.А. Шестаков. Упрощенные решения задачи Флека. ВАНТ, 2005, в.3, с.26-36.

[9] Ахромеева Т.С., Волосевич П.П. и др. К расчету задач трехтемпературной гидродинамики. Препринт ИПМ АН СССР, №28, 1980.

[10] А.И.Зуев, Н.Г.Карлыханов, В.А.Лыков, В.Е.Черняков. О роли быстрых электронов и ограничении теплопроводности в экспериментах с газонаполненными оболочками. Препринт ИПМ АН СССР №37, 1980.

[11] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука,1966.

[12] Бай Ши-и. Динамика излучающего газа. М.: Мир, 1968.

[13] Fleck J.A., Cummings J.D. An Implicit Monte Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport. J. of Comput. Phys. 1971, v.8, p.313-342.